G. E. ŞILOV

ANALIZĂ MATEMATICĂ

TABLA DE MATERII

Prefață 9

Capitolul 1. DETERMINANȚI 11

1.1. Corpuri de numere 11
1.2. Probleme de bază ale teoriei sistemelor de ecuații liniare 13
1.3. Determinantul de ordin n 15
1.4. Proprietățile determinanților 19
1.5. Complementi algebrici și minori 23
1.6. Calculul practic al determinanților 27
1.7. Regula lui Cramer 29
1.8. Minori de ordin oarecare. Teorema lui Laplace 33
1.9. Asupra dependenței liniare a coloanelor 36
Probleme 42

Capitolul 2. SPAȚII LINIARE 45

2.1. Definiții 45
2.2. Dependența liniară 50
2.3. Bază, coordonate, dimensiune 53
2.4. Subspații 57
2.5. Acoperiri liniare 65
2.6. Hiperplane 67
2.7. Morfisme și spații liniare 69
Probleme 73

Capitolul 3. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE 74

3.1. Complemente relativ la rangul unei matrici 74
3.2. Compatibilitatea nebanală a unui sistem liniar omogen 76
3.3. Condiția de compatibilitate a unui sistem liniar general 77
3.4. Soluția generală a unui sistem liniar 79
3.5. Proprietăți geometrice ale mulțimii soluțiilor unui sistem liniar 81
3.6. Metode de calcul al rangului unei matrici 83
Probleme 87

Capitolul 4. FUNCȚII LINIARE DE ARGUMENT VECTORIAL 91
4.1. Forme liniare ... 91
4.2. Operatori liniari și scrierea lor matricială ... 94
4.3. Operații asupra operatorilor liniari ... 98
4.4. Operații corespunzătoare asupra matricilor ... 100
4.5. Alte proprietăți legate de înmulțirea matricilor ... 105
4.6. Domeniul de valori și subspațiul nul (nucleu) ale unui operator liniar ... 111
4.7. Operatori liniari care transformă $\mathcal{K}_n$ în el însuși (endomorfisme ale spațiului $\mathcal{K}_n$) ... 117
4.8. Subspații invariante ... 125
4.9. Vectori proprii și valori proprii ... 128
Probleme ... 133

Capitolul 5. TRANSFORMAREA COORDONATELOR ... 139
5.1. Formule de trecere la o nouă bază ... 139
5.2. Transformări succesive ... 141
5.3. Transformarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei 142
5.4. Transformarea coeficienților unei forme liniare ... 144
5.5. Transformarea matricii unui operator liniar ... 145
5.6. Tensori ... 147
Probleme ... 153

Capitolul 6. FORMA CANONICĂ A MATRICII UNUI OPERATOR LINIAR ... 155
6.1. Forma canonică a matricii unui operator nilpotent ... 155
6.2. Algebre; algebra polinoamelor într-o nedeterminată ... 158
6.3. Forma canonică a matricii unui operator oarecare ... 165
6.4. Divizori elementari ... 170
6.5. Câteva consecințe ... 176
6.6. Forma Jordan reală ... 179
6.7. Spectre, jeturi și polinoame ... 184
6.8. Funcții de operatori și scrierea lor matricială ... 193
Probleme ... 201

Capitolul 7. FORME BILINIARE ȘI FORME PĂTRATICE ... 204
7.1. Forme biliniare ... 204
7.2. Forme pătratice ... 208
7.3. Reducerea unei forme pătratice la forma canonică ... 211
7.4. Bază canonică a unei forme biliniare ... 216
7.5. Construirea unei baze canonice prin metoda Jacobi ... 219
7.6. Operatori liniari adjuncți (conjugați) ... 223
7.7. Izomorfism între spații cu formă biliniară fixată ... 227

7.8. Forme multiliniare ... 230
7.9. Forme biliniare și forme pătratice în spațiul real ... 232
Probleme ... 239

Capitolul 8. SPAȚII EUCLIDIENE ... 241
8.1. Introducere ... 241
8.2. Definiția unui spațiu euclidian ... 242
8.3. Noțiuni metrice fundamentale ... 243
8.4. Baza ortogonală ... 249
8.5. Problema perpendicularei ... 250
8.6. Teorema generală a ortogonalizării ... 255
8.7. Determinantul Gram ... 259
8.8. Sisteme incompatibile de ecuații liniare și metoda celor mai mici pătrate ... 263
8.9. Operatori adjuncți și izometrii ... 266
Probleme ... 276

Capitolul 9. SPAȚII COMPLEXE CU PRODUS SCALAR ... 276
9.1. Forme hermitice ... 276
9.2. Produsul scalar în spațiul complex ... 283
9.3. Operatori normali ... 288
9.4. Aplicarea spațiilor unitare la teoria operatorilor într-un spațiu euclidian ... 292
Probleme ... 301

Capitolul 10. FORME PĂTRATICE ÎN SPAȚII EUCLIDIENE ȘI UNITARE ... 303
10.1. Teorema fundamentală asupra formelor pătratice în spații euclidiene ... 303
10.2. Proprietățile extremale ale unei forme pătratice ... 306
10.3. Problema perechilor de forme pătratice ... 314
10.4. Reducerea ecuației generale a suprafețelor de gradul doi la forma canonică ... 318
10.5. Proprietăți geometrice ale suprafețelor de gradul doi ... 321
10.6. Analiza unei suprafețe dată prin ecuația sa generală ... 334
10.7. Forme pătratice hermitice ... 343
Probleme ... 345

Capitolul 11. ALGEBRE FINIT-DIMENSIONALE ȘI ALGEBRE DE MATRICI ... 347
11.1. Noțiuni preliminarii ... 347
11.2. Reprezentări ale algebrelor abstracte ... 348
11.3. Reprezentări ireductibile și lema lui Schur ... 349
11.4. Tipuri de bază de algebre finit-dimensionale ... 350

11.5. Structura reprezentării regulate la stînga a unei algebre simple 354
11.6. Structura algebrelor simple ... 356
11.7. Structura algebrelor semisimple ... 359
11.8. Structura reprezentărilor algebrelor simple și semisimple 364
11.9. Alte rezultate ... 369
Probleme ... 369

Capitolul 12. CATEGORII DE SPAȚII FINIT-DIMENSIONALE 372
12.1. Introducere ... 372
12.2. Cazul cînd toate algebrele $\mathfrak{B}_\alpha$ sînt complete ... 376
12.3. Toate algebrele date $\mathfrak{B}_\alpha$ sînt unidimensionale ... 378
12.4. Toate algebrele date $\mathfrak{B}_\alpha$ sînt simple ... 384
12.5. Toate algebrele date $\mathfrak{B}_\alpha$ sînt algebre complete de matrici diagonale ... 392
12.6. Categorii și sume directe ... 398

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII LA PROBLEME ... 401

INDEX ... 415

PREFAȚĂ

Această lucrare a fost concepută ca manual pentru studenții anilor întîi ai facultăților cu specializare în matematică și fizică. Materialul prezentat aici este de obicei încorporat în cursul de algebră liniară și în dezvoltările diverselor capitole ale analizei matematice. Trebuie notat că actualmente denumirea de „algebră liniară" nu corespunde conținutului ei, acesta fiind mai degrabă o prezentare de sinteză a unor idei din algebră, geometrie și analiză. Deși analiza, ca ramură a matematicii legată de conceptele de limită, derivată, integrală, se află aparent pe planul secund în această lucrare, în realitate ea este o prezență autentică, deoarece problemele algebrei liniare pot fi considerate „proiecții finit-dimensionale" ale unor probleme fundamentale ale analizei și în același timp suportul rezolvării acestora din urmă.

Volumul de față are la bază lucrarea anterioară a autorului, *Introducere în teoria spațiilor vectoriale*. Aici se consideră în plus cazul spațiilor vectoriale peste corpuri oarecare de numere, incluzînd în particular cazul real și complex, dealtfel strîns legate unul de altul.

Un capitol întreg este consacrat formei Jordan a matricilor operatorilor liniari în spații liniare complexe și reale. Pentru spații liniare complexe cu produs scalar sînt introduse formele canonice ale matricilor operatorilor normali, de unde se obțin în particular formele canonice ale matricilor operatorilor hermitici, antihermitici și unitari, ca și ale noțiunilor similare din cazul real. Ultimele două capitole ale cărții se referă la structura algebrelor de matrici sau a unor categorii de matrici și autorul a beneficiat aici de sprijinul lui A. Ia. Helemski și I. M. Ghelfand. Aceste două capitole sînt elementare prin metodele utilizate, dar nivelul

UNIV. „AL. I. CUZA" BIBL. DE FIZICĂ

general al expunerii este superior celui din capitolele anterioare, reflectînd unele dezvoltări ulterioare ale algebrei liniare.

Fiecare capitol se încheie cu cîte un set de probleme, care ajută într-o anumită măsură la formarea unei rutine tehnice necesare (care poate fi obținută mai pregnant prin utilizarea unor culegeri de probleme mai cuprinzătoare). Problemele din această carte sînt utile în special pentru ilustrarea și dezvoltarea textului de bază, unele din ele putînd fi recomandate pentru seminarii tematice. Aceeași recomandare poate fi făcută pentru părțile din text scrise cu literă mică.

Autorul consideră ca o datorie plăcută aceea de a sublinia munca migăloasă a lui M. S. Agranovici și de a-i aduce mulțumiri pentru o serie de observații prețioase. De asemenea mulțumește lui I. Ia. Dorfman pentru verificarea tuturor problemelor.

AUTORUL

Capitolul I

DETERMINANȚI

§ 1.1. Corpuri de numere

1.11. În algebra liniară se utilizează în mod curent sisteme de numere (corpuri de numere), așa cum se întîmplă în multe domenii ale matematicii. Se numește *corp de numere* orice colecție K de obiecte, numite *numere*, pentru care se pot defini patru operații aritmetice. Enumerăm condițiile ce se cer a fi verificate de aceste operații *(axiomele corpului)*.

a. Fiecărei perechi de numere α și β i se poate asocia numărul $\alpha + \beta$ numit *suma* numerelor α și β, astfel încît

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ pentru orice α, β din K *(comutativitatea adunării)*;

2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ pentru orice α, β, γ din K *(asociativitatea adunării)*;

3) să existe numărul 0 *(zero)* cu proprietatea că $0 + \alpha = \alpha$ pentru orice α din K;

4) pentru orice α din K să existe numărul β din K astfel ca $\alpha + \beta = 0$ *(existența elementului opus)*.

Rezolvabilitatea ecuației $\alpha + \beta = 0$ pentru orice α fixat permite introducerea operației de scădere: *diferența* $\alpha - \beta$ este prin definiție suma dintre numărul α și soluția γ a ecuației $\beta + \gamma = 0$.

b. Fiecărei perechi de numere α și β i se poate asocia numărul $\alpha \cdot \beta$ (sau $\alpha\beta$), numit *produsul* numerelor α și β, astfel încît

5) $\alpha\beta = \beta\alpha$ pentru orice α și β din K *(comutativitatea înmulțirii)*;

6) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ pentru orice α, β, γ din K *(asociativitatea înmulțirii)*;

7) să existe numărul 1 ($\neq 0$) astfel ca $1 \cdot \alpha = \alpha$ pentru orice număr α din K;

8) pentru orice $\alpha \neq 0$ să existe numărul γ din K cu proprietatea că $\alpha\gamma = 1$ *(existența elementului invers)*.

Rezolvabilitatea ecuației $\alpha\gamma = 1$ pentru orice $\alpha \neq 0$ permite introducerea operației de împărțire cu numărul $\alpha \neq 0$: *câtul* β/α este produsul dintre numărul β și soluția γ a ecuației $\alpha\gamma = 1$.

Numerele $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$ etc. se numesc *naturale*; se presupune că nici unul din ele nu este egal cu 0. (Mulțimea $\{N, E\}$ formată din două elemente se poate înzestra cu o structură de corp. $N + N = N$, $N + E = E + N = E$, $E + E = N$, $N \cdot N = N$, $N \cdot E = E \cdot N = N$, $E \cdot E = E$. În corespondență cu notațiile noastre ar trebui să punem $N = 0$, $E = 1$ și atunci $2 = 1 + 1 = 0$. Pentru a evita astfel de sisteme de numere, cerem ca toate elementele naturale ale corpului să fie diferite de zero).

Numerele naturale, opusele lor și 0 formează, prin definiție, mulțimea numerelor *întregi* ale corpului K. Câturile p/q, unde p și q sînt întregi și $q \neq 0$ formează mulțimea numerelor *raționale* ale corpului K.

Două corpuri K și K' se numesc *izomorfe* dacă între ele se poate stabili o corespondență biunivocă astfel încît sumei și produsului numerelor din K să-i corespundă suma și produsul numerelor corespunzătoare din corpul K' (în acest caz rezultatele celorlalte operații — diferența și câtul — se corespund de asemenea).

1.12. Cele mai frecvent întîlnite corpuri concrete de numere sînt următoarele:

a. *Corpul numerelor raționale*, adică mulțimea rapoartelor p/q unde p și q sînt numere întregi uzuale, $q \neq 0$, cu regulile aritmetice obișnuite de operare (Se poate observa că numerele întregi nu formează corp de numere deoarece în acest caz nu este îndeplinită axioma 8).

Din cele spuse mai sus, rezultă că în fiecare corp K există o parte (subcorp) izomorfă cu corpul numerelor raționale.

b. *Corpul numerelor reale*, avînd ca reprezentare geometrică mulțimea tuturor punctelor unei axe. Teoria axiomatică a corpului numerelor reale se obține adăugînd la axiomele 1—8 axiomele de ordine și de existență a marginii superioare (Teoria numerelor reale va fi expusă în volumul următor).

c. *Corpul numerelor complexe* $a+ib$, unde a și b sînt reale (simbolul i nu este număr real), cu regulile de operare

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Pentru numerele de forma $a + i0$ aceste operații se efectuează exact ca operațiile asupra numerelor reale a; scriem pe scurt $a + i0 = a$ și denumim reale aceste numere complexe. Se poate arăta că în corpul numerelor complexe există o parte (subcorp) izomorfă cu corpul numerelor reale. Numerele complexe de forma $0 + ib$ se numesc (pur) imaginare și se notează pe scurt ib.

Din regula de înmulțire rezultă că

$$i^2 = i \cdot i = (0 + i1)(0 + i1) = -1 + i0 = -1.$$

1.13. Corpul numerelor reale va fi notat în continuare cu $\mathbb{R}$. Corpul numerelor complexe se notează prin $\mathbb{C}$. Conform teoremei fundamentale a algebrei, în corpul $\mathbb{C}$, alături de posibilitatea efectuării celor patru operații aritmetice, orice ecuație algebrică de forma

$$z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

admite soluție.

Corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale nu are această ultimă proprietate : de exemplu, ecuația $x^2 + 1 = 0$ nu are soluții în $\mathbb{R}$.

Multe din construcțiile care urmează au loc pentru orice corp de numere. În continuare vom nota prin K un corp arbitrar de numere. Dacă o anumită afirmație este adevărată pentru corpul K, atunci ea este automat adevărată pentru corpurile $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$, care sînt cazuri particulare ale corpului K.

§ 1.2. Probleme de bază ale teoriei sistemelor de ecuații liniare

1.21. În capitolul de față, cît și în următoarele două, ne vom ocupa de studiul sistemelor de ecuații liniare.

În cel mai general caz un astfel de sistem are forma

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Aici prin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt notate necunoscutele (elemente ale corpului K) care trebuie determinate; de notat că numărul necunoscutelor nu este presupus neapărat egal cu numărul ecuațiilor. Numerele $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{kn}$, luate din corpul K, se numesc *coeficienții* sistemului. Primul indice al oricărui coeficient indică numărul ecuației în care figurează acel coeficient, iar cel de al doilea indice este numărul necunoscutei corespunzătoare (de exemplu, coeficientul a_{34} este citit *a*-treipatru și nu *a*-treizecișipatru și este asociat cu a treia ecuație din sistem și cu necunoscuta x_4). Numerele $b_1, b_2, \ldots, b_k$, aflate în membrul drept al egalităților (1), luate de asemenea din același corp K, se numesc *termenii liberi* ai sistemului; ca și coeficienții, ei se presupun cunoscuți.

Prin *soluție* a sistemului (1) se înțelege orice sistem ordonat $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de numere din corpul K astfel încît după înlocuirea lor în locul necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în sistemul (1), toate ecuațiile sistemului să devină identități. De subliniat că $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ reprezintă o singură soluție a sistemului și nu n soluții.

Nu orice sistem de ecuații liniare de forma (1) are soluții. De exemplu, sistemul

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 &= 6 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

nu poate avea nici o soluție, deoarece oricare ar fi numerele c_1, c_2 pe care le-am pune în locul necunoscutelor x_1, x_2, membrii din stînga ecuațiilor sistemului (2) sînt egali, în timp ce membrii din dreapta sînt distincți. De aceea prin aceste înlocuiri ecuațiile sistemului (2) nu pot deveni simultan identități.

Un sistem de ecuații de forma (1) avînd cel puțin o soluție se numește *compatibil;* un sistem care nu admite soluții se numește *incompatibil.*

Un sistem compatibil poate avea o singură soluție sau mai multe soluții distincte; în ultimul caz, pentru a distinge

între soluții, le vom numerota punînd indici superiori în paranteză; de exemplu, una din soluții poate fi notată $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}$, altă soluție $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \ldots, c_n^{(2)}$ etc. Soluțiile $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}$ și $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \ldots, c_n^{(2)}$ se consideră *distincte* dacă cel puțin unul din numerele $c_i^{(1)}$ diferă de numărul corespunzător $c_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. De exemplu, sistemul

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 0, \\ 4x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

are soluții distincte $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = 0$; $c_1^{(2)} = 3$, $c_2^{(2)} = -2$ (și chiar o infinitate de soluții distincte). Dacă un sistem compatibil are soluție unică, el se numește sistem *compatibil determinat;* dacă un sistem compatibil are cel puțin două soluții distincte, atunci el se numește *nedeterminat.*

1.22. Putem formula acum problemele de bază care apar în studiul sistemelor (1):

I. A decide dacă sistemul (1) este compatibil sau incompatibil.

II. Dacă sistemul (1) este compatibil, a decide dacă el este determinat.

III. Dacă sistemul (1) este compatibil și determinat, a găsi soluția unică a lui.

IV. Dacă sistemul (1) este compatibil și nedeterminat, a descrie mulțimea tuturor soluțiilor lui.

Instrumentul matematic de bază pentru studiul sistemelor liniare îl constituie teoria determinanților; trecem acum la expunerea acesteia.

§ 1.3. Determinantul de ordin n

1.31. Fixăm o matrice pătratică

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{Vmatrix}. \quad (4)$$

cu cele n^2 elemente a_{ij} numere din K $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Numărul n al liniilor sau coloanelor matricii (4) se numește *ordinul* matricii. Primul și al doilea indice pentru elementul

a_{ij} indică respectiv numărul liniei și numărul coloanei pe care se află dispus acest element. Elementele $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formează *diagonala principală* a matricii A.

Considerăm orice produs de n elemente dispuse pe linii distincte și pe coloane distincte ale matricii (4), adică cîte unul de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană. Un astfel de produs se poate scrie sub forma

$$a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \ldots a_{\alpha_n n}. \tag{5}$$

Într-adevăr, luăm ca prim factor un element situat pe prima coloană a matricii (4): dacă notăm cu α_1 numărul liniei pe care se află acel element, atunci indicii acestui element vor fi α_1 și 1. În mod similar al doilea factor al produsului se poate lua elementul aflat în coloana a doua (cu indicii α_2 și 2, unde α_2 este numărul liniei pe care se află acel element) etc. În acest mod indicii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt numerele liniilor pe care sînt dispuși factorii produsului considerat, în corespondență cu ordinea crescătoare a indicilor de coloană; se obține astfel forma (5).

Deoarece elementele $a_{\alpha_1 1}, a_{\alpha_2 2}, \ldots, a_{\alpha_n n}$ sînt dispuse în linii distincte ale matricii (4), cîte unul din fiecare linie, numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vor fi distincte și deci constituie o permutare a numerelor $1, 2, \ldots, n$.

Vom numi „inversiune" în acest șir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ o astfel de dispunere a indicilor în care un indice mai mare se află înaintea unuia mai mic. Numărul tuturor „inversiunilor" permutării $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ va fi notat cu $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

De exemplu, în permutarea 2 1 4 3 (a numerelor 1, 2, 3, 4) se află două „inversiuni": 2 înaintea lui 1 și 4 înaintea lui 3; așadar $N(2, 1, 4, 3) = 2$. În permutarea 4, 3, 1, 2 sînt cinci „inversiuni": 4 înaintea lui 3, 4 înaintea lui 1, 4 înaintea lui 2, 3 înaintea lui 1, 3 înaintea lui 2; de aceea $N(4, 3, 1, 2) = 5$.

Dacă numărul de inversiuni în șirul $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ este par, atunci se pune în fața produsului (5) semnul $+$; dacă numărul de inversiuni este impar se pune în fața produsului (5) semnul $-$. Cu alte cuvinte, convenim ca înaintea fiecărui produs de forma (5) să considerăm semnul definit prin expresia

$$(-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}.$$

Numărul tuturor produselor de forma (5) care se pot forma din elementele matricii (4) de ordin n este egal cu numărul tuturor permutărilor posibile ale numerelor $1, 2, \ldots, n$, care este $n!$

Acum introducem următoarea definiție:

Se numește **determinant** *al matricii* (4) *suma algebrică a tuturor celor* $n!$ *produse posibile de forma* (5) *considerate cu semnul definit mai sus*:

$$D = \sum (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \ldots a_{\alpha_n n}. \tag{6}$$

În cele ce urmează, produsele de forma (5) vor fi numite *termenii* determinantului D. Elementele a_{ij} ale matricii (4) vor fi numite *elementele* determinantului.

Determinantul matricii (4) se notează printr-unul din simbolurile următoare:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \tag{7}$$

$$= \det \| a_{ij} \| = \det \| a_{ij} \|_{i,j = 1,2, \ldots, n}.$$

De exemplu, pentru determinanții de ordin 2 și 3 obținem următoarele expresii:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+ a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Indicăm rolul determinanților în rezolvarea sistemelor de ecuații liniare pe exemplul sistemelor de două ecuații cu două necunoscute. Dacă este dat sistemul

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

atunci soluția este dată prin formulele

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}; \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

în ipoteza că numitorul $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ este diferit de zero. Numărătorii și numitorii fracțiilor anterioare se pot reprezenta ca determinanți de ordinul 2:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

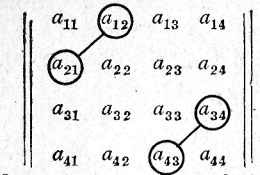
Vom vedea că formule analoage au loc și la rezolvarea sistemelor cu un număr oarecare de necunoscute (v. § 1.7).

1.32. Regula de determinare a semnului fiecărui termen al unui determinant se poate formula puțin diferit, în limbaj geometric.

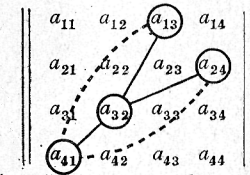
În matricea (4), în corespondență cu notarea cu indici a elementelor, se disting direcțiile pozitive: de la stînga la dreapta (în lungul liniilor) și de sus în jos (în lungul coloanelor). Odată cu acestea pentru celelalte segmente care unesc orice două elemente ale matricii, se poate asocia convențional o direcție, anume: segmentul care unește elementul a_{ij} cu elementul a_{km} *are înclinare pozitivă* dacă capătul său din dreapta este dispus mai jos decît cel din stînga și *are înclinare negativă* în cazul cînd capătul din dreapta este mai sus decît cel din stînga. Considerăm în matricea (4) segmentele care unesc două cîte două toate elementele $a_{\alpha_1 1}$, $a_{\alpha_2 2}$, ... $a_{\alpha_n n}$ ale produsului (5) și reținem în gînd pe cele care au înclinare negativă. Se pune înaintea produsului (5) semnul + dacă numărul acestor segmente este par și semnul — dacă numărul lor este impar.

De exemplu, în cazul unei matrici de ordin 4, înaintea produsului $a_{21}a_{12}a_{43}a_{34}$ trebuie pus semnul +, deoarece în matrice sînt două segmente

cu înclinarea negativă unind două cîte două elementele produsului considerat:



De asemenea, în fața produsului $a_{41}a_{32}a_{13}a_{24}$ trebuie luat semnul —, deoarece în matrice există cinci segmente cu înclinare negativă unind elementele lui:



În aceste exemple numărul segmentelor cu înclinare negativă unind elementele termenilor considerați este egal cu numărul „inversiunilor" în ordonarea primilor indici ai elementelor care figurează în produsele respective; în primul exemplu șirul primilor indici este 2, 1, 4, 3 și are două „inversiuni", iar în exemplul secund șirul primilor indici este 4,3,1,2, și are cinci „inversiuni".

Arătăm că a doua *definiție a semnului termenilor unui determinant este echivalentă cu definiția inițială*. Pentru aceasta este suficient de arătat că numărul „inversiunilor" în șirul primilor indici ai elementelor fiecărui termen fixat (pentru ordinea naturală a indicilor secunzi) este totdeauna egal cu numărul segmentelor din matrice cu înclinare negativă unind elementele termenului considerat. Dar acest fapt este aproape evident: prezența unui segment cu înclinare negativă unind elementele $a_{\alpha_i i}$ și $a_{\alpha_j j}$, pentru $i < j$, înseamnă că $\alpha_i > \alpha_j$, adică echivalează cu o „inversiune" în ordonarea primilor indici.

Vezi problemele 1—3 de la sfîrșitul capitolului.

§ 1.4. Proprietățile determinanților

1.41. *Operația de transpunere.* Determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

obținut din determinantul (7) prin înlocuirea liniilor cu coloanele avînd aceleași numere se numește *transpusul* determinantului (7). Arătăm că *valoarea determinantului transpus* (8) *coincide cu valoarea determinantului inițial* (7). Într-adevăr, determinanții (7) și (8) au evident aceeași termeni și este suficient de arătat doar că semnele dinaintea acestora coincid. Operația de transpunere revine geometric la o rotație în spațiu cu 180° în jurul diagonalei principale. Prin această rotație fiecare segment cu înclinare negativă (de exemplu, formînd unghiul $\alpha < 90°$ cu liniile matricii) se transformă din nou într-un segment cu înclinare negativă (formînd unghiul $90° - \alpha$ cu liniile noii matrici). De aceea numărul segmentelor cu înclinare negativă care unesc elementele unui termen arbitrar fixat nu se schimbă după transpunere, deci nu se schimbă nici semnul din fața acelui termen. Astfel, semnele tuturor termenilor se conservă și valoarea determinantului rămîne neschimbată prin transpunere.

Proprietatea demonstrată stabilește rolul simetric al liniilor și coloanelor. De aceea proprietățile determinanților vor fi formulate și demonstrate numai pentru coloane.

1.42. *Proprietatea de antisimetrie.* Prin *antisimetrie relativ la coloane* se înțelege proprietatea oricărui determinant de a-și schimba semnul în urma permutării oricăror două coloane. Considerăm mai întîi cazul cînd se permută între ele două coloane vecine ale determinantului de exemplu j cu $j+1$. Determinantul obținut după această permutare de coloane va fi format din aceiași termeni ca și determinantul inițial. Ne fixăm asupra unui termen oarecare al determinantului inițial. Acest termen conține un element de pe coloana j și un element de pe coloana $j+1$. Dacă segmentul care unește aceste elemente are înclinare negativă, atunci după permutarea celor două coloane el va căpăta o înclinare pozitivă și invers. Celelalte segmente unind două cîte două elementele termenului fixat nu-și schimbă caracterul înclinării după permutarea coloanelor $j, j+1$. Așadar numărul segmentelor cu înclinare negativă unind elementele termenului fixat se modifică, după permutarea considerată de coloane, cu o unitate și prin urmare fiecare termen al determinantului, ca și determinantul însuși, își schimbă semnul în urma permutării coloanelor $j, j+1$.

Presupunem acum că se permută coloanele j, k $(j < k)$, avînd între ele m coloane intermediare $(m = k - j - 1)$.

Această permutare se poate considera ca o succesiune de permutări de coloane vecine, în următoarea ordine: la început coloana j se permută cu coloana $j+1$ și ulterior cu $j+2$, $j+3$, ..., k, apoi coloana $k-1$ (fostă anterior coloana k) se permută cu coloanele $k-2$, $k-3$, ..., j. În total se realizează $m+1+m = 2m+1$ permutări de coloane vecine; după fiecare din ele, conform celor demonstrate mai sus determinantul își schimbă semnul și deci la sfîrșitul întregului proces se obține un determinant avînd semn opus celui inițial (deoarece $2m+1$ este număr impar pentru orice m întreg).

1.43. COROLAR. *Determinantul avînd două coloane identice este nul.*

Într-adevăr, permutînd aceste două coloane, nu se schimbă determinantul; pe de altă parte, conform celor arătate, el trebuie să-și schimbe semnul. Așadar, $D = -D$, de unde se obține că $D = 0$.

Vezi problema 4.

1.44. *Proprietatea de liniaritate a determinantului.* Această proprietate se formulează astfel:

a. *Dacă toate elementele coloanei j a unui determinant D se reprezintă sub forma unor «combinații liniare» a doi termeni de forma*

$$a_{ij} = \lambda b_i + \mu c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

λ și μ fiind numere fixate, atunci determinantul D este egal cu aceeași combinație liniară a doi determinanți

$$D = \lambda D_1 + \mu D_2, \tag{9}$$

unde D_1, D_2 au aceleași coloane cu ale lui D, cu excepția coloanei j, care constă din numerele b_i în cazul lui D_1 și din numerele c_i în cazul lui D_2.

Într-adevăr, fiecare termen al determinantului D se poate reprezenta sub forma

$$a_{\alpha_1 1}\, a_{\alpha_2 2} \ldots a_{\alpha_n n} = a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \ldots (\lambda b_{\alpha_j} + c_{\alpha_j}) \ldots a_{\alpha_n n} =$$
$$= \lambda a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \ldots b_{\alpha_j} \ldots a_{\alpha_n n} + \mu a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \ldots c_{\alpha_j} \ldots a_{\alpha_n n}.$$

Grupînd primii termeni (cu aceleași semne pe care le aveau termenii corespunzători ai primului determinant) și dînd factor comun λ, se obține în paranteză tocmai determinantul D_1; analog, grupînd termenii secunzi și dînd factor comun μ se obține determinantul D_2 și astfel formula (9) este stabilită.

Este comod de transcris această formulă într-o formă modificată. Fie D un determinant oarecare fixat. Notăm cu $D_j(p_i)$ determinantul obținut prin înlocuirea coloanei j a determinantului D prin numerele $p_i (i = 1, 2, ..., n)$. Determinantul inițial poate fi scris $D_j(a_{ij})$. Atunci egalitatea (9) demonstrată mai sus se scrie sub forma

$$D_j(\lambda b_i + \mu c_i) = \lambda D_j(b_i) + \mu D_j(c_i).$$

b. Proprietatea de liniaritate a unui determinant se extinde fără dificultate la cazul cînd fiecare element al coloanei j este combinație liniară de un număr arbitrar fixat de termeni:

$$a_{ij} = \lambda b_i + \mu c_i + ... + \tau f_i;$$

în acest caz,

$$D_j(a_{ij}) = D_j(\lambda b_i + \mu c_i + ... + \tau f_i) =$$
$$= \lambda D_j(b_i) + \mu D_j(c_i) + ... + \tau D_j(f_i). \qquad (10)$$

1.45. COROLAR. *Dacă într-un determinant toate elementele unei coloane sînt înmulțite cu un număr, atunci valoarea determinantului se înmulțește cu acel număr.*

Într-adevăr, dacă $a_{ij} = \lambda b_i$ (j fixat) atunci conform formulei (10)

$$D_j(a_{ij}) = D_j(\lambda b_i) = \lambda D_j(b_j),$$

ceea ce trebuia arătat.

1.46. COROLAR. *Dacă o anumită coloană a unui determinant are toate elementele egale cu zero, atunci determinantul este nul.*

Într-adevăr, aplicînd proprietatea precedentă, rezultă

$$D_j(0) = D_j(0 \cdot 1) = 0 \cdot D_j(1) = 0.$$

Vezi problema 5.

1.47. *Adăugarea la o coloană a unei alte coloane înmulțită cu un număr arbitrar.*

a. *Valoarea unui determinant nu se modifică dacă la elementele unei coloane se adaugă elementele corespunzătoare ale oricărei alte coloane, înmulțite cu un număr fixat.*

Presupunem că la coloana j se adaugă elementele coloanei $k (k \neq j)$ înmulțite cu numărul λ. În determinantul astfel obținut coloana j constă din elementele $a_{ij} + \lambda a_{ik}$ ($i = 1,2, ..., n$). În virtutea formulei (9) avem

$$D_j(a_{ij} + \lambda a_{ik}) = D_j(a_{ij}) + \lambda D_j(a_{ik}).$$

În cel de-al doilea determinant, coloana j constă din elementele a_{ik}, deci coincide cu coloana k. Conform corolarului 1.43, $D_j(a_{ik}) = 0$, deci

$$D_j(a_{ij} + \lambda a_{ik}) = D_j(a_{ij}),$$

ceea ce trebuia arătat.

b. Desigur proprietatea **a** se poate formula într-o formă mai generală: *valoarea unui determinant D nu se modifică dacă la elementele coloanei j se adaugă elementele corespunzătoare ale coloanei k înmulțite cu numărul λ, apoi elementele coloanei l înmulțite cu numărul μ, ..., elementele coloanei p înmulțite cu numărul $\tau (k \neq j, l \neq j, ..., p \neq j)$.*

Vezi problema 6.

1.48. Toate proprietățile demonstrate de noi în acest paragraf pentru coloanele unui determinant rămîn valabile, în virtutea invarianței determinantului la operația de transpunere (1.41), pentru liniile acelui determinant.

§ 1.5. Complementi algebrici și minori

1.51. Considerăm o coloană oarecare, de exemplu coloana de indice j a unui determinant D. Fie a_{ij} un element oarecare al acestei coloane. În membrul drept al egalității (6)

$$D = \Sigma (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} ... a_{\alpha_n n},$$

definitorie pentru D, strîngem într-o paranteză toți termenii care conțin elementul a_{ij} și dăm factor comun a_{ij}. Suma rămasă în paranteze se notează cu A_{ij} și se numește *complementul algebric al elementului a_{ij} în determinantul D.*

Deoarece în fiecare termen al determinantului intră cîte un element al coloanei j, egalitatea (6) poate fi atunci scrisă sub forma

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}. \qquad (11)$$

Formula (11) se numește *formula de dezvoltare a determinantului D după elementele coloanei j*. Se subînțelege că o formulă similară se poate obține și pentru orice linie a determinantului D; de exemplu, pentru linia i se obține egalitatea

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \qquad (12)$$

Am obținut următoarea teoremă:

TEOREMĂ. *Într-un determinant D suma tuturor produselor elementelor unei anumite coloane (sau linii) prin complementii algebrici corespunzători este egală cu însuși determinantul D.*

Formulele (11), (12) se pot utiliza pentru calculul determinanților. Dar este necesar de știut calculul complemenților algebrici; regula de calcul al acestora se va da în 1.54.

1.52. Subliniem o consecință a formulelor (11) și (12) care va fi utilizată ulterior.

Egalitatea (11) se îndeplinește identic relativ la mărimile $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$; de aceea ea rămîne adevărată dacă se înlocuiesc $a_{ij} (i = 1, 2, \ldots, n)$ prin orice alte mărimi. Într-o astfel de operație mărimile $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj}$ rămîn neschimbate deoarece ele nu depind de elementele a_{ij}. Înlocuim în cei doi membri ai egalității (11) elementele $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ prin elementele unei alte coloane (de exemplu coloana k). Atunci determinantul din membrul stîng al relației (11) va avea două coloane identice și conform 1.43 va fi egal cu zero. Se obține astfel egalitatea

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \ldots + a_{nk}A_{nj} = 0 \text{ (pentru } k \neq j). \qquad (13)$$

În mod similar din formula (12) pentru $l \neq i$ se obține

$$a_{l1}A_{i1} + a_{l2}A_{i2} + \ldots + a_{ln}A_{in} = 0. \qquad (14)$$

Astfel am demonstrat teorema următoare:

TEOREMĂ. *Într-un determinant, suma tuturor produselor elementelor oricărei coloane (sau oricărei linii) prin complementii algebrici ai elementelor unei alte coloane (respectiv altei linii) este egală cu zero.*

1.53. Dacă într-o matrice pătratică de ordin n se elimină o anumită linie și o anumită coloană, atunci elementele rămase formează în mod natural o matrice pătratică de ordin $n-1$. Determinantul acestei noi matrici se numește *minor* al matricii de ordin n inițiale (și, de asemenea, minor al determinantului D al matricii inițiale). Dacă se elimină linia i și coloana j, atunci minorul obținut se notează prin M_{ij} sau $M_{ij}(D)$.

Vom arăta că are loc egalitatea

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}, \qquad (15)$$

cu ajutorul căreia calculul complemenților algebrici se reduce la calculul minorilor corespunzători.

Dăm la început demonstrația egalității (15) pentru $i = 1$, $j = 1$. Reunim în membrul drept al egalității (6) toți termenii care conțin elementul a_{11}. Considerăm unul din acești termeni. Este evident că produsul tuturor elementelor sale cu excepția lui a_{11} dă un termen c al minorului M_{11}. Deoarece în matricea determinantului D nu există segmente cu înclinare negativă unind elementul a_{11} cu celelalte elemente ale termenului fixat, atunci semnul care revine termenului $a_{11}c$ în determinantul D coincide cu semnul termenului c în minorul M_{11}. Alegînd arbitrar un termen al determinantului D care conține a_{11} și eliminînd a_{11} se obține un termen al minorului M_{11} și în acest mod se obțin toți termenii lui M_{11}. De aceea suma algebrică a tuturor termenilor determinantului D care conțin a_{11} este egală cu produsul $a_{11}M_{11}$. Dar conform 1.51 această sumă este egală cu $a_{11}A_{11}$. Așadar $A_{11} = M_{11}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Stabilim acum formula (15) pentru orice i și j. Faptul că această formulă a fost deja probată pentru $i = j = 1$ va fi folosit esențial. Considerăm elementul $a_{ij} = a$ aflat la intersecția liniei i cu coloana j în determinantul D. Permutînd succesiv liniile vecine și coloanele vecine, vom putea aduce

elementul a în colțul din stînga sus al matricii; pentru aceasta sînt necesare $i-1+j-1 = i+j-2$ permutări. Ca rezultat se obține un determinant D_1 cu aceiași termeni ca și determinantul D, înmulțit cu $(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$. Minorul $M_{11}(D_1)$ al determinantului D_1 coincide evident cu minorul $M_{ij}(D)$ al determinantului D. Conform celor demonstrate, în determinantul D_1 suma termenilor care conțin a este egală cu $aM_{11}(D_1)$. De aceea suma termenilor care conțin elementul $a_{ij} = a$ în determinantul D este egală cu

$$(-1)^{i+j}aM_{11}(D_1) = a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}(D).$$

Dar această sumă este, conform 1.51, egală cu produsul $a_{ij}A_{ij}$. Așadar, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ și formula (15) este complet stabilită.

1.54. Formulele (11) și (12) se pot acum scrie respectiv sub forma

$$D = (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj},$$

$$D = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$$

și tocmai sub această formă ele sînt de obicei utilizate.

1.55. Exemple

a. Determinantul de ordin 3 admite șase dezvoltări distincte (trei după fiecare linie și trei după fiecare coloană). De exemplu, dezvoltarea după prima linie este

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

b. Determinantul de ordin n

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

se numește *triunghiular*. Dezvoltîndu-l după prima linie se obține că D_n este egal cu produsul elementului a_{11} cu determinantul triunghiular de ordin $n-1$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinantul D_{n-1} se dezvoltă de asemenea după prima linie și se obține $D_{n-1} = a_{22}D_{n-2}$, unde D_{n-2} este un determinant triunghiular de ordin $n-2$. Continuînd procedeul, se obține în final

$$D_n = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn},$$

adică un determinant triunghiular este egal cu produsul elementelor de pe diagonala sa principală.

§ 1.6. Calculul practic al determinanților

1.61. Formula (12) capătă o formă simplă dacă toate elementele liniei i, în afară de a_{ik}, sînt zero. În acest caz

$$D = a_{ik}A_{ik} \tag{16}$$

și calculul determinantului D de ordin n se reduce direct la calculul unui determinant de ordin $n-1$. Dar dacă pentru $a_{ik} \neq 0$ în aceeași linie i se află elementul nenul a_{ij}, atunci înmulțind coloana k a lui D cu $\lambda = -\frac{a_{ij}}{a_{ik}}$ și adunînd la coloana j se obține un determinant (egal cu cel inițial cf.1.47), în care elementul de pe linia i și coloana j este zero. Repetînd o astfel de operație, se poate trece de la orice determinant cu elementul fixat $a_{ik} \neq 0$ la un determinant în care toate elementele liniei i, cu excepția lui a_{ik}, sînt egale cu zero. Acestui ultim determinant i se poate aplica formula (16). Se subînțelege că transformări similare se pot efectua și pentru coloanele unui determinant oarecare.

1.62. **Exemplu.** Calculăm determinantul de ordin 5

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

În coloana a treia a acestui determinant se află deja două elemente egale cu zero. Pentru a obține pe această coloană încă două elemente egale cu zero (modificînd determinantul, dar nu valoarea lui), înmulțim ultima linie cu 3 și o adunăm la cea de-a doua linie, apoi înmulțim ultima linie cu -4 și o adunăm la linia a patra. După aceste operații și dezvoltînd determinantul obținut după coloana a treia se obține

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+5} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Acum vom căuta să obținem trei zerouri în prima coloană. Înmulțim linia a doua cu 2 și o adunăm la prima linie, apoi înmulțim linia a doua cu -3 și în continuare cu -2 și adunăm la liniile a treia și respectiv a patra. Se va obține

$$D = - \begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Pentru a calcula mai ușor determinantul de ordin 3 obținut încercăm să micșorăm valorile absolute ale elementelor sale. Se poate scoate 2 ca factor comun pe linia a doua, apoi adunăm linia a doua la prima și se obține

$$D = 2 \begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 13 & -17 & -13 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 13 & -17 & -13 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Pe prima linie se află deja un zero. Pentru a obține încă un zero înmulțim coloana a treia cu -2 și adunăm la coloana a doua; după această operație determinantul se calculează ușor pînă la capăt:

$$D = 8 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13 & 9 & -13 \\ 36 & 15 & -24 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 13 & 9 \\ 36 & 15 \end{vmatrix} = 8\,(13 \cdot 15 - 9 \cdot 36) = 1032.$$

Vezi problemele 7–10.

§ 1.7. Regula lui Cramer

1.71. Trecem acum la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare. Considerăm pentru început un sistem avînd o formă specială

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

cu numărul necunoscutelor egal cu numărul ecuațiilor. Coeficienții $a_{ij} (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ formează *matricea de bază a sistemului*, relativ la care facem ipoteza că determinantul ei D este diferit de zero. Atunci vom arăta că *sistemul este compatibil și determinat* și vom obține totodată o formulă pentru calculul unicei soluții a sistemului.

Admitem pentru început că sistemul (17) are o soluție $c_1, c_2, \ldots, c_n$; atunci are loc sistemul de relații

$$\left.\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n &= b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \ldots + a_{nn}c_n &= b_n. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Înmulțim prima din relațiile (18) cu complementul algebric A_{11} al elementului a_{11} din matricea sistemului, apoi înmulțim a doua relație din (18) cu A_{21}, a treia cu A_{31} etc. pînă la ultima relație înmulțită cu A_{n1} și adunăm egalitățile obținute. Se va obține relația:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1})c_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \ldots + a_{n2}A_{n1})c_2 + \ldots + (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \ldots + a_{nn}A_{n1})c_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}.$$

În virtutea teoremei 1.51 coeficientul lui c_1 din relația (19) este egal cu determinantul D; conform teoremei 1.52 coeficienții tuturor celorlalți $c_j (j \neq 1)$ sînt nuli. Membrul drept al relației (19) este tocmai dezvoltarea determinantului

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

după prima coloană a sa; de aceea relația (19) se poate scrie sub forma $D \cdot c_1 = D_1$, de unde

$$c_1 = \frac{D_1}{D}.$$

Raționînd absolut similar se obțin expresiile

$$c_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (20)$$

unde

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_j(b_i)$$

este determinantul obținut din determinantul D prin înlocuirea coloanei j prin coloana numerelor $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Am obținut astfel următorul rezultat:

Dacă există o soluție a sistemului (17), *atunci ea se exprimă prin coeficienții sistemului și termenii liberi* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *prin formulele* (20). În particular, obținem că dacă există, soluția sistemului (17) este *unică*.

1.72. Rămîne acum de dovedit că soluția sistemului (17) există întotdeauna. Pentru aceasta, înlocuim mărimile $c_j = \frac{D_j}{D}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ în sistemul (17) în locul necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și arătăm că toate ecuațiile sistemului (17) devin identități. Într-adevăr, pentru ecuația i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ obținem

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{in}c_n = a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \ldots$$

$$\ldots + a_{in}\frac{D_n}{D} = \frac{1}{D}[a_{i1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}) +$$

$$+ a_{i2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}) + \ldots$$

$$\ldots + a_{in}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn})] =$$

$$= \frac{1}{D}b_1(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \ldots + a_{in}A_{1n}) +$$

$$+ \ldots + b_i(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}) +$$

$$+ \ldots + b_n(a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} + \ldots + a_{in}A_{nn}).$$

Dintre toate parantezele care sînt coeficienți ai lui b_1, $b_2, \ldots b_n$, conform teoremelor 1.51 și 1.52, o singură paranteză

este nenulă, și anume coeficientul lui b_i, care este egal cu D. Așadar, expresia obținută se reduce la

$$\frac{1}{D} \cdot b_i \cdot D = b_i,$$

adică ea coincide tocmai cu membrul drept al ecuației i a sistemului.

1.73. Așadar, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ constituie într-adevăr o soluție a sistemului (17). Cu aceasta, am stabilit următoarea regulă pentru obținerea soluției sistemului (17) *(regula lui Cramer)*:

Dacă determinantul sistemului (17) *este diferit de zero, atunci sistemul* (17) *are o soluție și aceasta este unică: valoarea necunoscutei x_j este egală cu raportul dintre determinantul obținut din D înlocuind coloana j prin coloana termenilor liberi ai sistemului și însuși determinantul D ($j = 1, 2, \ldots, n$).*

Determinarea soluției sistemului (17) revine astfel la calculul unor determinanți.

Vezi problema 11.

Metode pentru rezolvarea unor sisteme mai generale (cu determinantul egal cu zero sau cu numărul ecuațiilor nu neapărat egal cu numărul necunoscutelor) vor fi date în următoarele două capitole.

1.74. *Observație.* Se întîlnesc uneori sisteme de ecuații liniare ai căror termeni liberi nu sînt numere ci vectori (în geometrie analitică, în mecanică). Teorema lui Cramer rămîne adevărată și în acest caz; trebuie avut doar în vedere că valorile necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vor fi de asemenea vectori și nu numere. De exemplu, sistemul

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \bar{i} - 3\bar{j}, \\ x_1 - x_2 &= \bar{i} + 5\bar{j} \end{aligned}\right\}$$

are soluția (unică)

$$\bar{c}_1 = \bar{i} + \bar{j}, \quad \bar{c}_2 = -4\bar{j}.$$

§ 1.8. Minori de ordin oarecare. Teorema lui Laplace

1.81. Teorema 1.51 referitoare la dezvoltarea unui determinant după o linie sau după o coloană este un caz particular al unei teoreme mai generale referitoare la dezvoltarea unui determinant după mai multe linii sau coloane simultan. Înainte de a enunța această teoremă generală (teorema lui Laplace), introducem cîteva definiții noi.

Presupunem că într-o matrice pătratică de ordin n sînt fixate arbitrar k linii distincte și tot atîtea coloane distincte ($k \leqslant n$). Elementele care se află la intersecția acestor linii și coloane formează o matrice pătratică de ordin k; determinantul ei se numește *minor de ordin k* al matricii inițiale de ordin n (el se numește de asemenea minor de ordin k al determinantului D al matricii inițiale) și se notează cu

$$M = M_{j_1, j_2, \ldots, j_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k},$$

unde $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sînt numerele liniilor fixate, iar $j_1, j_2, \ldots, j_k$ sînt numerele coloanelor fixate.

Dacă eliminăm din matricea inițială liniile și coloanele în care se află minorul M, atunci elementele rămase formează de asemenea o matrice pătratică, de ordin $n-k$; determinantul acesteia se numește *minor complementar lui M* și se notează cu simbolul

$$\overline{M} = \overline{M}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k},$$

unde indicii se referă la numărul liniilor și coloanelor extrase.

În particular, dacă minorul inițial are ordinul 1, adică el coincide cu un anumit element a_{ij} al determinantului D, atunci minorul complementar coincide cu minorul M_{ij}, care a fost definit în 1.53.

Considerăm minorul

$$M_1 = M_{1, 2, \ldots, k}^{1, 2, \ldots, k},$$

situat în primele k linii și primele k coloane ale determinantului D; minorul său complementar este minorul

$$M_2 = \overline{M}_1 = \overline{M}_{1, 2, \ldots, k}^{1, 2, \ldots, k}.$$

Separăm în membrul drept al formulei (6) toți acei termeni ai determinantului în care primele k elemente aparțin minorului M_1 (și deci celelalte $n-k$ elemente aparțin minorului $\overline{M}_1$). Fixăm mai întîi unul din acești termeni, notat cu c, pentru

a-i determina semnul afectat. Primele k elemente ale acestui termen determină un termen c_1 al minorului M_1; notăm cu N_1 numărul segmentelor corespunzătoare cu înclinare negativă; atunci semnul care trebuie pus în fața termenului c_1 al minorului M_1 este definit prin expresia $(-1)^{N_1}$. Celelalte $n-k$ elemente ale termenului c determină un anumit termen c_2 al minorului M_2; semnul afectat acestui termen în minorul M_2 este definit prin expresia $(-1)^{N_2}$, unde N_2 este numărul corespunzător de segmente de înclinare negativă în minorul M_2. Deoarece în matricea determinantului D nu există nici un segment cu înclinare negativă care să unească vreun element al minorului M_1 cu orice alt element al minorului M_2, numărul total de segmente de înclinare negativă unind elemente ale termenului c este egal cu $N_1 + N_2$. De aceea semnul care trebuie pus în fața termenului c în determinantul D se exprimă prin $(-1)^{N_1+N_2}$ și este deci egal cu produsul semnelor termenilor c_1, c_2 în minorii M_1, M_2. Observăm apoi că produsul oricărui termen al minorului M_1 cu orice termen al minorului M_2 definește un termen al determinantului D. Rezultă atunci că suma tuturor termenilor de tip c din expresia determinantului D după formula (6) este egală cu produsul minorilor M_1 și M_2.

Căutăm să obținem un rezultat similar pentru orice minor

$$M_1 = M_{j_1, j_2, \ldots, j_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}$$

având ca minor complementar M_2. Permutînd succesiv liniile vecine și coloanele vecine, putem aduce minorul M_1 în colțul din stînga sus al determinantului D; pentru aceasta sînt necesare $(i_1-1) + (i_2-2) + \ldots + (i_k - k) + (j_1-1) + (j_2-2) + \ldots + (j_k-k)$ permutări. Ca rezultat se obține un determinant D_1 cu aceiași termeni ca în determinantul inițial D înmulțit cu $(-1)^{i+j}$ unde $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_k$, $j = j_1 + j_2 + \ldots + j_k$. Din cele demonstrate, în determinantul D_1 suma tuturor termenilor ale căror prime k elemente intră în minorul M_1 este egală cu produsul M_1M_2. De aici rezultă că suma termenilor corespunzători ai determinantului D este egală cu produsul

$$(-1)^{i+j}\ M_1M_2 = M_1A_2,$$

unde mărimea $A_2 = (-1)^{i+j}\ M_2$ se numește *complementul algebric al minorului M_1 în determinantul D*. Uneori se utilizează notația

$$A_2 = \tilde{A}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}.$$

Fixăm acum în determinantul D liniile cu numerele i_1, i_2, ..., i_k. În fiecare termen al determinantului D intră anumite elemente din aceste linii. Dacă grupăm toți termenii pentru care elementele liniilor fixate aparțin coloanelor (de asemenea fixate) cu numerele j_1, j_2, ..., j_k, atunci conform celor arătate, suma tuturor acestor termeni va fi egală cu produsul minorului

$$M_{j_1, j_2, \ldots, j_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}$$

prin complementul algebric corespunzător. Toți termenii determinantului pot fi astfel asociați în grupe determinate prin fixarea cîtor k coloane. Suma termenilor din fiecare grupă este egală cu produsul dintre minorul corespunzător și complementul său algebric. De aceea întreg determinantul se scrie ca o sumă

$$D = \Sigma\,(-1)^{i+j}\ M_{j_1, j_2, \ldots, j_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k} \overline{M}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k}, \qquad (21)$$

unde suma se face pentru indicii fixați i_1, i_2, ..., i_k (indicii liniilor fixate) după toate valorile posibile ale indicilor de coloană j_1, j_2, ..., j_k $(1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n)$. Proprietatea determinantului D exprimată prin relația (21) este numită *teorema lui Laplace*. Evident, formula (21) este o generalizare a formulei de dezvoltare a unui determinant după o singură linie, obținută în 1.54.

O formulă analoagă are loc pentru dezvoltarea unui determinant D după un sistem fixat de coloane.

1.82. *Exemplu.* Un determinant de forma

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1,\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k+1,\,k+1} & \ldots & a_{k+1,\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

în care toate elementele situate în primele k coloane și ultimele $n-k$ linii sînt nule se numește *cvasitriunghiular*. Pentru calculul lui îl dezvoltăm după primele k linii cu ajutorul teoremei lui Laplace. În suma (21) rămîne un singur termen și se obține

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1,\,k+1} & \dots & a_{k+1,\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vezi problema 12.

§ 1.9. Asupra dependenței liniare a coloanelor

1.91. Presupunem date m coloane numerice, fiecare formată din n numere:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{Vmatrix}, \dots, A_m = \begin{Vmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{Vmatrix}.$$

Înmulțim fiecare element al primei coloane cu un număr λ_1, fiecare element al celei de a doua coloane cu un număr λ_2, ..., fiecare element al coloanei A_m cu un număr λ_m și adunăm elementele corespunzătoare ale coloanelor obținute. Se obține astfel o nouă coloană de numere, ale cărei elemente notăm cu c_1, c_2, ..., c_n. Toate aceste operații pot fi reprezentate sugestiv cu ajutorul următoarei scheme:

$$\lambda_1 \begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{Vmatrix} + \dots + \lambda_m \begin{Vmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Vmatrix}$$

sau, mai concis,

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_m A_m = C,$$

unde C desemnează coloana obținută. Această coloană C se numește *combinație liniară a coloanelor considerate* A_1, A_2, ..., A_m; numerele λ_1, λ_2, ..., λ_m se numesc *coeficienții* acestei combinații liniare.

Cazuri particulare de combinații liniare sînt *suma* coloanelor (dacă toți coeficienții λ_1, ..., λ_m sînt egali cu 1) și produsul unei coloane cu un număr (dacă $m = 1$).

Presupunem acum că este dat un determinant D de ordin n și considerăm coloanele acestui determinant ca entități de sine stătătoare. Demonstrăm următoarea teoremă.

TEOREMĂ. *Dacă una din coloanele unui determinant D este combinație liniară de celelalte coloane, atunci $D = 0$.*

Demonstrație. Presupunem că, de exemplu, coloana q a determinantului D este combinație liniară a coloanelor j, k, ..., p ale aceluiași determinant cu coeficienții λ_j, λ_k, ..., λ_p. Atunci scăzînd din coloana q coloana j înmulțită cu λ_k, ..., și, în fine, coloana p înmulțită cu λ_p, atunci conform 1.47 **b** nu se schimbă valoarea determinantului D. Ca rezultat, coloana q va consta numai din zerouri, de unde va rezulta că $D = 0$.

Este remarcabil faptul că are loc și teorema inversă: dacă un determinant este nul, atunci una (cel puțin) din coloane este combinație liniară a celorlalte coloane. Demonstrația acestei teoreme necesită cîteva construcții preliminare, la care trecem acum.

1.92. Fie din nou m coloane numerice, fiecare avînd cîte n numere. Acestea pot fi scrise sub forma unei matrici cu n linii și m coloane:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{Vmatrix}.$$

Dacă fixăm un anumit număr k de coloane ale acestei matrici și același număr k de linii, atunci elementele situate la intersecția liniilor și coloanelor fixate formează o matrice pătratică de ordin k. Determinantul ei se numește *minor de ordin k al matricii A*; el poate fi zero sau diferit de zero.

Dacă numerele a_{ij} nu sînt toate nule (ceea ce vom presupune în continuare), atunci se poate întotdeauna considera un număr natural r avînd proprietăţile următoare:

a) în matricea A există un minor de ordin r diferit de zero;

b) orice minor al matricii A avînd ordin $r+1$ sau mai mare (dacă există astfel de minori) este nul.

Numărul r satisfăcînd proprietăţile a), b) indicate se numeşte *rangul* matricii A. Dacă toate elementele a_{ij} ale lui A sînt nule se consideră că rangul lui A este nul ($r = 0$). În cele ce urmează, presupunem $r > 0$. Orice minor de ordin r al unei matrici A de rang r se numeşte *minor de bază* (sau *minor principal*) al matricii A. (Se înţelege că matricea A poate avea mai mulţi minori de bază, toţi de acelaşi ordin r). Coloanele pe care este construit un minor de bază se numesc *coloane de bază* (sau *coloane principale*).

1.93. Are loc următoarea teoremă principală:

TEOREMĂ *(a minorului principal). Orice coloană a unei matrici A este combinaţie liniară a unor coloane de bază ale ei.*

Demonstraţie. Fără a micşora generalitatea, putem presupune că minorul de bază considerat este construit pe primele r linii şi primele r coloane ale matricii A. Fie s, k numere oarecare astfel încît $1 \leqslant s \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Considerăm determinantul de ordin $r+1$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{ks} \end{vmatrix}.$$

Dacă $k \leqslant r$, atunci determinantul D este evident egal cu zero deoarece are două linii identice. Analog, $D = 0$ pentru $s \leqslant r$. Dacă $k > r$ şi $s > r$, atunci determinantul D este de asemenea egal cu zero ca minor de ordin $r+1$ al unei matrici de rang r. Aşadar, $D = 0$ pentru orice valori ale lui k şi s.

Dezvoltăm determinantul D după ultima linie; obţinem egalitatea

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kr}A_{kr} + a_{ks}A_{ks} = 0, \qquad (22)$$

unde numerele A_{k1}, A_{k2}, ..., A_{kr}, A_{ks} sînt complementii algebrici ai elementelor a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kr}, a_{ks} respectiv, aflate pe ultima linie a determinantului D. Aceşti complementi algebrici nu depind de numărul k deoarece ei se formează cu ajutorul elementelor a_{ij} cu $i \leqslant r$; de aceea vom introduce notaţiile

$$A_{k1} = c_1, \quad A_{k2} = c_2, \dots, A_{kr} = c_r, \quad A_{ks} = c_s.$$

Înlocuind în egalitatea (22) succesiv valorile $k = 1, 2, \dots, n$, se obţin egalităţile

$$\left.\begin{aligned} c_1a_{11} + c_2a_{12} + \dots + c_ra_{1r} + c_sa_{1s} &= 0, \\ c_1a_{21} + c_2a_{22} + \dots + c_ra_{2r} + c_sa_{2s} &= 0, \\ \dots\dots\dots\

TEOREMĂ. *Dacă un determinant D de ordin n este nul, atunci el are o coloană care este combinație liniară a celorlalte coloane.*

Demonstrație. Considerăm matricea determinantului D. Deoarece $D = 0$, orice minor de bază (principal) al acestei matrici are ordinul $r < n$. De aceea după separarea a r coloane de bază, există cel puțin o coloană care nu se află printre coloanele de bază. În virtutea teoremei minorului principal, această coloană este o combinație liniară a coloanelor de bază. Astfel am găsit în determinantul D o coloană care este combinație liniară a celorlalte coloane, ceea ce trebuia demonstrat.

Observăm că în această combinație liniară se pot include toate celelalte coloane ale determinantului D punînd înaintea lor coeficienți nuli.

1.95. Rezultatele obținute pot fi formulate într-o formă ceva mai simetrică.

Dacă coeficienții $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ai combinației liniare a coloanelor numerice $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (1.91) sînt egali cu zero, atunci este evident că se obține o coloană nulă (care constă numai din zerouri). Este posibil însă să se obțină coloana nulă nu numai în acest mod, ci și cu ajutorul unor coeficienți $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ nu toți nuli. În acest ultim caz se spune că $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sînt coloane *liniar dependente.*

De exemplu, coloanele

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{Vmatrix}, \quad A_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

sînt liniar dependente, deoarece coloana nulă este egală cu combinația liniară $2 \cdot A_1 - 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3$, cu coeficienții 2, -1, 0 nu toți nuli.

Definiția dependenței liniare se poate da mai simplu astfel: coloanele

$$A_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{Vmatrix}, \ \ldots, \ A_m = \begin{Vmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{Vmatrix}$$

se numesc *liniar dependente* dacă există numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, nu toate nule, astfel încît să fie verificat sistemul de relații

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \ldots + \lambda_m a_{1m} = 0, \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_m a_{2m} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \ldots + \lambda_m a_{nm} = 0, \end{aligned}\right\}$$

sau, ceea ce este echivalent,

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_m A_m = 0$$

(unde 0 reprezintă aici coloana nulă).

Dacă una din coloanele $A_1, A_2, \ldots, A_m$, de exemplu ultima, *este combinație liniară a celorlalte,*

$$A_m = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_{m-1} A_{m-1}, \tag{25}$$

atunci coloanele $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sînt liniar dependente. Într-adevăr, relația (25) este echivalentă cu relația

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_{m-1} A_{m-1} + (-1) A_m = 0;$$

așadar, există o combinație liniară a coloanelor $A_1, A_2, \ldots, A_m$, ai cărei coeficienți nu sînt toți nuli (ultimul coeficient fiind -1), combinație egală cu coloana nulă; aceasta arată tocmai dependența liniară a coloanelor $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Reciproc, *dacă între coloanele $A_1, A_2, \ldots, A_m$ există dependență liniară, atunci una din ele (cel puțin) este combinație liniară a celorlalte.* Într-adevăr, presupunem că în relația

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_{m-1} A_{m-1} + \lambda_m A_m = 0 \tag{26}$$

care exprimă dependența liniară a coloanelor $A_1, A_2, \ldots, A_m$, coeficientul λ_m (de exemplu) este nenul. Atunci relația (26) este echivalentă cu

$$A_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} A_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} A_2 - \ldots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} A_{m-1},$$

ceea ce arată că A_m este combinație liniară a coloanelor $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$.

Așadar, *coloanele* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *sînt liniar dependente dacă și numai dacă una din ele este combinație liniară a celorlalte rămase.*

1.96. Teoremele 1.91 și 1.94 arată că un determinant D este egal cu zero dacă și numai dacă una din coloanele lui este combinație liniară a celorlalte coloane.

Folosind rezultatul obținut în 1.95 putem enunța următoarea teoremă:

TEOREMĂ. *Un determinant este egal cu zero dacă și numai dacă coloanele lui sînt liniar dependente.*

1.97. Deoarece prin transpunere un determinant nu-și schimbă valoarea (1.41) iar coloanele se înlocuiesc cu linii, atunci în toate enunțurile din prezentul paragraf coloanele se pot înlocui cu linii. În particular, are loc următorul rezultat:

Un determinant este nul dacă și numai dacă liniile sale sînt liniar dependente.

Vezi problemele 13—14.

PROBLEME

1. Cu ce semn apar într-un determinant de ordin 6 termenii:

a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$

b) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$?

2. Să se scrie toți termenii care apar în determinantul de ordin 4 cu semnul — (minus) și conțin a_{23}.

3. Cu ce semn intră în determinantul de ordin n termenul $a_{1n}a_{2n-1}\ldots a_{n1}$?

4. Să se arate că dintre cei $n!$ termeni ai unui determinant de ordin n, la exact jumătate, adică $\frac{n!}{2}$, li se afectează conform definiției § 1.3 semnul + și la cealaltă jumătate, semnul —.

5. Să se calculeze determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{vmatrix}$$

descompunîndu-l convenabil ca sumă de determinanți.

6. Numerele 20 604, 53 227, 25 755, 20 927 și 78 421 se divid prin 17. Să se arate că determinantul

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

se divide de asemenea prin 17.

7. Să se calculeze determinanții

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

8. Să se calculeze determinantul

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - x^2 \end{vmatrix}.$$

9. Să se calculeze determinantul de ordin n

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a & \ldots & a \\ a & x & a & \ldots & a \\ a & a & x & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots & x \end{vmatrix}.$$

10. Să se calculeze *determinantul Vandermonde*

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

11. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13,$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10,$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11,$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6,$$
$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3.$$

12. Să se enunțe și să se demonstreze teorema care se află în același raport logic cu teorema lui Laplace, sub care se află teorema 1.52 în raport cu teorema 1.51.

13. Să se construiască patru coloane, fiecare de cîte patru numere care să nu fie liniar dependente.

14. Să se arate că dacă liniile unui determinant de ordin n sînt liniar dependente, atunci coloanele acelui determinant sînt și ele liniar dependente.

Capitolul 2

SPAȚII LINIARE

§ 2.1. Definiții

2.11. În geometria analitică și în mecanică se utilizează segmentele orientate, vectorii. Pentru vectori sînt stabilite prin definiție reguli de operare: se știe ce înseamnă suma a doi vectori și ce înseamnă produsul unui vector cu un număr real, cu regulile aritmetice uzuale de calcul (Nu ne ocupăm încă de alte operații cu vectori, de exemplu produs scalar și produs vectorial. Aceste produse nu pot juca rolul pe care îl joacă produsul uzual în corpul numerelor reale; produsul scalar a doi vectori nu mai este un vector, iar produsul vectorial a doi vectori, deși este ca rezultat un vector, nu este comutativ).

Definiția unui spațiu liniar generalizează definiția mulțimii tuturor vectorilor. Generalizarea se produce în primul rînd pe calea îndepărtării de natura concretă a obiectelor (segmente orientate) cu păstrarea proprietăților operațiilor asupra acelor obiecte și în al doilea rînd, pe calea îndepărtării de natura concretă a multiplicatorilor admiși (numere reale). Se obține astfel următoarea definiție:

O mulțime $\mathfrak{X}$ se numește *spațiu liniar* (afin) peste un corp K dacă:

a) există o regulă (numită *regula adunării*) prin care oricărei perechi de elemente x, y din $\mathfrak{X}$ îi corespunde un al treilea element $z \in \mathfrak{X}$, numit *suma* elementelor x, y și notat $x + y$.

b) există o regulă (numită *regula multiplicării cu un număr*) care permite ca pentru orice element $x \in \mathfrak{X}$ și pentru orice număr $\lambda \in K$ să se poată construi un element $u \in \mathfrak{X}$ (numit *produsul elementului* x *cu numărul* λ și notat λx).

c) regulile a) și b) satisfac axiomele enumerate mai jos în 2.12—2.13.

Elementele unui spațiu liniar vor fi numite *vectori*, omițînd sensul concret (segment orientat) dat acestui termen. Reprezentările geometrice legate de denumirea de „vector" ne ajută în clarificarea, uneori în previziunea, unor rezultate și de asemenea în găsirea sensului geometric al unor fapte de algebră sau analiză. În particular, în capitolul următor vom obține o caracterizare geometrică simplă pentru mulțimile de soluții ale sistemelor omogene sau neomogene de ecuații liniare.

2.12. Se presupune că regula de adunare are următoarele proprietăți:

1) $x + y = y + x$ pentru orice x, y din $\mathfrak{K}$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ pentru orice x, y, z din $\mathfrak{K}$;

3) există un element 0 *(vectorul nul)* în $\mathfrak{K}$ astfel încît $x + 0 = x$ pentru orice $x \in \mathfrak{K}$;

4) pentru orice $x \in \mathfrak{K}$ există un element $y \in \mathfrak{K}$ astfel încît $x + y = 0$ (există *vectorul opus*).

2.13. Se presupune că regula de multiplicare cu un număr are următoarele proprietăți:

5) $1 \cdot x = x$ pentru orice $x \in \mathfrak{K}$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x$ pentru orice $x \in \mathfrak{K}$ și pentru orice α, β din K;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ pentru orice $x \in \mathfrak{K}$ și oricare ar fi α, β din K;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ pentru orice x, y din $\mathfrak{K}$ și oricare ar fi $\alpha \in K$.

2.14. Din axiomele 1) —8) se pot obține în primul rînd următoarele teoreme:

a. TEOREMĂ. *În orice spațiu liniar există un unic vector nul.*

Demonstrație. Existența cel puțin a unui vector nul este afirmată în axioma 3). Admitem că în spațiul $\mathfrak{K}$ ar exista doi vectori nuli: 0_1 și 0_2. Punînd în axioma 3) $x = 0_1$, $0 = 0_2$, obținem $0_1 + 0_2 = 0_1$. Punînd în aceeași axiomă $x = 0_2$, $0 = 0_1$, obținem $0_2 + 0_1 = 0_1$. Comparînd egalitățile obținute și folosind axioma 1), rezultă că $0_1 = 0_2$, ceea ce trebuia demonstrat.

b. TEOREMĂ. *În orice spațiu liniar pentru orice element există un singur element opus.*

Demonstrație. Existența cel puțin a unui element opus este afirmată în axioma 4). Admitem că pentru un element x fixat ar exista două elemente opuse y_1 și y_2. Adunăm la ambii membri ai egalității $x + y_1 = 0$ elementul y_2; utilizînd axiomele 2) și 3), obținem

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = 0 + y_1 = y_1,$$

$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + 0 = y_2,$$

de unde $y_1 = y_2$, ceea ce trebuia arătat.

c. TEOREMĂ. *Pentru orice element x dintr-un spațiu liniar oarecare are loc egalitatea* $0 \cdot x = 0$ (în membrul drept 0 reprezintă vectorul nul iar în membrul stîng 0 reprezintă numărul 0).

Demonstrație. Considerăm elementul $0 \cdot x + 1 \cdot x$; folosind axiomele 7) și 5) rezultă

$$0 \cdot x + 1 \cdot x = (0 + 1)x = 1 \cdot x = x, \quad 0 \cdot x + 1 \cdot x = 0 \cdot x + x,$$

de unde

$$x = 0 \cdot x + x;$$

adăugînd la ambii membri ai ultimei egalități opusul y al lui x rezultă că

$$0 = x + y = (0 \cdot x + x) + y = 0 \cdot x + (x + y) = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x,$$

de unde

$$0 = 0 \cdot x.$$

d. TEOREMĂ. *Pentru orice element x dintr-un spațiu liniar oarecare elementul său opus este* $y = (-1) \cdot x$.

Demonstrație. Formăm suma $x + y$; folosind axiomele și teorema **c**, rezultă

$$x + y = 1 \cdot x + (-1)\, x = (1 - 1)\, x = 0 \cdot x = 0,$$

ceea ce trebuia arătat.

e. Vom desemna în cele ce urmează elementul opus lui x prin $-x$; teorema de la punctul **d** conduce evident la această notație.

Prezența elementului opus permite introducerea operației de scădere a vectorilor. Anume, *diferența* $x-y$ se definește ca suma lui x cu $-y$. Această definiție este compatibilă cu definiția scăderii din aritmetică.

2.15. Un spațiu liniar peste corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale se numește *real* și îl vom nota prin $\mathfrak{R}$. Un spațiu liniar peste corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe se numește *complex* și îl vom nota prin $\mathfrak{C}$. Dacă sînt indicate atît natura elementelor $x, y, z, \ldots$ cît și regulile de operare cu ele (fiind îndeplinite axiomele 1) — 8)), vom numi acel spațiu liniar *concret*, și, de regulă, vom folosi pentru el o anumită notație.

În cele ce urmează, vor fi deosebit de importante următoarele trei tipuri de spații concrete:

a. *Spațiul* $\mathfrak{V}_3$. Elementele acestui spațiu sînt vectorii liberi din spațiu, considerați în geometria analitică. Fiecare vector se caracterizează prin lungime, direcție și sens (cu excepția vectorului nul a cărui lungime este nulă și direcția arbitrară). Adunarea vectorilor este definită ca de obicei prin regula paralelogramului. Multiplicarea unui vector printr-un număr real λ este definită de asemenea în mod uzual (anume, lungimea vectorului se înmulțește cu $|\lambda|$, direcția neschimbată, iar sensul rămîne neschimbat pentru $\lambda > 0$ și se înlocuiește cu cel opus pentru $\lambda < 0$). Se arată ușor că în acest caz toate axiomele 1) —8) sînt îndeplinite. Mulțimile similare de vectori în plan sau pe o dreaptă formează în mod natural spații liniare pe care le notăm respectiv prin $\mathfrak{V}_2$ și $\mathfrak{V}_1$; $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$ sînt spații liniare peste corpul $\mathbb{R}$, deci spații liniare reale.

b. *Spațiul* K_n. Elementele acestui spațiu sînt sistemele ordonate de n numere din corpul K, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Aceste numere $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ se numesc *coordonatele* elementului x. Operațiile de adunare și multiplicare cu un număr $\lambda \in K$ se efectuează după următoarele reguli:

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n), \tag{1}$$

$$\lambda(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n). \tag{2}$$

Se arată ușor că axiomele 1) — 8) sînt satisfăcute. În particular, elementul 0 din K_n este un sistem de n zerouri: $0 = (0, 0, \ldots, 0)$. De fapt în § 1.9 am lucrat deja cu elementele

spațiului K_n, doar că atunci le-am scris nu sub forma unei linii de numere, ci sub forma unei coloane. Dacă K este corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale, notația K_n se înlocuiește prin $\mathfrak{R}_n$, iar dacă K este corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe, notația K_n se înlocuiește prin $\mathfrak{C}_n$.

c. *Spațiul* $\mathfrak{R}(a, b)$. Element al acestui spațiu este orice funcție continuă reală $x = x(t)$ definită pe segmentul $a \leqslant t \leqslant b$. Operațiile de adunare a funcțiilor și de înmulțire cu numere reale se definesc după regulile analizei; îndeplinirea axiomelor 1) — 8) este evidentă. Elementul 0 este funcția identic nulă. Spațiul $\mathfrak{R}(a, b)$ este spațiu liniar peste corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale.

d. *Spațiul* $\mathfrak{C}(a, b)$ este spațiul funcțiilor continue pe segmentul $a \leqslant t \leqslant b$ cu valori complexe. Acest spațiu este spațiu liniar peste corpul numerelor complexe.

2.16. Observăm că toate proprietățile elementelor spațiilor concrete (de exemplu, vectorii spațiului $\mathfrak{V}_3$), bazate numai pe axiomele 1) — 8), sînt adevărate și pentru elementele oricăror spații liniare. De exemplu, analizînd demonstrația teoremei lui Cramer relativ la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}\right\}$$

se poate observa că elementele $b_1, b_2, \ldots, b_n$ au intervenit prin faptul că ele pot fi adunate și înmulțite cu numere din K, folosind regulile 1) — 8). Aceasta a permis extinderea teoremei lui Cramer la sisteme în care mărimile $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt vectori (elemente din spațiul $\mathfrak{V}_3$), așa cum am indicat în 1.74. Aceasta ne permite să afirmăm mai mult, anume că teorema lui Cramer are loc și pentru sisteme în care $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt elemente ale unui spațiu liniar oarecare $\mathfrak{X}$. Observăm doar că valorile necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vor fi de asemenea elemente ale acestui spațiu $\mathfrak{X}$ care se exprimă liniar prin mărimile $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Vezi problemele 1—3.

2.17. *Observație.* În geometria analitică este comod uneori de considerat, alături de vectori liberi, vectori cu capătul fixat în originea coordonatelor. În acest mod, fiecărui vector i se asociază un anumit punct al spațiului — extremitatea sa și fiecare punct al spațiului definește un vector corespunzător — așa-numitul *vector de poziție* al acelui punct. Avînd în vedere această situație, vom numi uneori elementele unui spațiu liniar, nu vectori, ci puncte. Se subînțelege că o astfel de modificare de terminologie nu aduce modificări în definiții și apelează doar la reprezentările noastre geometrice.

§ 2.2. Dependența liniară

2.21. Fie $x_1, x_2, ..., x_k$ vectori într-un spațiu liniar $\mathcal{H}$ peste un corp K și $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ numere din corpul K. Vectorul

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k$$

se numește *combinație liniară a vectorilor* $x_1, x_2, ..., x_k$; numerele $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ se numesc *coeficienții* acestei combinații liniare.

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$, atunci, în virtutea teoremei 2.14 c, rezultă că $y = 0$. Dar se poate întîmpla să existe o combinație liniară a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$ în care nu toți coeficienții sînt nuli și care dă ca rezultat vectorul nul; în acest caz, vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ se numesc *liniar dependenți*.

Cu alte cuvinte, vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ se numesc *liniar dependenți* dacă există numere $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, nu toate nule, astfel încît

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k = 0. \qquad (3)$$

Dacă egalitatea (3) este posibilă doar în cazul cînd $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$, atunci vectorii $x_1, x_2, ..., x_k$ se numesc *liniar independenți*.

2.22. *Exemple*

a. În spațiul liniar $\mathcal{V}_3$ dependența liniară a doi vectori înseamnă că ei sînt paraleli cu una și aceeași dreaptă; dependența liniară a trei vectori revine la aceea că ei sînt paraleli cu unul și același plan. Orice patru vector sînt liniar dependenți.

b. Clarificăm acum ce înseamnă dependența liniară a unor vectori $x_1, x_2, ..., x_k$ din spațiul liniar K_n. Presupunem că $x_i = (\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, ..., \xi_n^{(i)})$, $i = 1, 2, ..., k$. Atunci relația

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k = 0$$

înseamnă că au loc n relații

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1\xi_1^{(1)} + \alpha_2\xi_1^{(2)} + ... + \alpha_k\xi_1^{(k)} = 0,\\ &\alpha_1\xi_2^{(1)} + \alpha_2\xi_2^{(2)} + ... + \alpha_k\xi_2^{(k)} = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\alpha_1\xi_n^{(1)} + \alpha_2\xi_n^{(2)} + ... + \alpha_k\xi_n^{(k)} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

dependența liniară a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$ revine la existența unor constante $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ nu toate nule astfel încît să fie verificate relațiile (4); aceasta este tocmai definiția dependenței liniare pe care am dat-o în 1.95 pentru coloane numerice.

Astfel, problema dependenței liniare a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$ în cazul general revine la problema existenței unei soluții nenule pentru un sistem omogen de ecuații liniare în care coeficienții sînt tocmai coordonatele corespunzătoare ale vectorilor considerați. În capitolul următor această chestiune va fi complet rezolvată (3.21) și în același timp, se va obține o regulă care va permite testarea dependenței sau independenței liniare a unor vectori din spațiul K_n, după coordonatele lor.

c. În anumite cazuri putem de pe acum face unele considerații relativ la dependența și independența unui sistem dat de vectori. De exemplu, să considerăm în spațiul K_n următorii n vectori

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0),\ ...,\ e_n = (0, 0, ..., 0, 1).$$

Sistemul (4) pentru acești vectori capătă forma

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1\cdot 1 + \alpha_2\cdot 0 + \alpha_3\cdot 0 + ... + \alpha_n\cdot 0 = 0,\\ &\alpha_1\cdot 0 + \alpha_2\cdot 1 + \alpha_3\cdot 0 + ... + \alpha_n\cdot 0 = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\alpha_1\cdot 0 + \alpha_2\cdot 0 + \alpha_3\cdot 0 + ... + \alpha_n\cdot 1 = 0, \end{aligned}\right\}$$

și acesta are o soluție unică, și anume $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Astfel vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$ din spațiul K_n sînt liniar independenți.

Vezi problema 4.

d. Dependența liniară a vectorilor $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_k = x_k(t)$ din spațiul $\mathcal{R}(a, b)$ (sau $\mathcal{C}(a, b)$) revine la existența unei relații de forma

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \ldots + \alpha_k x_k(t) = 0,$$

unde constantele reale (complexe) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ nu sînt toate nule. De exemplu, funcțiile $x_1(t) = \cos^2 t$, $x_2(t) = \sin^2 t$, $x_3(t) = 1$ sînt liniar dependente deoarece are loc relația

$$x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) = 0, \quad \forall t \in (a, b).$$

Arătăm că funcțiile $1, t, t^2, \ldots, t^k$ sînt liniar independente. Presupunem că există o relație

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot t + \ldots + \alpha_k t^k = 0. \tag{5}$$

Atunci derivînd succesiv de k ori egalitatea (5) se obține un sistem de $k+1$ ecuații relativ la mărimile $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, cu determinantul diferit de zero (1.55 b); rezolvînd acest sistem cu regula lui Cramer (1.73) se obține $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Așadar, funcțiile $1, t, t^2, \ldots, t^k$ sînt liniar independente în spațiul $\mathcal{R}(a, b)$, așa cum s-a afirmat.

Vezi problema 5.

2.23. Notăm două proprietăți simple ale sistemelor de vectori, legate de dependența liniară.

a. LEMĂ. *Dacă o parte din vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt liniar dependenți, atunci întreg sistemul $x_1, x_2, \ldots, x_k$ este liniar dependent.*

Demonstrație. Fără micșorarea generalității se poate presupune că vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_j (j < k)$ sînt liniar dependenți; așadar, are loc o relație de forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_j x_j = 0,$$

unde nu toate constantele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$ sînt nule. Conform teoremei 2.14 c și axiomei 2.12 3) are loc egalitatea

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_j x_j + 0 \cdot x_{j+1} + \ldots + 0 \cdot x_k = 0,$$

ceea ce arată că vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k$ sînt de asemenea liniar dependenți, deoarece printre constantele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, 0, \ldots, 0$, există cel puțin una nenulă.

b. LEMĂ. *Vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt liniar dependenți dacă și numai dacă unul din ei este combinație liniară a celorlalți.*

O afirmație similară acesteia a fost enunțată și demonstrată în 1.95 pentru coloane de numere. Dacă vom relua acea demonstrație, vom vedea că ea se bazează pe posibilitatea de a efectua cu coloanele operații de adunare și multiplicare cu numere. Așadar, această demonstrație se poate face și pentru elementele unui spațiu liniar oarecare. Rezultă deci că lema este adevărată pentru orice spațiu liniar.

§ 2.3. Bază, coordonate, dimensiune

2.31. Un sistem de vectori liniar independenți $e_1, e_2, \ldots, e_n$ dintr-un spațiu liniar $\mathcal{X}$ formează prin definiție o *bază* a spațiului $\mathcal{X}$ dacă pentru orice $x \in \mathcal{X}$ există o reprezentare de forma

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n (\xi_j \in K, \; j = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Se vede ușor că în condițiile indicate *coeficienții dezvoltării* (6) *sînt unic determinați*. Într-adevăr, dacă un vector x admite două dezvoltări de forma (6)

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,$$

$$x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n,$$

atunci scăzînd aceste relații termen cu termen, se obține egalitatea

$$0 = (\xi_1 - \eta_1) e_1 + (\xi_2 - \eta_2) e_2 + \ldots + (\xi_n - \eta_n) e_n.$$

Conform ipotezei de independență liniară a vectorilor $e_1, e_2, \ldots, e_n$ se obține atunci

$$\xi_1 = \eta_1, \; \xi_2 = \eta_2, \ldots, \xi_n = \eta_n.$$

Aceste numere unic determinate $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ se numesc *coordonatele vectorului x relativ la baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$*.

2.32. *Exemple*

a. În spațiul $\mathcal{V}_3$ o bază este constituită de versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ai unui triedru ortogonal de axe. Coordonatele ξ_1, ξ_2, ξ_3 ale unui vector x relativ la această bază sînt proiecțiile vectorului x pe axele triedrului.

b. În spațiul K_n un exemplu de bază îl constituie sistemul de vectori $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$, pe care l-am considerat în 2.22 c. Într-adevăr, pentru orice vector $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in K_n$ este evidentă egalitatea

$$x = \xi_1(1, 0, ..., 0) + \xi_2(0, 1, ..., 0) + ... + \xi_n(0, 0, ..., 1),$$

care demonstrează, împreună cu liniar independența vectorilor $e_1, e_2, ..., e_n$ (deja dovedită), că acești vectori formează o bază în spațiul K_n.

În particular, numerele $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sînt coordonatele lui x relativ la baza $e_1, e_2, ..., e_n$.

c. În spațiul $\mathcal{R}(a, b)$ nu există o bază în sensul definit de noi mai sus; demonstrația acestui fapt va fi dată în 2.36 c.

2.33. Importanța considerării unei baze într-un spațiu liniar constă în aceea că anumite operații liniare din acel spațiu definite la început abstract, devin operații liniare uzuale cu numere (cu coordonatele vectorilor considerați relativ la acea bază). Anume are loc următoarea teoremă:

TEOREMĂ. *Pentru adunarea a doi vectori din spațiul $\mathcal{R}$ coordonatele lor (relativ la o bază oarecare fixată) se adună. La înmulțirea unui vector cu un număr toate coordonatele vectorului se înmulțesc cu acel număr.*

Într-adevăr, fie

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n.$$

Atunci folosind axiomele 2.12—2.13 rezultă

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1) e_1 + (\xi_2 + \eta_2) e_2 + ... + (\xi_n + \eta_n) e_n,$$

$$\lambda x = \lambda\xi_1 e_1 + \lambda\xi_2 e_2 + ... + \lambda\xi_n e_n,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Vezi problemele 6—7.

2.34. Dacă într-un spațiu liniar $\mathcal{R}$ se pot găsi n vectori liniar independenți și orice $n+1$ vectori ai acestui spațiu sînt liniar dependenți, atunci numărul n se numește *dimensiunea* spațiului $\mathcal{R}$; spațiul $\mathcal{R}$ însuși se numește atunci *n-dimensional*.

În cele ce urmează, pentru un spațiu n-dimensional peste un corp K vom utiliza notația $\mathcal{R}_n$ ($\mathcal{R}_n$ peste corpul $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_n$ peste corpul $\mathbb{C}$). Un spațiu liniar în care se pot indica oricît de mulți vectori liniar independenți se numește *infinit-dimensional*.

TEOREMĂ. *Într-un spațiu liniar $\mathcal{R}$ de dimensiune n există o bază formată din n vectori; mai mult, orice sistem de n vectori liniar independenți din $\mathcal{R}$ constituie o bază a acestui spațiu.*

Demonstrație. Fie $e_1, e_2, ..., e_n$ un sistem de n vectori liniar independenți din spațiul n-dimensional $\mathcal{R}$. Dacă x este un vector oarecare din $\mathcal{R}$ atunci sistemul de $n+1$ vectori $x, e_1, e_2, ..., e_n$ este liniar dependent și prin urmare există o relație de forma

$$\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = 0 \qquad (7)$$

unde coeficienții $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ nu sînt toți nuli. Coeficientul α_0 este diferit de zero, deoarece în caz contrar ar exista o dependență liniară între vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$. Așadar $\alpha_0 \neq 0$ și împărțind relația (7) cu α_0, rezultă că x se exprimă liniar cu ajutorul vectorilor $e_1, e_2, ..., e_n$. Deoarece x este un vector oarecare al spațiului $\mathcal{R}$, am arătat că vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$ formează o bază în acest spațiu.

2.35. Teorema următoare este reciproca teoremei 2.34.

TEOREMĂ. *Dacă în spațiul $\mathcal{R}$ există o bază, atunci dimensiunea spațiului este egală cu numărul vectorilor din bază.*

Demonstrație. Presupunem că vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$ formează o bază a spațiului $\mathcal{R}$. Conform definiției unei baze, vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$ sînt liniar independenți în $\mathcal{R}$ și deci avem n vectori liniar independenți în $\mathcal{R}$.

Arătăm că orice $n+1$ vectori din $\mathcal{R}$ sînt liniar dependenți. Fie $n+1$ vectori din $\mathcal{R}$

$$x_1 = \xi_1^{(1)} e_1 + \xi_2^{(1)} e_2 + ... + \xi_n^{(1)} e_n,$$

$$x_2 = \xi_1^{(2)} e_1 + \xi_2^{(2)} e_2 + ... + \xi_n^{(2)} e_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n+1} = \xi_1^{(n+1)} e_1 + \xi_2^{(n+1)} e_2 + ... + \xi_n^{(n+1)} e_n.$$

Scriind pe cîte o coloană coordonatele fiecăruia din acești vectori, se formează o matrice cu n linii și $n+1$ coloane

$$A = \left\| \begin{matrix} \xi_1^{(1)}\xi_1^{(2)} \dots \xi_1^{(n+1)} \\ \xi_2^{(1)}\xi_2^{(2)} \dots \xi_2^{(n+1)} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \xi_n^{(1)}\xi_n^{(2)} \dots \xi_n^{(n+1)} \end{matrix} \right\|.$$

Fie r rangul matricii A ($r \leqslant n$) și fixăm un minor principal al lui A. Dacă $r = 0$ dependența liniară a vectorilor x_1, x_2, ..., x_{n+1} este evidentă. Presupunem $r > 0$ și fixăm r coloane de bază (principale). În matricea A există cel puțin încă o coloană care nu intră printre coloanele de bază. Conform teoremei minorului principal (1.93), această coloană este combinație liniară a coloanelor de bază (principale). Vectorul corespunzător din $\mathcal{H}$ este deci combinație liniară a celorlalți vectori (dintre cei dați x_1, x_2, ..., x_{n+1}). Dar în acest caz vectorii x_1, x_2, ..., x_{n+1} sînt conform 2.23 **b**), liniar dependenți, ceea ce trebuia demonstrat.

2.36. *Exemple*

a. Spațiul $\mathcal{V}_3$ este tridimensional deoarece el are o bază din trei vectori $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (2.32 **a**); în mod corespunzător $\mathcal{V}_2$ este bidimensional și $\mathcal{V}_1$ unidimensional.

b. Spațiul K_n este n-dimensional deoarece el are o bază din n vectori, anume e_1, e_2, ..., e_n (2.32 **b**).

c. În spațiile $\mathcal{R}(a, b)$ și $\mathcal{C}(a, b)$ există un număr oricît de mare de vectori liniar independenți (2.22 **d**) și prin urmare aceste spații sînt infinit-dimensionale. De aceea ele nu admit bază finită; prezența unei baze ar infirma teorema 2.35.

d. Orice spațiu liniar complex $\mathcal{C}$ este în mod evident spațiu real, deoarece domeniul numerelor complexe include domeniul numerelor reale. Totuși dimensiunea spațiului $\mathcal{C}$ ca spațiu complex nu coincide cu dimensiunea aceluiași $\mathcal{C}$ ca spațiu real: dacă vectorii e_1, ie_1, ..., e_n sînt liniar independenți în $\mathcal{C}$ ca spațiu complex, atunci vectorii e_1, e_2, ..., e_n, ie_n sînt liniar independenți în $\mathcal{C}$ ca spațiu real și dimensiunea lui $\mathcal{C}$ ca spațiu real (dacă este finită) va fi de două ori mai mare decît dimensiunea lui $\mathcal{C}$ ca spațiu complex.

Vezi problema 8.

§ 2.4. Subspații

2.41. Admitem că o colecție $\mathfrak{L}$ de elemente ale unui spațiu liniar $\mathcal{H}$ are următoarele proprietăți:

a) dacă $x \in \mathfrak{L}$, $y \in \mathfrak{L}$, atunci $x + y \in \mathfrak{L}$;

b) dacă $x \in \mathfrak{L}$ și λ este element al corpului K, atunci $\lambda x \in \mathfrak{L}$.

Astfel în mulțimea $\mathfrak{L}$ sînt definite operații liniare. Arătăm că se obține chiar un spațiu liniar. Pentru aceasta trebuie să dovedim că mulțimea $\mathfrak{L}$ înzestrată cu operațiile a) — b) verifică axiomele 2.12 — 2.13. Axiomele 1), 2), 5) —8) se verifică deoarece ele au loc, mai general, pentru toate elementele spațiului $\mathcal{H}$. Rămîne să arătăm că sînt îndeplinite axiomele 3) și 4). Fie x un element oarecare din $\mathfrak{L}$; atunci $\lambda x \in \mathfrak{L}$ pentru orice λ real. Alegem $\lambda = 0$; atunci, conform teoremei 2.14 **c**, $0 \cdot x = 0$, deci vectorul nul aparține lui $\mathfrak{L}$ și astfel în $\mathfrak{L}$ este îndeplinită axioma 3). Alegem acum $\lambda = -1$; deoarece conform teoremei 2.14 **d**, $(-1)x$ este elementul opus lui x, mulțimea $\mathfrak{L}$ conține odată cu un element x și opusul acestuia. Astfel axioma 4) este și ea îndeplinită, afirmația noastră fiind complet demonstrată. Așadar, orice submulțime $\mathfrak{L} \in \mathcal{H}$ care verifică condițiile a) și b) este un spațiu liniar, care se numește *subspațiu liniar* (sau simplu *subspațiu*) al spațiului $\mathcal{H}$.

2.42. *Exemple*

a. Vectorul nul al spațiului $\mathcal{H}$ formează evident cel mai mic subspațiu posibil al spațiului $\mathcal{H}$.

b. Întreg spațiul $\mathcal{H}$ este cel mai mare subspațiu posibil al spațiului $\mathcal{H}$.

Aceste două subspații — vectorul nul și întreg spațiul — se numesc uneori *subspații triviale*, iar celelalte subspații se numesc *proprii* (sau *netriviale*).

c. Fie $\mathfrak{L}_1$ și $\mathfrak{L}_2$ două subspații ale unui același spațiu liniar $\mathcal{H}$. Mulțimea tuturor vectorilor $x \in \mathcal{H}$ care aparțin atît lui $\mathfrak{L}_1$ cît și lui $\mathfrak{L}_2$ formează un subspațiu numit *intersecția* subspațiilor $\mathfrak{L}_1$ și $\mathfrak{L}_2$. Mulțimea tuturor vectorilor de forma $y + z$ unde $y \in \mathfrak{L}_1$, $z \in \mathfrak{L}_2$ formează un subspațiu numit *suma* subspațiilor $\mathfrak{L}_1$ și $\mathfrak{L}_2$.

d. În spațiul $\mathcal{V}_3$ toți vectorii paraleli cu un plan fixat formează un subspațiu; același lucru are loc pentru vectori paraleli cu o dreaptă fixată. Dacă este vorba nu de vectori ci de puncte (2.17), atunci subspațiile spațiului $\mathcal{V}_3$ sînt mul-

ţimile de puncte situate pe plane sau drepte trecînd prin originea coordonatelor.

e. În spaţiul K_n considerăm mulţimea L a tuturor vectorilor $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ ale căror coordonate satisfac sistemul de ecuaţii liniare

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

cu coeficienţi din corpul K şi cu termenii liberi egali cu 0. Un astfel de sistem se numeşte sistem liniar *omogen*. Un sistem liniar omogen este totdeauna compatibil, deoarece are în mod evident soluţia „nulă" $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Fie $(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, ..., c_n^{(1)})$ şi $(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, ..., c_n^{(2)})$ două soluţii ale sistemului (8); considerăm numerele

$$c_1 = c_1^{(1)} + c_1^{(2)}, \quad c_2 = c_2^{(1)} + c_2^{(2)}, \quad ..., \quad c_n = c_n^{(1)} + c_n^{(2)}.$$

Afirmăm că $(c_1, c_2, ..., c_n)$ *este de asemenea soluţie* a sistemului (8). Într-adevăr, înlocuind aceste numere în ecuaţia i-a a sistemului, se obţine

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + ... + a_{in}c_n = a_{i1}(c_1^{(1)} + c_1^{(2)}) + a_{i2}(c_2^{(1)} +$$

$$+ c_2^{(2)}) + ... + a_{in}(c_n^{(1)} + c_n^{(2)}) = (a_{i1}c_1^{(1)} + a_{i2}c_2^{(1)} +$$

$$+ ... + a_{in}c_n^{(1)}) + (a_{i1}c_1^{(2)} + a_{i2}c_2^{(2)} + ... + a_{in}c_n^{(2)}) = 0,$$

ceea ce trebuia arătat.

Această soluţie este numită *suma* soluţiilor $(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, ..., c_n^{(1)})$ şi $(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, ..., c_n^{(2)})$. În mod analog, dacă $(c_1, c_2, ..., c_n)$ este o soluţie oarecare a sistemului (8), atunci $(\lambda c_1, \lambda c_2, ..., \lambda c_n)$, pentru orice $\lambda \in K$ fixat, este de asemenea soluţie a sistemului (8); această soluţie va fi numită *produsul soluţiei* $(c_1, c_2, ..., c_n)$ *cu numărul* λ.

Astfel, *soluţiile unui sistem liniar omogen cu coeficienţi într-un corp* K *pot fi adunate între ele şi pot fi înmulţite cu numere din acelaşi corp* K.

Cu aceasta am probat că mulţimea L este un subspaţiu al spaţiului K_n şi deci un spaţiu liniar. El se numeşte *spaţiul soluţiilor sistemului* (8). În 3.14 vom calcula dimensiunea acestui spaţiu şi vom construi o bază a sa.

Vezi problema 9.

2.43. Notăm cîteva proprietăţi ale subspaţiilor, legate de definiţiile din paragrafele 2.2 — 2.3.

Mai întîi, orice relaţie liniară care leagă vectori $x, y, ..., z$ dintr-un subspaţiu $\mathfrak{L}$ este adevărată şi pentru întreg spaţiul $\mathfrak{K}$ şi reciproc; în particular, dependenţa liniară a vectorilor $x, y, ..., z \in \mathfrak{L}$ are loc simultan în spaţiul $\mathfrak{L}$ şi în spaţiul $\mathfrak{K}$. Dacă de exemplu în spaţiul $\mathfrak{K}$ orice $n+1$ vectori sînt liniar dependenţi, atunci această afirmaţie va fi cu atît mai mult adevărată în subspaţiul $\mathfrak{L}$. De aici rezultă că *dimensiunea oricărui subspaţiu* $\mathfrak{L}$ *al unui spaţiu* n*-dimensional* $\mathfrak{K}$ *nu depăşeşte numărul* n. În acest caz, conform teoremei 2.34, *în fiecare subspaţiu* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$ *se poate construi o bază formată din atîţia vectori din* $\mathfrak{L}$ *cît dimensiunea subspaţiului* $\mathfrak{L}$.

Dacă în spaţiul $\mathfrak{K}$ este fixată o bază $e_1, e_2, ..., e_n$, atunci este evident în general că nu se poate obţine o bază a subspaţiului $\mathfrak{L}$ alegînd direct o parte din vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$, pentru că se poate întîmpla ca nici unul din aceşti vectori să nu aparţină lui $\mathfrak{L}$. Însă vom arăta că *dacă este fixată o bază* $f_1, f_2, ..., f_l$ *într-un subspaţiu* $\mathfrak{L}$ *(avînd dimensiunea* $l < n$*), atunci întotdeauna se pot găsi vectori* $f_{l+1}, ..., f_n$ *în* $\mathfrak{K}$ *astfel încît sistemul* $f_1, f_2, ..., f_l, ..., f_n$ *să constituie o bază a lui* $\mathfrak{K}$.

Pentru demonstraţie vom raţiona astfel. În spaţiul $\mathfrak{K}$ există vectori care nu se exprimă liniar prin $f_1, f_2, ..., f_l$ (care nu sînt combinaţii liniare ale acestor vectori); într-adevăr, dacă astfel de vectori nu ar exista, atunci vectorii $f_1, f_2, ..., f_l$ (presupuşi liniar independenţi) ar constitui o bază pentru spaţiul $\mathfrak{K}$ şi conform teoremei 2.35 dimensiunea lui $\mathfrak{K}$ ar fi egală cu l şi nu cu n. Notăm prin f_{l+1} un vector oarecare care nu se exprimă liniar prin $f_1, f_2, ..., f_l$. Sistemul $f_1, f_2, ..., f_l, f_{l+1}$ este liniar independent; într-adevăr dacă ar exista o relaţie de forma

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_l f_l + \alpha_{l+1} f_{l+1} = 0,$$

atunci în cazul cînd $\alpha_{l+1} \neq 0$ ar rezulta că f_{l+1} se exprimă liniar prin $f_1, f_2, ..., f_l$, iar în cazul cînd $\alpha_{l+1} = 0$ ar rezulta că vectorii $f_1, f_2, ..., f_l$ sînt liniar dependenţi şi ambele cazuri conduc la o contradicţie. Aşadar, sistemul $f_1, f_2, ..., f_l, f_{l+1}$ este liniar independent. Mai departe, dacă orice vector din $\mathfrak{K}$ se exprimă liniar prin $f_1, f_2, ..., f_{l+1}$ atunci sistemul $f_1, f_2, ..., f_l, f_{l+1}$ formează o bază în $\mathfrak{K}$ şi în acest caz $l + 1 = n$, iar construcţia cerută este încheiată. Dacă $l + 1 < n$, atunci există un vector f_{l+2} care nu se exprimă liniar prin $f_1, f_2, ..., f_l$,

f_{l+1}. În acest mod se continuă construcția și după un număr finit de pași ($n-l$ pași) se obține o bază a spațiului $\mathcal{K}$.

Vezi problema 10.

2.44. Vom spune că vectorii $g_1, \ldots, g_k$ din $\mathcal{K}$ sînt *liniar independenți peste un subspațiu* $\mathfrak{L} \subset \mathcal{K}$ dacă din faptul că

$$\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_k g_k \in \mathfrak{L}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K,$$

rezultă că $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Dacă $\mathfrak{L}$ este subspațiul nul, atunci liniar independența peste $\mathfrak{L}$ revine la liniar independența obișnuită. Dependența liniară a vectorilor $g_1, g_2, \ldots, g_k$ peste subspațiul $\mathfrak{L}$ revine la existența unei combinații liniare $\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_k g_k$ situată în $\mathfrak{L}$, în care nu toți coeficienții $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sînt nuli.

Cel mai mare număr posibil de vectori din spațiul $\mathcal{K}$, care sînt liniar independenți peste subspațiul $\mathfrak{L} \subset \mathcal{K}$, se numește *dimensiunea lui* $\mathcal{K}$ *peste* $\mathfrak{L}$.

Dacă vectorii $g_1, \ldots, g_k$ sînt liniar independenți peste un subspațiu $\mathfrak{L} \subset \mathcal{K}$ iar $f_1, \ldots, f_l$ sînt vectori liniar independenți în subspațiul $\mathfrak{L}$, atunci $g_1, \ldots, g_k, f_1, \ldots, f_l$ sînt liniar independenți în spațiul $\mathcal{K}$. Într-adevăr, dacă ar avea loc o egalitate de forma

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_l f_l + \beta_1 g_1 + \ldots + \beta_k g_k = 0,$$

atunci scrisă sub forma

$$\beta_1 g_1 + \ldots + \beta_k g_k = -(\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_l f_l) \in \mathfrak{L}$$

ea ar implica relațiile $\beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$, deoarece $g_1, \ldots, g_k$ sînt liniar independenți peste $\mathfrak{L}$; mai departe, ar rezulta $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_l f_l = 0$, deci $\alpha_1 = \ldots = \alpha_l = 0$, în virtutea independenței liniare a vectorilor $f_1, \ldots, f_l$.

Vectorii $f_{l+1}, \ldots, f_n$ construiți în 2.43 sînt liniar independenți peste subspațiul $\mathfrak{L}$; într-adevăr, dacă ar avea loc o egalitate de forma

$$\alpha_{l+1} f_{l+1} + \ldots + \alpha_n f_n = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_l f_l,$$

unde nu toți coeficienții $\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_n$ sînt nuli, atunci vectorii $f_1, \ldots, f_n$ ar fi liniar independenți, contrar construcției făcute. Așadar, dimensiunea spațiului $\mathcal{K}$ peste $\mathfrak{L}$ nu este mai mică decît $n-l$. Pe de altă parte, ea nu poate fi nici mai mare decît $n-l$ deoarece dacă ar exista $n-l+1$ vectori, de exemplu $h_1, \ldots, h_{n-l+1}$, liniar independenți peste $\mathfrak{L}$, atunci în spațiul $\mathcal{K}$ ar fi liniar independenți vectorii $h_1, \ldots, h_{n-l+1}, f_1, \ldots, f_l$,

al căror număr este mai mare decît n. Așadar, dimensiunea lui $\mathcal{K}$ peste $\mathfrak{L}$ este egală cu $n-l$, în cazul considerat.

2.45. Sumă directă. Se spune că spațiul $\mathfrak{L}$ este *suma directă* a subspațiilor $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_m$ dacă:

a. Pentru orice $x \in \mathfrak{L}$ există o descompunere de forma

$$x = x_1 + \ldots + x_m, \text{ unde } x_1 \in \mathfrak{L}_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{L}_m.$$

b. Această descompunere este unică: dacă

$$x = x_1 + \ldots + x_m = y_1 + \ldots + y_m$$

și dacă $x_j \in \mathfrak{L}_j$, $y_j \in \mathfrak{L}_j$, $j = 1, \ldots, m$, atunci $x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m$.

Condiția b' rezultă din următoarea condiție mai simplă:

b'. Dacă are loc o descompunere a lui zero $0 = z_1 + \ldots + z_m$, unde $z_1 \in \mathfrak{L}_1, \ldots, z_m \in \mathfrak{L}_m$, atunci $z_1 = \ldots = z_m = 0$.

Într-adevăr, dacă este îndeplinită condiția b' și se consideră descompunerea de la pct. b, atunci

$$0 = (x_1 - y_1) + \ldots + (x_m - y_m)$$

și aplicînd **b'** se obține $x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m$.

De fapt condițiile de la pct. b și b' sînt echivalente, deoarece și 2.45 b' rezultă din 2.45 b punînd $x = 0$, $x_1 = \ldots = x_m = 0$.

Din 2.45 b rezultă că oricare două din subspațiile $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_m$ au în comun doar elementul 0. Într-adevăr, dacă am avea $z \in \mathfrak{L}_k$ și $z \in \mathfrak{L}_j$, atunci din compararea descompunerilor

$$z = z + 0, \quad z \in \mathfrak{L}_j, \quad 0 \in \mathfrak{L}_k,$$

$$z = 0 + z, \quad 0 \in \mathfrak{L}_j, \quad z \in \mathfrak{L}_k,$$

și din condiția **b**, ar rezulta că $z = 0$.

Așadar, orice spațiu n-dimensional $\mathcal{K}_n$ este sumă directă a n subspații unidimensionale, definite de orice n vectori liniar independenți. Mai mult, spațiul $\mathcal{K}_n$ poate fi reprezentat în moduri distincte sub forma unei sume directe de subspații de dimensiuni mai mari decît 1.

2.46. Fixăm un subspațiu $\mathfrak{L}$ într-un spațiu n-dimensional $\mathcal{K}_n$. Vom arăta că *întotdeauna există un subspațiu $\mathfrak{M} \subset \mathcal{K}_n$ a cărui sumă directă cu $\mathfrak{L}$ este egală cu întreg spațiul $\mathcal{K}_n$*. Pentru demonstrație folosim vectorii $f_{l+1}, \ldots, f_n$ construiți în 2.43,

liniar independenți peste subspațiul $\mathfrak{L}$. Fie $\mathfrak{M}$ subspațiul format din toate combinațiile liniare ale vectorilor $f_{l+1}, \ldots, f_n$; arătăm că acesta satisface condiția cerută. Într-adevăr, deoarece vectorii $f_1, \ldots, f_n$ constituie o bază în $\mathfrak{K}_n$ (2.43), fiecare vector $x \in \mathfrak{L}$ admite o descompunere de forma

$$x = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_l f_l + \alpha_{l+1} f_{l+1} + \ldots + \alpha_n f_n = y + z,$$

unde $y = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_l f_l \in \mathfrak{L}$, $z = \alpha_{l+1} f_{l+1} + \ldots + \alpha_n f_n \in \mathfrak{M}$. Din condiția $x = 0$ rezultă $\alpha_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, conform independenței liniare a vectorilor $f_1, \ldots, f_n$. Așadar, condițiile 2.45 a), b) sînt îndeplinite și $\mathfrak{K}_n$ este suma directă a subspațiilor $\mathfrak{L}$ și $\mathfrak{M}$.

2.47. a. Considerînd subspații $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_m$ și dacă dimensiunea spațiului $\mathfrak{L}_k$ este egală cu $r_k (k = 1, \ldots, m)$, iar în fiecare spațiu $\mathfrak{L}_k$ sînt puși în evidență cîte r_k vectori liniar independenți $f_{k1}, \ldots, f_{kr_k}$, atunci orice vector x al sumei $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \ldots + \mathfrak{L}_m$ poate fi exprimat liniar prin acești vectori. Așadar, *dimensiunea sumei subspațiilor* $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_m$ *nu este mai mare decît suma dimensiunilor lor. Dacă suma* $\mathfrak{L}_1 + \ldots + \mathfrak{L}_m$ *este directă, atunci toți vectorii* $f_{k1}, \ldots, f_{kr_k} (k = 1, \ldots, m)$ *sînt liniar independenți și în acest caz dimensiunea sumei este suma dimensiunilor.*

b. În cazul general, dimensiunea sumei se determină în funcție de dimensiunile termenilor într-un mod mai complicat; considerăm cazul dimensiunii sumei a două subspații finit-dimensionale $\mathfrak{P}$ și $\mathfrak{Q}$ ale spațiului $\mathfrak{K}$.

Fie p dimensiunea lui $\mathfrak{P}$ și q dimensiunea lui $\mathfrak{Q}$. Notăm cu $\mathfrak{L}$ intersecția subspațiilor $\mathfrak{P}$ și $\mathfrak{Q}$ și cu l dimensiunea sa. Alegem o bază $e_1, e_2, \ldots, e_l$ a lui $\mathfrak{L}$ și folosind cele spuse la punctul 2.43, completăm acești vectori prin $f_{l+1}, f_{l+2}, \ldots, f_p$ pînă la o bază a subspațiului $\mathfrak{P}$ și prin vectorii $g_{l+1}, g_{l+2}, \ldots, g_q$ pînă la o bază a subspațiului $\mathfrak{Q}$. Fiecare vector al sumei $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ este prin definiție suma unui vector din $\mathfrak{P}$ cu unul din $\mathfrak{Q}$, deci el poate fi exprimat liniar prin vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_l, f_{l+1}, \ldots, f_q, g_{l+1}, \ldots, g_q$. Arătăm că *acești vectori constituie o bază a subspațiului* $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$. Pentru aceasta rămîne să probăm doar independența lor liniară. Admitem prin absurd că ar exista o relație liniară de forma

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_l e_l + \beta_{l+1} f_{l+1} + \ldots + \beta_p f_p + \gamma_{l+1} g_{l+1} + \ldots + \gamma_q g_q = 0. \tag{9}$$

unde nu toți coeficienții $\alpha_1, \ldots, \gamma_q$ sînt nuli. Atunci numerele $\gamma_{l+1}, \ldots, \gamma_q$ nu pot fi toate nule căci altfel vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_l, f_{l+1}, \ldots, f_p$ ar fi liniar dependenți (ceea ce contravine faptului că ei constituie o bază a subspațiului $\mathfrak{P}$). Prin urmare, vectorul

$$x = \gamma_{l+1} g_{l+1} + \ldots + \gamma_q g_q \neq 0, \tag{10}$$

este nenul (altfel ar rezulta că vectorii $g_{l+1}, \ldots, g_q$ sînt liniar dependenți). Din relația (9) deducem

$$-x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p f_p \in \mathfrak{P},$$

iar din (10) rezultă $x \in \mathfrak{Q}$. Prin urmare x aparține și lui $\mathfrak{P}$ și lui $\mathfrak{Q}$, deci $x \in \mathfrak{L}$. Dar atunci

$$x = \gamma_{l+1} g_{l+1} + \ldots + \gamma_q g_q = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_l e_l.$$

Deoarece vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_l, g_{l+1}, \ldots, g_q$ sînt liniar independenți (bază pentru $\mathfrak{Q}$), rezultă că $\gamma_{l+1} = \ldots = \gamma_q = 0$. Contradicția obținută arată că vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_l, f_{l+1}, \ldots, f_p, g_{l+1}, \ldots, g_q$ sînt liniar independenți, adică formează o bază pentru $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$.

Conform teoremei 2.35 dimensiunea subspațiului $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ este egală cu numărul vectorilor unei baze, adică $p + q - l$. Așadar, *dimensiunea sumei a două subspații este egală cu suma dimensiunilor lor din care se scade dimensiunea intersecției.*

c. COROLAR. *Dacă într-un spațiu n-dimensional (real)* $\mathfrak{R}_n$ *se consideră două subspații* $\mathfrak{R}_p$ *și* $\mathfrak{R}_q$ *de dimensiuni p și q respectiv* $(p + q \geqslant n)$, *atunci intersecția* $\mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R}_q$ *are dimensiunea cel puțin egală cu* $p + q - n$.

2.48. Spații-cît.

a. Într-un spațiu liniar $\mathfrak{K}$ fixăm un subspațiu $\mathfrak{L}$. Un element $x \in \mathfrak{K}$ se numește *congruent cu un element* $y \in \mathfrak{K}$ (mai corect, *congruent relativ la* $\mathfrak{L}$) dacă $x - y \in \mathfrak{L}$. Evident, în acest caz y este și el congruent cu x, deci relația de congruență este simetrică. Orice $x \in \mathfrak{K}$ este congruent cu el însuși. Apoi dacă x este congruent cu y și y este congruent cu z, atunci x este congruent cu z, deoarece $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathfrak{L}$.

b. Mulțimea tuturor elementelor $y \in \mathfrak{K}$ congruente cu un element fixat $x \in \mathfrak{K}$ se numește *clasa lui* x și se notează

cu X. Conform celor spuse, clasa X conține elementul x însuși și orice două elemente $y \in X$, $z \in X$ sînt congruente între ele. În fine, dacă $u \notin X$, atunci u nu este congruent cu nici un element din clasa X. De aceea două clase X și Y sau nu au elemente comune, sau ele coincid. Una din clase este întreg subspațiul $\mathfrak{L}$; deoarece ea conține elementul nul al spațiului $\mathfrak{K}$, această clasă se notează cu 0.

c. Întreg spațiul $\mathfrak{K}$ se descompune într-o reuniune de clase disjuncte X, Y, ... Colecția acestor clase se va nota $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$. Introducem în mulțimea $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ operații liniare în modul următor. Fie X, Y clase și α, β elemente ale corpului K; vom defini clasa $\alpha X + \beta Y$. Pentru aceasta alegem $x \in X$ și $y \in Y$ arbitrare și fie Z clasa care conține elementul $z = \alpha x + \beta y$; această clasă o notăm $\alpha X + \beta Y$. Arătăm că ea este bine definită. Dacă în clasa X alegem elementul x_1, iar în clasa Y elementul y_1, atunci

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x + \beta y) = \alpha(x_1 - x) + \beta(y_1 - y)$$

aparține subspațiului $\mathfrak{L}$, odată cu $x_1 - x$ și $y_1 - y$; aceasta înseamnă că $\alpha x_1 + \beta y_1$ aparține aceleiași clase ca și $\alpha x + \beta y$.

În particular, am definit adunarea claselor X, Y și înmulțirea lor cu numere $\alpha \in K$. Arătăm că aceste operații verifică axiomele 2.12 — 2.13 ale unui spațiu liniar. Într-adevăr, din faptul că elementele spațiului $\mathfrak{K}$ verifică 2.12 1) — 2) și 2.13 5) —8) rezultă direct că aceste axiome sînt adevărate și pentru clase. Elementul zero în spațiul $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ este clasa 0 (constînd din toate elementele subspațiului $\mathfrak{L}$). Clasa opusă clasei X este clasa care constă din elementele opuse elementelor clasei X. Astfel, mulțimea tuturor claselor verifică și axiomele 2.12, 3) —4).

Spațiul liniar $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ construit mai sus se numește *spațiul-cît* (sau *spațiul-factor*) al spațiului $\mathfrak{K}$ prin subspațiul $\mathfrak{L}$.

2.49. TEOREMĂ. *Fie $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_n$ un spațiu liniar n-dimensional peste corpul K, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_l \subset \mathfrak{K}$ un subspațiu l-dimensional al lui $\mathfrak{K}$. Atunci spațiul-cît $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ are dimensiunea $n-l$.*

Demonstrație. Alegem în mod arbitrar o bază $f_1, \ldots, f_l$ în subspațiul $\mathfrak{L}$ și o completăm (2.43) cu vectorii $f_{l+1}, \ldots, f_n$ pînă la o bază a întreg spațiului $\mathfrak{K}$. Considerăm clasele $X_{l+1}, \ldots$ $\ldots, X_n$ care conțin respectiv elementele $f_{l+1}, \ldots, f_n$ și arătăm

că ele formează o bază a spațiului $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$. Pentru orice $x \in \mathfrak{K}$ există o reprezentare de forma

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k,$$

de aceea pentru clasa X a lui x există o reprezentare

$$X = \sum_{k=l+1}^{n} \alpha_k X_k.$$

Arătăm că clasele $X_{l+1}, \ldots, X_n$ sînt liniar independente. Dacă numerele $\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_n$ din K satisfac relația

$$\alpha_{l+1} X_{l+1} + \ldots + \alpha_n X_n = 0 \in \mathfrak{K}/\mathfrak{L},$$

atunci în particular rezultă că

$$\alpha_{l+1} f_{l+1} + \ldots + \alpha_n f_n \in \mathfrak{L};$$

cum vectorii $f_{l+1}, \ldots, f_n$ sînt liniar independenți peste $\mathfrak{L}$ (2.44), rezultă că $\alpha_{l+1} = \ldots = \alpha_n = 0$, ceea ce trebuia demonstrat. Astfel, $X_{l+1}, \ldots, X_n$ formează bază în $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$; numărul lor $n-l$ este dimensiunea spațiului $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ (2.35) și teorema este demonstrată.

§ 2.5. Acoperiri liniare

2.51. Un mijloc important de construire de subspații îl constituie formarea acoperirii liniare a unui sistem fixat de vectori.

Fie $x, y, z, \ldots$ un sistem de vectori din spațiul liniar $\mathfrak{K}$; *acoperirea (sau înfășurătoarea) liniară* a sistemului $x, y, z, \ldots$ este prin definiție mulțimea tuturor combinațiilor liniare (finite)

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots \qquad (11)$$

cu coeficienții α, β, γ, ... din corpul K. Se arată ușor că pentru această mulțime sînt îndeplinite condițiile 2.41 a, b; de aceea acoperirea liniară a sistemului $x, y, z, \ldots$ este un subspațiu al spațiului $\mathfrak{K}$. Acest subspațiu conține evident vectorii $x, y, z, \ldots$. Pe de altă parte, orice subspațiu conținînd vectorii $x, y, z, \ldots$ conține toate combinațiile lor liniare (11); așadar, *acoperirea liniară a vectorilor $x, y, z, \ldots$ este cel mai mic subspațiu care conține acești vectori.* Acoperirea liniară a vectorilor $x, y, z, \ldots$ se notează prin $\mathfrak{L}(x, y, z, \ldots)$.

2.52. *Exemple*

a. Acoperirea liniară a vectorilor $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formînd o bază a unui spațiu $\mathcal{H}$ coincide evident cu întreg spațiul $\mathcal{H}$.

b. Acoperirea liniară a unei perechi de vectori (necoliniari) din spațiul $\mathcal{V}_3$ constă din toți vectorii paraleli cu planul format de cei doi vectori.

c. Acoperirea liniară a sistemului de funcții $1, t, t^2, \ldots, t^k$ din spațiul $K(a, b)$ (K fiind $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) coincide cu mulțimea tuturor polinoamelor în variabila t de grad cel mult k. Acoperirea liniară a sistemului infinit de funcții $1, t, t^2, \ldots$ constă din toate polinoamele (de orice grad) în variabila t cu coeficienți din corpul K.

2.53. Subliniem două proprietăți ale acoperirilor liniare.

a. LEMĂ. *Dacă vectorii $x', y', \ldots$ aparțin acoperirii liniare a vectorilor $x, y, \ldots$, atunci acoperirea liniară $\mathfrak{L}(x', y', \ldots)$ este conținută în acoperirea liniară $\mathfrak{L}(x, y, \ldots)$.*

Într-adevăr, deoarece vectorii $x', y', \ldots$ aparțin subspațiului $\mathfrak{L}(x, y, \ldots)$, toate combinațiile lor liniare, adică toate elementele acoperirii liniare $\mathfrak{L}(x', y', \ldots)$, aparțin de asemenea subspațiului $\mathfrak{L}(x, y, \ldots)$.

b. LEMĂ. *Orice vector al sistemului $x, y, \ldots$ care depinde liniar de ceilalți vectori ai acestui sistem poate fi eliminat fără modificarea acoperirii liniare.*

Într-adevăr, dacă de exemplu, vectorul x depinde liniar de vectorii $y, z, \ldots$, aceasta înseamnă că $x \in \mathfrak{L}(y, z, \ldots)$. De aici și din lema de la punctul **a** rezultă că $\mathfrak{L}(x, y, z, \ldots) \subset \mathfrak{L}(y, z, \ldots)$. Pe de altă parte, este evident că $\mathfrak{L}(y, z, \ldots) \subset \mathfrak{L}(x, y, z, \ldots)$. Rezultă atunci că $\mathfrak{L}(y, z, \ldots) = \mathfrak{L}(x, y, z, \ldots)$, ceea ce trebuia dovedit.

2.54. Punem *problema construirii unei baze a acoperirii liniare și a determinării dimensiunii acoperirii*. În rezolvarea acestei probleme vom presupune că numărul vectorilor $x, y, \ldots$ care generează acoperirea liniară $\mathfrak{L}(x, y, \ldots)$ este finit (deși unele din rezultate nu cer în mod esențial această ipoteză).

Admitem că printre vectorii $x, y, \ldots$ care generează acoperirea liniară $\mathfrak{L}(x, y, \ldots)$ se pot găsi r vectori liniar independenți pe care îi notăm $x_1, x_2, \ldots, x_r$ și prin care poate fi exprimat liniar orice vector din sistemul $x, y, \ldots$. În acest caz *putem afirma că vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_r$ formează bază a spațiului* $\mathfrak{L}(x, y, \ldots)$. Într-adevăr, orice vector $z \in \mathfrak{L}(x, y, \ldots)$ poate

fi exprimat liniar printr-un număr finit de vectori din sistemul $x, y, \ldots$; dar fiecare din vectorii acestui sistem se exprimă liniar prin $x_1, x_2, \ldots, x_r$, de aceea în final vectorul z poate fi exprimat liniar direct prin vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_r$. În conjuncție cu ipoteza independenței liniare a vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_r$, rezultă că ambele condiții din definiția bazei (2.31) sînt îndeplinite și $x_1, x_2, \ldots, x_r$ formează bază pentru $\mathfrak{L}(x, y, \ldots)$.

Conform teoremei 2.35 dimensiunea spațiului $\mathfrak{L}(x, y, \ldots)$ este egală cu r. Deoarece într-un spațiu r-dimensional nu pot exista mai mult de r vectori liniar independenți, relativ la dimensiunea r a spațiului $\mathfrak{L}(x, y, \ldots)$ se pot face următoarele observații:

a. *Dacă numărul vectorilor generatori $x, y, \ldots$ este mai mare decît r atunci vectorii $x, y, \ldots$ sînt liniar dependenți; dacă numărul lor este egal cu r, atunci ei sînt liniar independenți.*

b. *Orice $r+1$ vectori din sistemul $x, y, \ldots$ sînt liniar dependenți.*

c. *Dimensiunea spațiului $\mathfrak{L}(x, y, \ldots)$ se poate defini ca numărul maxim de vectori liniar independenți din sistemul $x, y, \ldots$.*

§ 2.6. Hiperplane

2.61. Așa cum am văzut în 2.42 d, imaginea geometrică, corespunzînd noțiunii de subspațiu, pentru spațiul $\mathcal{V}_3$ în interpretarea „punctuală" (și nu „vectorială") este un plan sau o dreaptă trecînd prin originea coordonatelor. Este de dorit ca și planele și dreptele care nu trec prin originea coordonatelor să intre de asemenea în considerațiile noastre. Observînd că astfel de plane (sau drepte) se obțin din plane (respectiv drepte) care trec prin originea coordonatelor prin translație în spațiu se ajunge în mod natural la următoarea construcție generală.

Fie $\mathfrak{L}$ un subspațiu oarecare al unui spațiu liniar $\mathcal{H}$ și x_0 un vector fixat, care în general nu aparține lui $\mathfrak{L}$. Considerăm mulțimea H a tuturor vectorilor x care se obțin prin formula

$$x = x_0 + y,$$

unde vectorul y parcurge întreg subspațiul $\mathfrak{L}$. Mulțimea H se numește *hiperplan, obținut prin translația subspațiului $\mathfrak{L}$ de vector x_0*.

În general un hiperplan nu este subspațiu.

2.62. *Exemple*

a. În spațiul $\mathcal{V}_3$ mulțimea tuturor vectorilor avînd originea în originea coordonatelor și extremitatea situată pe un plan γ, formează un hiperplan. Se arată ușor că acest hiperplan este un subspațiu dacă și numai dacă planul γ trece prin originea coordonatelor.

b. Considerăm în spațiul K_n mulțimea H a vectorilor $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ ale căror coordonate verifică simultan sistemul de ecuații liniare

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2, \\ ..... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Fie L mulțimea vectorilor $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ ale căror coordonate verifică sistemul de ecuații liniare omogene cu aceiași coeficienți

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n &= 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n &= 0, \\ ..... \\ a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + ... + a_{kn}y_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

După cum am văzut mulțimea L este un subspațiu al spațiului K_n. Fie $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, ..., \xi_n^{(0)})$ o soluție a sistemului (12). Arătăm că mulțimea H coincide cu mulțimea tuturor sumelor $x_0 + y$, unde y parcurge întreg subspațiul L. Într-adevăr, dacă $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ este o soluție oarecare a sistemului (13), atunci vectorul x

$$x = x_0 + y = (\xi_1^{(0)} + \eta_1, \xi_2^{(0)} + \eta_2, ..., \xi_n^{(0)} + \eta_n)$$

este evident o soluție a sistemului (12), adică aparține mulțimii H. Invers, dacă x este un vector arbitrar din H, atunci diferența $y = x - x_0$ satisface deja sistemul (13), adică vectorul aparține subspațiului L. În virtutea definițiilor date mai sus, mulțimea H este un hiperplan, anume, cel obținut prin translația subspațiului L de vector x_0.

2.63. Oricărui hiperplan, deși el nu este un subspațiu, i se poate asocia o anumită *dimensiune*. Anume, dimensiunea unui hiperplan H este prin definiție egală cu dimensiunea subspațiului $\mathfrak{L}$, prin a cărui translație s-a obținut hiperplanul.

Pentru ca această definiție să fie corectă, trebuie arătat că hiperplanul considerat H poate fi obținut prin translația unui singur subspațiu. Pentru demonstrația acestei afirmații, admitem că hiperplanul H este rezultatul translației subspațiului $\mathfrak{L}$ de vectori x_0 și în același timp, rezultatul translației unui subspațiu $\mathfrak{L}'$ de vector x_0'.

Atunci pentru orice $z \in H$ avem $z = x_0 + y$ cu $y \in \mathfrak{L}$ și în același timp, $z = x_0' + y'$ cu $y' \in \mathfrak{L}'$. De aici rezultă că $\mathfrak{L}'$ este mulțimea vectorilor definiți prin formula $y' = (x_0 - x_0') + y$, unde y este un vector arbitrar din $\mathfrak{L}$, adică $\mathfrak{L}'$ se obține din $\mathfrak{L}$ prin translația de vector $x_1 = x_0 - x_0'$. Arătăm că x_1 aparține lui $\mathfrak{L}$. Vectorul nul, ca orice alt element din subspațiul $\mathfrak{L}'$ se poate scrie sub forma $x_1 + y_1$, unde $y_1 \in \mathfrak{L}$ (deoarece $\mathfrak{L}'$ este obținut prin translația subspațiului $\mathfrak{L}$ de vector x_1); de aici rezultă că $x_1 = -y_1$ și de aceea x_1 aparține lui $\mathfrak{L}$, ceea ce trebuia dovedit. Dar în acest caz, orice alt vector $y' \in \mathfrak{L}'$ aparține subspațiului $\mathfrak{L}$, deoarece el se reprezintă ca suma vectorului $x_1 \in \mathfrak{L}$ cu un vector $y \in \mathfrak{L}$. Așadar, are loc incluziunea $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}$. În virtutea simetriei condițiilor, se poate demonstra analog, că $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}'$, de unde rezultă că $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$, ceea ce am afirmat.

În cele ce urmează, hiperplanele de dimensiune 1 vor fi numite *linii drepte*, iar hiperplanele de dimensiune 2, *plane*.

Vezi problemele 11 — 14.

§ 2.7. Morfisme și spații liniare

2.71. Presupunem că fiecărui vector x' al unui spațiu liniar $\mathfrak{X}'$ îi corespunde, după o anumită regulă ω, un vector bine determinat x'' dintr-un spațiu liniar $\mathfrak{X}''$. Regula ω se numește *morfism* (sau *operator liniar*) dacă sînt îndeplinite următoarele relații:

a) $\omega(x' + y') = \omega(x') + \omega(y')$ pentru orice x', y' din $\mathfrak{X}'$;

b) $\omega(\alpha x') = \alpha\omega(x')$ pentru orice $x' \in \mathfrak{X}'$, $\alpha \in K$.

Dacă morfismul ω aplică spațiul $\mathfrak{X}'$ pe întreg spațiul $\mathfrak{X}''$ (adică este aplicație surjectivă), atunci ω se numește *epimorfism*. Dacă morfismul ω este aplicație injectivă ($x' \neq y'$ implică $\omega(x') \neq \omega(y')$), atunci el se numește *monomorfism*. Dacă morfismul ω stabilește o corespondență biunivocă

între spațiile $\mathcal{K}'$ și $\mathcal{K}''$, adică este simultan monomorfism și epimorfism, atunci ω se numește *izomorfism*, iar spațiile $\mathcal{K}'$ și $\mathcal{K}''$ însele se numesc izomorfe (sau mai exact, *K-izomorfe*).

Notația unanim acceptată a unui morfism ca mai sus este

$$\omega : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''.$$

2.72. *Exemple*

a. Fie $\mathfrak{L}$ un subspațiu al unui spațiu $\mathcal{K}$. Aplicația ω care asociază fiecărui vector $x \in \mathfrak{L}$ același vector x în spațiul $\mathcal{K}$, este un morfism între spațiile $\mathfrak{L}$ și $\mathcal{K}$ și anume un monomorfism (dacă $\mathfrak{L} \neq \mathcal{K}$, acest morfism nu este epimorfism). Acest morfism $\omega : \mathfrak{L} \to \mathcal{K}$ se numește *scufundarea* lui $\mathfrak{L}$ în $\mathcal{K}$.

b. Fie $\mathfrak{L}$ un subspațiu al unui spațiu $\mathcal{K}$ și $\mathcal{K}/\mathfrak{L}$ spațiul cît al spațiului $\mathcal{K}$ prin subspațiul $\mathfrak{L}$ (2.48). Aplicația ω care asociază oricărui vector $x \in \mathcal{K}$ clasa corespunzătoare $X \subset \mathcal{K}/\mathfrak{L}$, conținînd elementul x, este un morfism de la $\mathcal{K}$ în $\mathcal{K}/\mathfrak{L}$, și anume un epimorfism (dacă $\mathfrak{L} \neq 0$ acest morfism ω nu este monomorfism). Acest morfism ω se numește *aplicația canonică a lui* $\mathcal{K}$ *pe* $\mathcal{K}/\mathfrak{L}$.

2.73. a. Presupunem că spațiul $\mathcal{K}'$ este n-dimensional avînd baza $e'_1, \ldots, e'_n$. În spațiul $\mathcal{K}''$ alegem în mod arbitrar vectorii $e''_1, \ldots, e''_n$. Oricărui vector $x' = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e'_k \in \mathcal{K}'$ îi asociem vectorul $\omega(x') = x'' = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e''_k$, cu aceiași coeficienți ξ_k ($k = 1, \ldots, n$). Arătăm că *aplicația* ω *astfel definită este un morfism al spațiului* $\mathcal{K}'$ *în spațiul* $\mathcal{K}''$.

Presupunem pentru aceasta că în spațiul $\mathcal{K}'$ sînt fixați doi vectori

$$x' = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e'_k \text{ și } y' = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e'_k;$$

atunci conform 2.33,

$$x' + y' = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k + \eta_k) e'_k.$$

Conform definiției lui ω,

$$\omega(x') = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e''_k, \quad \omega(y') = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e''_k.$$

Pe de altă parte,

$$\omega(x' + y') = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k + \eta_k) e''_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e''_k + \sum_{k=1}^{n} \eta_k e''_k =$$
$$= \omega(x') + \omega(y'),$$

și astfel, condiția 2.71 a este îndeplinită. În mod similar, pentru orice $\alpha \in K$, avem

$$\omega(\alpha x') = \omega\left(\alpha \sum_{k=1}^{n} \xi_k e'_k\right) = \omega\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha \xi_k e'_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha \xi_k e''_k =$$
$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} \xi_k e''_k = \alpha \omega(x'),$$

deci este îndeplinită și condiția 2.71 b. Așadar aplicația ω este un morfism $\omega : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$, ceea ce trebuia demonstrat.

b. Indicăm în ce condiții morfismul ω descris la punctul **a** *este epimorfism*. Evident, condiția necesară și suficientă pentru ca ω să fie epimorfism este ca orice vector $x'' \in \mathcal{K}''$ să poată fi reprezentat sub forma $\sum_{k=1}^{n} \xi_k e''_k$, cu alte cuvinte, $\mathcal{K}''$ *să coincidă cu înfășurătoarea liniară a vectorilor* $e''_1, \ldots, e''_n$.

c. Indicăm condiții în care morfismul ω descris la pct. a *este monomorfism*. Pentru aceasta este necesar și suficient ca vectorii $\Sigma \xi_k e''_k$, $\Sigma \eta_k e''_k$ care diferă cel puțin într-o pereche de coordonate (adică există k astfel încît $\xi_k \neq \eta_k$) să fie vectori distincți în spațiul $\mathcal{K}''$. Dar aceasta este echivalent cu liniar independența vectorilor $e''_1, \ldots, e''_n$. Așadar, *morfismul* ω *este monomorfism dacă și numai dacă vectorii* $e''_1, \ldots, e''_n$ *sînt liniar independenți.*

d. Ca un corolar, rezultă că morfismul ω descris în **a** este izomorfism dacă și numai dacă vectorii $e''_1, \ldots, e''_n$ sînt liniar independenți și înfășurătoarea lor liniară coincide cu întreg spațiul $\mathcal{K}''$. Cu alte cuvinte, morfismul ω *este izomorfism dacă și numai dacă vectorii* $e''_1, \ldots, e''_n$ *formează o bază a spațiului* $\mathcal{K}''$.

2.74. TEOREMĂ. *Orice două spații n-dimensionale* $\mathcal{K}'$ *și* $\mathcal{K}''$ *(peste același corp K) sînt K-izomorfe.*

Demonstrație. Fie $e'_1, \ldots, e'_n$ o bază a spațiului $\mathcal{K}'$ și $e''_1, \ldots, e''_n$ o bază a spațiului $\mathcal{K}''$. Cu ajutorul acestor sisteme de vectori se poate construi morfismul ω așa cum este indicat în 2.73 a.

Conform 2.73 **d**, acest morfism este un izomorfism, ceea ce trebuia arătat.

2.75. COROLAR. *Orice spațiu vectorial n-dimensional peste un corp* K *este* K*-izomorf cu spațiul* K_n (2.15 b). *În particular, orice spațiu complex n-dimensional este* $\mathbb{C}$*-izomorf cu spațiul* $\mathcal{C}_n$ *și orice spațiu real n-dimensional este* $\mathbb{R}$*-izomorf cu spațiul* $\mathcal{R}_n$.

2.76. *Alte proprietăți ale monomorfismelor și epimorfismelor.*

a. Fie $\omega : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ un morfism de spații vectoriale. Considerăm mulțimea tuturor vectorilor $\omega(x') \in \mathcal{X}''$ cînd x' parcurge întreg spațiul $\mathcal{X}'$. Această mulțime constituie evident un subspațiu $\mathfrak{L}'' \subset \mathcal{X}''$, numit *domeniul de valori al morfismului* ω (sau *imaginea lui* ω și este notat uneori $\operatorname{Im} \omega$). Este clar că aplicația $\omega : \mathcal{X}' \to \mathfrak{L}''$ este epimorfism și că dacă morfismul $\omega : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ este monomorfism, atunci morfismul $\omega : \mathcal{X}' \to \mathfrak{L}''$ este un izomorfism.

b. Fie $\omega : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ un morfism fixat. Considerăm mulțimea $\mathfrak{L}'$ a tuturor vectorilor $x' \in \mathcal{X}'$ pentru care $\omega(x') = 0$. Mulțimea $\mathfrak{L}'$ este evident subspațiu al spațiului $\mathcal{X}'$, numit *nucleu* (sau *spațiul nul*) al morfismului ω.

Construim spațiul-cît $\mathcal{X}'/\mathfrak{L}'$ (2.48). Toate elementele x' care sînt în aceeași clasă $X' \in \mathcal{X}'/\mathfrak{L}'$ sînt duse prin morfismul ω într-unul și același element al spațiului $\mathcal{X}''$; într-adevăr, pentru două astfel de elemente x' și y' avem $x' - y' = z' \in \mathfrak{L}'$, de unde $\omega(x') - \omega(y') = \omega(z') = 0$, $\omega(x') = \omega(y')$. Asociem oricărei clase $X' \in \mathcal{X}'/\mathfrak{L}'$ elementul $x'' = \omega(x') \in \mathcal{X}''$, unde $x' \in X'$ este orice element fixat; am văzut mai sus că x'' este definit în mod bine determinat. Notăm $x'' = \Omega(X')$. Aplicația Ω, după cum se vede ușor, este un morfism de la spațiul $\mathcal{X}'/\mathfrak{L}'$ în $\mathcal{X}''$; el este monomorfism deoarece din faptul că $X' \neq Y'$, $x' \in X'$, $y' \in Y'$, rezultă

$$\Omega(X') - \Omega(Y') = \omega(x') - \omega(y') = \omega(x' - y') \neq 0.$$

Astfel, orice morfism $\omega : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ generează un monomorfism $\Omega : \mathcal{X}'/\mathfrak{L}' \to \mathcal{X}''$. Dacă morfismul ω ar fi epimorfism, atunci monomorfismul Ω ar fi epimorfism, deci un epimorfism $\Omega : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ dă naștere unui izomorfism $\Omega : \mathcal{X}'/\mathfrak{L}' \to \mathcal{X}''$.

Vom relua studiul morfismelor în capitolul 4.

PROBLEME

1. Formează mulțimea vectorilor dintr-un plan, avînd capetele în originea unui reper ortogonal în acel plan și extremitățile în primul cadran, un spațiu liniar (relativ la operațiile uzuale)?

2. Formează spațiu liniar, mulțimea tuturor vectorilor din plan cu excepția celor care sînt paraleli cu o dreaptă fixată din acel plan?

3. Considerăm mulțimea P a numerelor reale strict pozitive cu următoarele operații: prin „sumă" a două numere din P se înțelege produsul lor uzual și prin produs $\lambda r (\lambda \in \mathbb{R}, r \in P)$ se înțelege puterea uzuală r^{λ}. Este P un spațiu vectorial relativ la aceste operații?

4. Să se arate că în cazul a n vectori dați într-un spațiu $\mathcal{X}_n$ un criteriu de dependență liniară a lor îl constituie anularea determinantului format din componentele acelor vectori.

5. Să se arate că în spațiul $\mathcal{R}(a, b)$, unde $0 < a < b$, funcțiile t^{α_1}, $t^{\alpha_2}, \ldots, t^{\alpha_k}$ sînt liniar independente, dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sînt numere reale distincte două cîte două.

6. Fie $\mathcal{X}$ un spațiu liniar și $e_1, e_2, \ldots, e_n$ un sistem de vectori astfel încît:

a. fiecare vector $x \in \mathcal{X}$ să admită o reprezentare $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$.

b. pentru un vector fixat $x_0 \in \mathcal{X}$ această reprezentare este unică.

Să se arate că sistemul $e_1, e_2, \ldots, e_n$ constituie o bază a spațiului $\mathcal{X}$.

7. Indicați o bază a spațiului P (din problema 3).

8. Ce dimensiune are spațiul P (problema 3)?

9. În spațiul $\mathcal{V}_3$ se consideră două subspații bidimensionale distincte $\mathfrak{L}_1$ și $\mathfrak{L}_2$ (adică două plane distincte trecînd prin originea coordonatelor). Indicați interpretările intersecției și sumei subspațiilor $\mathfrak{L}_1$ și $\mathfrak{L}_2$.

10. Să se demonstreze teorema: dacă dimensiunea unui subspațiu $\mathfrak{L} \subset \mathcal{X}$ coincide cu dimensiunea spațiului $\mathcal{X}$, atunci $\mathfrak{L} = \mathcal{X}$.

11. Este bine determinat, pentru un hiperplan fixat, vectorul de translație x_0 care figurează în definiția acelui hiperplan?

12. Să se arate că orice hiperplan $H \subset \mathcal{X}$ are următoarea proprietate: dacă $x \in H$, $y \in H$, atunci $\alpha x + (1 - \alpha) y \in H$ pentru orice α real. Invers, dacă o submulțime $H \subset \mathcal{X}$ are această proprietate, să se arate că H este un hiperplan. Ce proprietate geometrică este exprimată aici?

13. Hiperplanele H_1 și H_2 au dimensiunile p și q respectiv. Ce dimensiune minimă poate avea un hiperplan H_3 astfel încît, fiind așezat convenabil, el să conțină H_1 și H_2?

14. Problema similară pentru trei hiperplane H_1, H_2, H_3 cu dimensiunile p, q, r.

15. Conform teoremei 2.74 spațiile unidimensionale $\mathcal{R}_1$ și P (problema 3) sînt izomorfe. Cum se poate explicita acest izomorfism?

Capitolul 3

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

§ 3.1. Complemente relativ la rangul unei matrici

3.11. Am întîlnit de cîteva ori pînă acum matrici și unele proprietăți legate de noțiunea de rang (1.92). În acest paragraf studiem mai detaliat astfel de proprietăți, ceea ce ne va permite să dăm soluția completă a problemelor sistemelor liniare de ecuații, formulate în § 1.2.

Reamintim definițiile de bază din § 1.9.

Se consideră o matrice cu n linii și k coloane, cu elementele a_{ij}(i — indice de linie, j — indice de coloană, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., k$) dintr-un corp K:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nk} \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

Dacă în această matrice se aleg arbitrar m linii și m coloane, atunci elementele care se află la intersecțiile acestor linii și coloane formează o matrice pătratică de ordinul m.

Determinantul acestei matrici se numește *minor de ordin m al matricii A*. Un număr natural r se numește *rangul* matricii A dacă există un minor de ordin r, diferit de zero și toți minorii de ordin $r+1$ sînt nuli. Dacă matricea A are rangul $r > 0$, atunci orice minor al ei de ordin r, diferit de zero, se numește *minor principal*. Liniile și coloanele unei matrici la intersecția cărora se află elementele unui minor principal, se numesc *linii principale și coloane principale*.

Considerațiile ulterioare se bazează pe posibilitatea de a da fiecărei coloane formată din n numere, interpretarea geometrică de vectori în spațiul n-dimensional K_n (2.15 b). Matricea A însăși apare în acest sens ca un sistem de k vectori din spațiul K_n; notăm cu x_j vectorul corespunzător

coloanei j a matricii A($j = 1, 2, ..., k$). O combinație liniară a coloanelor lui A înseamnă o astfel de combinație între vectorii corespunzători (2.22 b).

Considerăm în spațiul K_n acoperirea liniară a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$ (2.51). Vom arăta că vectorii care corespund coloanelor principale ale matricii A — pentru precizare presupunem că primele r coloane sînt principale — formează o bază a acestei acoperiri liniare. Pentru aceasta, este suficient să dovedim că vectorii $x_1, x_2, ..., x_r$ sînt liniar independenți și că vectorii rămași $x_{r+1}, ..., x_k$ pot fi exprimați liniar cu ajutorul lor (2.54). Arătăm mai întîi prima din aceste afirmații. Dependența liniară a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_r$ este echivalentă cu dependența liniară a primelor r coloane ale matricii A. Dar atunci în virtutea teoremei 1.96 orice determinant de ordin r, construit pe aceste coloane și orice r linii ale matricii A, este egal cu zero. În particular, va fi egal cu zero minorul principal al lui A, ceea ce contrazice definiția acestuia. Astfel prima afirmație este demonstrată. A doua afirmație a fost de fapt demonstrată în 1.93; formulată acolo pentru coloanele lui A, ea a constituit enunțul „teoremei minorului principal". Cu aceasta, am dat demonstrația completă a faptului că vectorii $x_1, x_2, ..., x_r$ formează o bază a spațiului $\mathfrak{L}(x_1, x_2, ..., x_k)$. În virtutea teoremei 2.35 dimensiunea acestui spațiu este egală cu r, adică tocmai rangul matricii A. Am obținut următorul rezultat important:

TEOREMĂ. *Dimensiunea acoperirii liniare a vectorilor definiți de coloanele unei matrici A este egală cu rangul acestei matrici. Vectorii care corespund coloanelor principale ale lui A formează o bază a acoperirii liniare considerate.*

3.12. Propozițiile care urmează constituie de fapt consecințe evidente ale celor spuse la punctul 2.54 a-c.

a. TEOREMĂ. *Dacă rangul matricii A este mai mic decît numărul coloanelor ei ($r < k$), atunci coloanele lui A sînt liniar dependente. Dacă rangul lui A este egal cu numărul coloanelor ($r = k$), atunci coloanele lui A sînt liniar independente.*

b. TEOREMĂ. *Orice $r+1$ coloane ale unei matrici de rang r sînt liniar dependente.*

c. TEOREMĂ. *Rangul oricărei matrici este egal cu numărul maxim al coloanelor ei liniar independente.*

Această ultimă propoziție are o mare însemnătate principială, deoarece ea cuprinde în sine o nouă definiție a rangului unei matrici.

3.13. Dacă se transpune matricea A, adică, se trece de la A la matricea A', ale cărei linii sînt coloanele lui A, atunci rangul lui A' va fi evident același cu rangul lui A. Dar conform teoremei 3.12 c rangul lui A este egal cu numărul maxim al coloanelor (sau echivalent al liniilor lui A') liniar independente. Ajungem astfel la următoarea concluzie oarecum neașteptată.

TEOREMĂ. *Numărul maxim al liniilor liniar independente ale oricărei matrici coincide cu numărul maxim al coloanelor ei liniar independente.*

Trebuie notat că această teoremă este netrivială; orice demonstrație directă a ei ar necesita un lanț de raționamente echivalent cu demonstrația teoremelor 1.93 și 3.11.

3.14. Notăm de asemenea rezultatul următor care decurge din teorema 3.11 și din lema 2.53 b:

TEOREMĂ. *Dacă una din coloanele matricii A este combinație liniară a celorlalte coloane, atunci ea poate fi eliminată din matrice fără a modifica rangul lui A.*

Vezi problemele 1 — 2.

§ 3.2. Compatibilitatea nebanală a unui sistem liniar omogen

3.21. Considerăm un sistem liniar omogen

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Așa cum deja știm, acest sistem este întotdeauna compatibil, deoarece are soluția banală (nulă) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Problema de bază cu care ne întîlnim în studiul sistemelor liniare omogene este următoarea: *în ce condiții un sistem omogen este „compatibil nebanal", adică admite și alte soluții în afara soluției banale?* Rezultatele din § 3.1. ne permit să rezolvăm direct această proprietate. Într-adevăr,

existența unei soluții nenule a sistemului (2) este echivalentă, așa cum am văzut în 2.22 **b**, cu dependența liniară a coloanelor matricii

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} \dots a_{kn} \end{Vmatrix},$$

iar teorema 3.12 a arată că această dependență liniară are loc dacă și numai dacă rangul matricii A este mai mic decît numărul coloanelor. Astfel se obține teorema următoare:

TEOREMĂ. *Dacă rangul matricii A este egal cu numărul n, atunci sistemul (2) nu admite soluții nenule. Dacă rangul lui A este strict mai mic decît n, atunci există soluții nebanale ale sistemului (2); în acest caz și numai în acest caz sistemul este compatibil nebanal.*

3.22. În particular, dacă numărul ecuațiilor din sistemul (2) este mai mic decît numărul necunoscutelor ($k < n$), atunci rangul lui A este evident strict mai mic decît n și sistemul va avea soluții nenule. Dacă $k = n$, atunci problema existenței soluțiilor nenule depinde de valoarea lui det A: dacă det $A \neq 0$, atunci $r = n$ și sistemul (2) nu are soluții nenule, iar dacă det $A \neq 0$, atunci $r < n$ și există soluții nenule. Pentru $k > n$ trebuie considerați toți determinanții posibili de ordin n care se obțin alegînd n linii oarecare ale matricii A; dacă toți acești determinanți sînt egali cu zero, atunci $r < n$ și există soluții nenule; dacă printre acești determinanți există unul diferit de zero, atunci $r = n$ și sistemul (2) admite numai soluția nulă.

Vezi problema 3.

§ 3.3. Condiția de compatibilitate a unui sistem liniar general

3.31. Considerăm un sistem general de ecuații liniare

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Acestui sistem i se pot asocia două matrici

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{Vmatrix}$$

numite respectiv *matricea de bază* a sistemului (3) și *matricea extinsă* a sistemului (3). O teoremă importantă asupra compatibilității sistemului (3) este următoarea

TEOREMĂ (*Kronecker-Capelli*). *Sistemul* (3) *este compatibil dacă și numai dacă matricile* A *și* A_1 *au același rang* (*adică rangul matricii extinse este egal cu rangul matricii de bază a sistemului*).

Demonstrație. Presupunem mai întîi că sistemul (3) este compatibil și fie $c_1, c_2, \dots, c_n$ o soluție. Așadar

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n &= b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \dots + a_{kn}c_n &= b_k. \end{aligned}$$

Aceste egalități arată că ultima coloană a matricii A_1 este combinație liniară a celorlalte coloane ale acestei matrici (cu coeficienții $c_1, c_2, \dots, c_n$). În virtutea teoremei 3.14 ultima coloană a matricii A_1 poate fi eliminată fără modificarea rangului ei. Dar prin eliminarea ultimei coloane a matricii A_1 se obține tocmai matricea A. Așadar, dacă sistemul (3) este compatibil, atunci matricile A și A_1 au același rang.

Admitem acum că matricile A și A_1 au același rang și arătăm că sistemul (3) este compatibil. Fie r rangul matricii A (așadar și al matricii A_1). Considerăm r coloane principale ale matricii A; ele vor fi coloane principale și pentru matricea A_1. Conform teoremei 1.93 ultima coloană a matricii A_1 va fi combinație liniară a coloanelor principale, deci combinație liniară a tuturor coloanelor lui A. Dacă notăm cu $c_1, c_2, \dots, c_n$ coeficienții acestei ultime combinații liniare, atunci se obțin egalități de forma

$$\left.\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n &= b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \dots + a_{kn}c_n &= b_k. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Astfel, relațiile (4) arată că sistemul (3) are soluție $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$ și ca atare sistemul (3) este compatibil. Teorema este complet demonstrată.

§ 3.4. Soluția generală a unui sistem liniar

3.41. Teorema Kronecker-Capelli stabilește o condiție generală de compatibilitate a unui sistem liniar, dar nu dă o metodă de obținere explicită a soluției. În acest paragraf, vom deduce o formulă care exprimă soluția generală a unui sistem liniar.

Prin *soluție generală a sistemului* (3) se înțelege mulțimea tuturor expresiilor de forma

$$x_j = f_j(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{kn}, b_1, \dots, b_k, q_1, \dots, q_s), \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

unde membrii din dreapta sînt funcții depinzînd de coeficienții a_{ij} ai sistemului (3), de termenii liberi b_j și de parametrii nedeterminați $q_1, \dots, q_s$, astfel încît pentru orice valori fixate ale parametrilor q_j (din corpul K) să se obțină mărimi $x_j = c_j$ ($j = 1, \dots, n$) care constituie o soluție a sistemului (3) și invers, orice soluție a sistemului (3) se obține printr-o alegere convenabilă a valorilor parametrilor $q_1, \dots, q_s$ din K. În 2.62 b am văzut că mulțimea tuturor sumelor de forma $x_0 + y$, unde x_0 este o soluție particulară a acestui sistem iar y parcurge mulțimea tuturor soluțiilor sistemului omogen corespunzător, constituie mulțimea tuturor soluțiilor sistemului (3). Acum acest fapt poate fi exprimat astfel: *soluția generală a sistemului neomogen* (3) *este suma unei soluții particulare a acestui sistem cu soluția generală a sistemului omogen.*

Fie dat sistemul liniar (3) presupus compatibil cu matricea de bază $A = \|a_{ij}\|$ de rang r. Se poate presupune că un minor principal M al matricii A este așezat în colțul din stînga sus (altfel, se face o permutare a liniilor și coloanelor lui A, ceea ce revine la o permutare a ecuațiilor și necunoscutelor în sistemul (3)). Considerăm primele r ecuații ale sistemului (3), pe care le scriem astfel:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1,\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2,\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{r,\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Dăm necunoscutelor $x_{r+1}, \ldots, x_n$ valori arbitrare $c_{r+1}, \ldots, c_n$. Atunci sistemul (5) devine un sistem de r ecuații cu r necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_r$ cu determinantul M diferit de zero (minor principal al matricii A). Acest sistem poate fi rezolvat cu regula lui Cramer 1.73; există așadar numere $c_1, c_2, \ldots, c_n$ care înlocuite în sistemul (5), în locul necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, transformă ecuațiile acestui sistem (5) în identități. Arătăm că aceste valori $c_1, c_2, \ldots, c_n$ satisfac și celelalte ecuații ale sistemului (3).

Primele r linii ale matricii extinse A_1 a sistemului (3) sînt linii principale ale acestei matrici (deoarece rangul matricii extinse este egal cu r și în primele r linii ale matricii A_1 se află minorul nenul M). În virtutea teoremei 1.93, aplicată pentru linii, fiecare din ultimele linii ale matricii A_1 este combinație liniară a primelor r linii. Pentru sistemul (3) aceasta înseamnă că fiecare ecuație a sistemului (3), începînd cu a $(r+1)$—a este combinație liniară a primelor r ecuații ale acestui sistem. Așadar, dacă primele r ecuații ale sistemului (3) sînt verificate de valorile $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$, atunci toate celelalte ecuații ale sistemului sînt de asemenea verificate.

3.42. Pentru a scrie soluția astfel construită a sistemului (3) sub forma unei formule, notăm cu $M_j(\alpha_i)$ determinantul care se obține din minorul principal $M = \det ||a_{ij}||$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$ prin înlocuirea coloanei j cu coloana formată din numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r$. Atunci, scriind soluția sistemului (5) cu ajutorul formulei lui Cramer, se obține

$$x_j = \frac{1}{M} M_j(b_i - a_{i,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{in}c_n) =$$

$$= \frac{1}{M} [M_j(b_i) - c_{r+1}M_j(a_{i,r+1}) - \ldots - c_nM_j(a_{in})],$$

$$(j = 1, \ldots, r), \qquad (6)$$

$$x_j = c_j \ (j = r+1, \ldots, n).$$

Aceste formule exprimă valorile necunoscutelor $x_j = c_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ prin coeficienții sistemului, prin termenii liberi și prin mărimile arbitrare (parametri) $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$.

Arătăm că în formulele (6) este cuprinsă orice soluție a sistemului (3). Într-adevăr, fie $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_{r+1}^0, \ldots, c_n^0$ o soluție

oarecare a sistemului (3). Evident, ea este de asemenea soluție a sistemului (5). Dar conform regulii lui Cramer, din sistemul (5), mărimile $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_r^0$ se determină cu ajutorul mărimilor $c_{r+1}^0, \ldots, c_n^0$, anume conform formulelor (6). Astfel, pentru $c_{r+1} = c_{r+1}^0, \ldots, c_n = c_n^0$ formulele (6) ne dau tocmai soluția considerată $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$, ceea ce trebuia arătat. În acest mod, formulele (6) dau soluția generală a sistemului (3).

Vezi problemele 4—7.

§ 3.5. Proprietăți geometrice ale mulțimii soluțiilor unui sistem liniar

3.51. Considerăm mai întîi cazul unui sistem liniar omogen (2); știm însă că mulțimea tuturor soluțiilor unui astfel de sistem formează un spațiu liniar (2.42 e). Notînd acest spațiu prin L, ne propunem să calculăm dimensiunea lui și să construim o bază a lui L.

Formulele (6) capătă în acest caz forma

$$-Mc_j = c_{r+1}M_j(a_{i,r+1}) + \ldots + c_nM_j(a_{in}) \ (j = 1,2,\ldots,r)$$

$$\text{deoarece } M_j(b_i) = M_j(0) = 0. \qquad (7)$$

Fiecărei soluții $(c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ a sistemului (2) îi asociem vectorul $(c_{r+1}, \ldots, c_n)$ din spațiul K_{n-r}. Deoarece numerele $c_{r+1}, \ldots, c_n$ pot fi luate arbitrar și definesc în mod bine determinat soluția sistemului (2), atunci corespondența între spațiul soluțiilor sistemului (2) și spațiul K_{n-r} se obține în mod biunivoc. Deoarece prin această corespondență, se păstrează operațiile liniare, după cum se verifică imediat, această corespondență este un izomorfism. Astfel, *spațiul L al soluțiilor unui sistem omogen de ecuații liniare cu n necunoscute, avînd rangul matricii coeficienților egal cu r, este izomorf cu spațiul K_{n-r}*. În particular, dimensiunea spațiului L este egală cu $n-r$.

3.52. Orice sistem format din $n-r$ soluții liniar independente ale unui sistem liniar omogen de ecuații formează o bază a spațiului tuturor soluțiilor (conform teoremei 2.34) și se numește *sistem fundamental de soluții*. Pentru construirea unui sistem fundamental de soluții putem folosi orice bază a spațiului K_{n-r}; în virtutea izomorfismului anterior, soluțiile

corespunzătoare ale sistemului (2) vor constitui o bază în spațiul tuturor soluțiilor acestui sistem.

Cea mai simplă bază a spațiului K_{n-r} este formată din vectorii $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, ..., $e_{n-r} = (0, 0, ..., 1)$ (2.32 b). Pentru a obține soluția sistemului (2) corespunzătoare de exemplu vectorului e_1, este necesar ca în formulele (7) să înlocuim $c_{r+1} = 1$, $c_{r+2} = ... = c_n = 0$ și să definim valorile corespunzătoare $c_i = c_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, ..., n)$. În mod analog se construiește soluția corespunzătoare oricărui alt vector e_j $(j = 2, ..., n - r)$.

Mulțimea de soluții ale sistemului (2) astfel construită se numește *sistem fundamental normal de soluții*. Notînd aceste soluții prin $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n-r)}$, atunci prin însăși definiția unei baze, pentru orice soluție x are loc o egalitate de forma

$$x = \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + ... + \alpha_{n-r} x^{(n-r)}. \qquad (8)$$

Deoarece în formula (8) este cuprinsă orice soluție a sistemului (2), această formulă dă soluția generală a sistemului (2).

Vezi problema 8.

3.53. Trecem acum la considerarea unui sistem neomogen (3) în cazul general. Așa cum s-a demonstrat în 2.62 b, imaginea geometrică H, corespunzînd mulțimii tuturor soluțiilor unui sistem neomogen, este un hiperplan în spațiul n-dimensional K_n, obținut prin translația subspațiului L al soluțiilor sistemului omogen asociat (izomorf cu spațiul $\mathcal{R}_{n-r}$, după cum s-a arătat), printr-un vector x_0 care reprezintă o soluție particulară a sistemului neomogen. De aici se deduce în primul rînd că *dimensiunea hiperplanului H coincide cu dimensiunea spațiului L.*

Dacă r este rangul matricii de bază a sistemului (3), atunci orice vector y al subspațiului L se poate reprezenta sub forma unei sume

$$y = \alpha_1 y^{(1)} + \alpha_2 y^{(2)} + ... + \alpha_{n-r} y^{(n-r)},$$

unde $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., $y^{(n-r)}$ sînt vectorii unei baze a subspațiului L (constituind un sistem fundamental de soluții). Așadar, orice vector x al hiperplanului H se poate reprezenta sub forma

$$x = x_0 + y = x_0 + \alpha_1 y^{(1)} + \alpha_2 y^{(2)} + ... + \alpha_{n-r} y^{(n-r)}.$$

Acest rezultat, în limbaj de soluții ale sistemelor (3) și (2), este compatibil cu principiul stabilit la punctul 3.41: soluția

generală a sistemului neomogen (3) este egală cu suma unei soluții particulare (fixată arbitrar) a acestui sistem cu soluția generală a sistemului omogen asociat (2).

Vezi problema 9.

§ 3.6. Metode de calcul al rangului unei matrici

3.61. Pentru folosirea practică a metodelor de rezolvare a sistemelor liniare de ecuații dezvoltate în paragrafele anterioare, este necesar să știm să calculăm rangul unei matrici și să găsim un minor principal al ei. Evident, definiția rangului unei matrici dată în 1.92 nu conține mijlocul cel mai practic de a calcula rangul respectiv; de exemplu, într-o matrice pătratică de ordin 5, se pun în evidență un minor de ordin 5, 25 minori de ordin 4, 100 minori de ordin 3 și 100 minori de ordin 2; se înțelege că dacă am dori să determinăm rangul acestei matrici cu ajutorul calculului direct al valorilor tuturor acestor minori, aceasta ar fi o problemă dificilă practic. În acest paragraf vom da cîteva mijloace simple de calcul al rangului unei matrici și de determinare a unui minor principal al ei, bazate pe studiul cîtorva operații asupra coloanelor și liniilor matricii, care nu modifică rangul matricii; aceste operații se numesc *operații elementare*. Deoarece rangul unei matrici nu se modifică, după cum am dovedit, prin transpunerea matricii, vom defini aceste operații numai pentru coloanele matricii. În legătură cu aceasta, în demonstrații vom utiliza interpretarea geometrică a unei matrici cu n linii și k coloane ca matricea coordonatelor unui sistem de k vectori $x_1, x_2, ..., x_k$ din spațiul n-dimensional $\mathcal{R}_n$ și teorema 3.11, conform căreia rangul acestei matrici este egal cu dimensiunea acoperirii liniare a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$.

a. *Permutarea coloanelor.* Presupunem că într-o matrice A se permută oricum coloanele ei; arătăm că această operație nu modifică rangul matricii. Într-adevăr, dimensiunea acoperirii liniare a vectorilor $x_1, x_2, ..., x_k$ nu depinde de ordinea în care sînt considerați acești vectori; așadar, rangul matricii nu depinde de ordinea coloanelor ei.

b. *Renunțarea la un multiplu comun nenul al elementelor unei coloane fixate.* Presupunem că $\lambda \neq 0$ este un multiplu comun al elementelor primei coloane a unei matrici A. Prin înlocuirea sistemului de vectori $\lambda x_1, x_2, ..., x_k$ cu sistemul

$x_1, x_2, \ldots, x_k$, dimensiunile acoperirilor liniare ale acestor sisteme sînt aceleași (deoarece acoperirile liniare însele coincid). De aceea rangul matricii A nu se modifică prin această operație elementară.

c. *Adăugarea la o coloană a unei alte coloane înmulțită cu un factor oarecare.* Presupunem că la coloana j a matricii A se adună elementele coloanei m înmulțite cu un același număr λ. Aceasta înseamnă că sistemul de vectori $x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m, \ldots, x_k$ este înlocuit cu sistemul $x_1, \ldots, x_j + \lambda x_m, \ldots, x_m, \ldots, x_k$. Arătăm că acoperirile liniare $\mathfrak{L}_1$ și $\mathfrak{L}_2$ ale acestor sisteme coincid. Într-adevăr, toți vectorii celui de al doilea sistem aparțin acoperirii liniare a primului sistem și de aceea $\mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{L}_1$, conform 2.53 a. Pe de altă parte, egalitatea $x_j = (x_j + \lambda x_m) - \lambda x_m$ arată că vectorul x_j intră în acoperirea liniară a vectorilor celui de al doilea sistem; deoarece toți ceilalți vectori ai primului sistem aparțin de asemenea acestei acoperiri liniare, rezultă că $\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2$. Așadar, $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2$. De aceea rangul matricii A nu se modifică în urma efectuării operației elementare considerate.

d. *Eliminarea unei coloane formată numai din elemente nule.* O astfel de coloană corespunde vectorului nul din spațiul $\mathfrak{R}_n$. Este evident că eliminînd vectorul nul dintr-un sistem de vectori $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (care l-ar conține) nu modifică acoperirea liniară $\mathfrak{L}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$; în același timp nu se modifică nici rangul matricii A.

e. *Eliminarea unei coloane care este combinație liniară a celorlalte coloane.* Justificarea acestei operații elementare a fost dovedită în 3.14.

Subliniem încă o dată că toate propozițiile demonstrate în punctele a—e pentru coloanele matricii A au loc de asemenea și pentru liniile ei.

3.62. *Calculul rangului unei matrici și indicarea unui minor principal.* Arătăm cum se poate calcula rangul unei matrici date A și cum se poate indica un minor principal al ei prin utilizarea operațiilor anterior descrise (a—e). Dacă matricea A este nulă, atunci rangul ei este egal cu zero. Presupunem că în matricea A există cel puțin un element nenul; prin permutarea liniilor și coloanelor putem presupune că acest element se află în colțul din stînga sus al matricii. Scăzînd din fiecare coloană prima coloană înmulțită convenabil cu anumiți coeficienți, toate celelalte elemente ale primei linii devin nule. Nu vom face în continuare alte

schimbări în elementele primei linii și primei coloane (cel mult să le așezăm altfel). Dacă printre celelalte elemente, care nu aparțin primei linii sau primei coloane, nu există elemente nenule, atunci rangul matricii A este egal cu 1. Dacă însă există un element nenul, acesta poate fi adus, prin permutări de linii și coloane, la intersecția liniei a doua cu coloana a doua și ca mai sus, pot fi anulate toate elementele liniei a doua care se află la dreapta lui. Observăm că operațiile indicate nu privesc prima linie și prima coloană. După această operație, linia și coloana a doua sînt de asemenea lăsate pe loc. Continuînd în acest mod, vom aduce matricea A la una din următoarele două forme (socotind că numărul coloanelor este cel mult egal cu numărul liniilor, ceea ce se poate realiza printr-o eventuală transpunere):

$$A_1 = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & \alpha_3 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{k1} & c_{k2} & c_{k3} & \ldots & \alpha_k & 0 & \ldots & 0 \\ c_{k+1,1} & c_{k+1,2} & c_{k+1,3} & \ldots & c_{k+1,k} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & c_{nk} & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

sau

$$A_2 = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & \alpha_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & \alpha_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & c_{nm} \end{Vmatrix}$$

unde numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sînt nenule. În primul caz, rangul matricii A_1 este egal cu k și un minor principal (în matricea transformată) se află în colțul din stînga sus; în al doilea caz, rangul matricii A_2 este egal cu m (numărul coloanelor) și un minor principal, în matricea transformată, se află în primele m linii. Rangul matricii A inițiale este astfel determinat; poziția unui minor principal se poate stabili dacă urmărim în ordine inversă toate operațiile care au fost efectuate asupra matricii A.

Ca exemplu considerăm următoarele matrice cu 6 linii și 5 coloane

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 6 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & -7 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

În linia secundă se află deja un zero; folosind o metodă generală putem obține pe această linie încă de trei ori zero. Pentru comoditate permutăm mai întîi primele două linii și apoi prima coloană cu cea de a doua (astfel încît în colțul din stînga sus să se afle cel mai mic element în valoare absolută, anume -1). Obținem astfel:

$$A \sim \begin{Vmatrix} -2 & -1 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & -7 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -1 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & -7 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -1 & 1 \end{Vmatrix};$$

(semnul $\sim$ între două matrici arată în acest caz egalitatea rangurilor lor). Pentru obținerea a încă trei zerouri în prima linie, înmulțim prima coloană respectiv cu -2, -5, -1 și adunăm la coloanele a doua, a patra și a cincea:

$$A \sim \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & -12 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ -2 & 3 & -7 & 13 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 9 & 3 \end{Vmatrix}$$

Apoi se observă că se obțin cu ușurință elementele nule în linia a treia; mai întîi permutăm această linie cu a doua, apoi adăugăm la coloanele a treia și a patra, coloana a doua înmulțită cu 1 și -3 respectiv:

$$A \sim \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & -12 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ -2 & 3 & -7 & 13 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 9 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & -3 & 3 & 3 \end{Vmatrix} = A_1.$$

Coloanele a patra și a cincea ale matricii A_1 obținute sînt proporționale cu coloana a treia și pot fi eliminate. Matricea obținută în final are evident rangul 3, deci rangul matricii A inițiale este de asemenea egal cu 3. Un minor principal al matricii A_1 este dispus în primele trei linii și primele trei coloane. Urmărind succesiunea transformărilor efectuate asupra matricii inițiale, se observă că aceste transformări nu influențează valoarea absolută a acestui minor. Așadar, în matricea inițială, minorul din colțul din stînga sus (din primele trei linii și primele trei coloane) este principal.

Vezi problema 10 (*începînd din acest moment nu vor mai fi indicate explicit problemele legate de textul propriu-zis*).

PROBLEME

1. Să se demonstreze teorema: pentru ca o matrice $||a_{ij}||$ de ordin m să aibă rangul $r \leqslant 1$ este necesar și suficient să existe numerele $a_1, \ldots, a_m$ și $b_1, b_2, \ldots, b_m$ astfel încît $a_{ij} = a_i b_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$.

2. Într-un spațiu n-dimensional $\mathfrak{R}_n$ se consideră k vectori liniar independenți $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Să se arate că acoperirea liniară $\mathfrak{L}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ este bine definită dacă se cunosc valorile tuturor minorilor de ordin k ai matricii $A = ||a_i^{(j)}||$ formate din coordonatele vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_k$ într-o bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

3. Să se arate că sistemul (2) pentru $k = n$ admite soluția $c_1 = A_{i1}$, $c_2 = A_{i2}, \ldots, c_n = A_{in}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, unde A_{ik} este complementul algebric al elementului a_{ik} (i fixat), dacă rangul matricii A este mai mic decît n.

Observație. Acest fapt permite construirea fără dificultate a soluțiilor nenule ale sistemului (3) în cazul cînd rangul matricii sistemului este egal cu $n - 1$.

4. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12. \end{aligned}$$

5. Să se studieze soluțiile sistemului

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1, \\ x + \lambda y + z &= \lambda, \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

în funcție de parametrul real λ.

6. În ce condiții trei drepte $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ trec prin același punct?

7. În ce condiții n drepte $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, ..., $a_nx + b_ny + c_n = 0$ trec prin același punct?

8. Să se determine sistemul fundamental normal de soluții pentru sistemul de ecuații

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0,$$
$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0,$$
$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0.$$

9. Să se indice soluția generală a sistemului din problema 4 utilizînd sistemul fundamental normal de soluții corespunzătoare sistemului omogen găsit în problema 8.

10. Să se determine rangul și să se indice cîte un minor principal pentru matricile

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

11. Presupunem că într-o matrice A există un minor M de ordin r diferit de zero și că orice minor de ordin $r + 1$ incluzînd toate elementele minorului M este egal cu zero. Să se arate atunci că rangul matricii A este egal cu r.

12. Să se construiască o matrice

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix}$$

cunoscînd valorile minorilor

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = P, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = Q, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = R.$$

13. Pentru un sistem de ecuații avînd matricea coeficienților pătratică

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = b_j \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

să se demonstreze «*alternativa lui Fredholm*»: sau sistemul (9) are soluție și aceasta este unică pentru orice $b_1, \ldots, b_n$ sau sistemul omogen

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

admite soluții nenule.

14. Să se arate că sistemul de ecuații

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,$$
$$a_{n+1,1}x_1 + \ldots + a_{n+1,n}x_n = b_{n+1}$$

în ipoteza că

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

este compatibil dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots a_{1n} & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & \ldots a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & \ldots a_{n+1,1} & b_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

15. (*Problema eliminării necunoscutelor*). Să se arate că sistemul cu parametri $y_1, \ldots, y_k$

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_{11}y_1 + \ldots + b_{1k}y_k + c_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_{n1}y_1 + \ldots + b_{nk}y_k + c_n,$$
$$a_{n+1,1}x_1 + \ldots + a_{n+1,n}x_n = b_{n+1,1}y_1 + \ldots + b_{n+1,k}y_k + c_{n+1}$$

în ipoteza că

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

este compatibil dacă şi numai dacă parametrii $y_1, \ldots, y_k$ verifică relaţia

$$y_1 \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_{11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_{n1} \\ a_{n+1,1} & \ldots & a_{n+1,n} & b_{n+1,1} \end{vmatrix} + \ldots + y_k \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_{nk} \\ a_{n+1,1} & \ldots & a_{n+1,n} & b_{n+1,k} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & c_n \\ a_{n+1,1} & \ldots & a_{n+1,n} & c_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Capitolul 4

FUNCŢII LINIARE DE ARGUMENT VECTORIAL

În cursul general de analiză matematică se studiază funcţii de una sau mai multe variabile reale. De exemplu, în cazul funcţiilor de trei variabile reale se poate vorbi despre funcţii al căror argument este un vector din spaţiul $\mathcal{V}_3$. Vom studia aici funcţii al căror argument va fi vector al unui spaţiu vectorial *arbitrar*. Ne vom limita deocamdată la cele mai simple funcţii de acest tip, anume funcţiile liniare. Vom considera funcţiile liniare *numerice* de argument vectorial, adică funcţii ale căror valori sînt numere şi funcţii *vectoriale* de argument vectorial, ale căror valori sînt vectori.

Funcţiile liniare vectoriale, numite *operatori liniari*, au o importanţă deosebită în algebra liniară şi în aplicaţiile acesteia.

§ 4.1. Forme liniare

4.11. O funcţie numerică $L(x)$ de argument vectorial x, definită pe un spaţiu vectorial $\mathcal{X}$ peste un corp numeric K, se numeşte *formă liniară* dacă ea îndeplineşte următoarele condiţii:

a) $L(x + y) = L(x) + L(y)$ *pentru orice* $x, y \in \mathcal{X}$;

b) $L(\alpha x) = \alpha L(x)$ *pentru orice* $x \in \mathcal{X}$ şi *pentru orice* $\alpha \in \mathcal{X}$.

Cu alte cuvinte, o formă liniară $L(x)$ este un morfism al spaţiului vectorial $\mathcal{X}$ în spaţiul unidimensional $K_1 = K$ (2.71).

Din condiţiile a), b) se obţine imediat prin inducţie formula

$$L(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 L(x_1) + \ldots + \alpha_k L(x_k), \qquad (1)$$

adevărată pentru orice $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{X}$ şi pentru orice numere $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ din K.

4.12. *Exemple.*

a. Într-un spațiu n-dimensional $\mathcal{X}$ se fixează o bază; atunci fiecare vector $x \in \mathcal{X}$ poate fi exprimat prin coordonatele sale $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Funcția L definită prin $L(x) = \xi_1$ (prima coordonată) este evident o formă liniară de x.

b. O formă liniară mai generală în același spațiu este definită prin

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k \xi_k,$$

cu fixarea arbitrară a coeficienților $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

c. În spațiul $K(a, b)$, unde K este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, un exemplu de formă liniară o constituie funcția L dată prin

$$L(x) = x(t_0),$$

unde t_0 este un punct fixat din intervalul $[a, b]$.

d. În același spațiu se poate considera forma liniară de tipul

$$L(x) = \int_a^b l(t)\, x(t)\mathrm{d}t,$$

unde $l(t)$ este o funcție continuă fixată.

e. În spațiul $\mathcal{V}_3$ produsul scalar (x, x_0) al vectorului x cu un vector fixat $x_0 \in \mathcal{V}_3$ este o formă liniară de x.

Formele liniare definite în spații infinit-dimensionale se numesc de obicei *funcționale liniare.*

4.13. Determinăm forma generală a unei forme liniare $f(x)$ într-un spațiu vectorial n-dimensional $\mathcal{X}_n$. Fie $e_1, e_2, \ldots, e_n$ o bază oarecare a spațiului $\mathcal{X}_n$. Notăm numărul $f(e_k)$ prin $l_k (k = 1, 2, \ldots, n)$. Atunci pentru orice $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, în virtutea formulei (1), rezultă

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} l_k \xi_k,$$

adică *valorile formei liniare $f(x)$ se exprimă liniar prin coordonatele vectorului x cu coeficienți fixați $l_1, l_2, \ldots, l_n$.*

Astfel, în exemplul 4.12 b am dat de fapt cea mai generală reprezentare a unei forme liniare într-un spațiu n-dimensional.

4.14. Într-un spațiu vectorial complex $\mathcal{C}$ se poate considera încă un tip de formă liniară, numită *formă liniară de genul II* (sau *formă antiliniară*). Orice formă liniară definită în 4.11 se numește atunci *formă de genul* I. O funcție numerică $L(x)$ de argument x, definită pe un spațiu vectorial complex $\mathcal{C}$, se numește formă liniară de genul **II** dacă ea îndeplinește următoarele condiții:

a) $L(x + y) = L(x) + L(y)$ pentru orice $x, y \in \mathcal{C}$;

b) $L(\alpha x) = \bar{\alpha} L(x)$ pentru orice $x \in \mathcal{C}$ și pentru orice număr $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$; numărul $\bar{\alpha} = \alpha_1 - i\alpha_2$ reprezintă aici conjugatul complex al numărului α.

Formula analoagă lui (1) în cazul unei forme de genul **II** este

$$L(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = \bar{\alpha}_1 L(x_1) + \ldots + \bar{\alpha}_k L(x_k) \qquad (2)$$

pentru orice $x_1, \ldots, x_k$ din $\mathcal{C}$ și pentru orice numere complexe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

4.15. Un exemplu de formă liniară de genul **II** într-un spațiu complex n-dimensional $\mathcal{C}_n$ cu baza $e_1, \ldots, e_n$ îl constituie funcția L definită prin

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k \bar{\xi}_k,$$

unde $l_1, \ldots, l_n$ sînt numere complexe fixate arbitrar, iar $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sînt coordonatele vectorului x relativ la baza $e_1, \ldots, e_n$. Arătăm că această formulă dă reprezentarea generală a unei forme liniare de genul II pe spațiul $\mathcal{C}_n$. Fie $L(x)$ o formă liniară oarecare de genul II; punem $l_1 = L(e_1), \ldots, l_n = L(e_n)$. Atunci pentru orice $x \in \mathcal{C}_n$, aplicînd formula (2), rezultă

$$L(x) = L\left(\sum_{1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{1}^{n} \bar{\xi}_k L(e_k) = \sum_{1}^{n} l_k \bar{\xi}_k,$$

ceea ce trebuia arătat.

§ 4.2. Operatori liniari și scrierea lor matricială

4.21. O formă liniară $L(x)$ definită într-un spațiu vectorial $\mathfrak{X}$ este așa cum am văzut, morfism de la spațiul $\mathfrak{X}$ la spațiul unidimensional K_1.

Considerăm acum un morfism $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ al unui spațiu vectorial $\mathfrak{X}$ în orice spațiu liniar $\mathfrak{Y}$ peste același corp K. Vom scrie uneori pe scurt $\mathcal{A}x$ în loc de $\mathcal{A}(x)$. Conform definiției, avem

a) $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$ pentru orice x, y din $\mathfrak{X}$;

b) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha \mathcal{A}x$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ și pentru orice α.

Ca și pentru forme liniare, din condițiile a), b) rezultă formula mai generală

c) $\mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \ldots + \alpha_k \mathcal{A}x_k$ pentru orice $x_1, \ldots, x_k$ din $\mathfrak{X}$ și pentru orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ din K.

Morfismul $\mathcal{A}$ se mai numește, așa cum am indicat în 2.71, *operator liniar* acționînd de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Y}$ (sau aplicînd spațiul $\mathfrak{X}$ în spațiul $\mathfrak{Y}$).

4.22. *Exemple*

a. Operatorul care asociază fiecărui vector x al spațiului $\mathfrak{X}$ vectorul nul din spațiul $\mathfrak{Y}$ este în mod evident un operator liniar, numit *operatorul nul*.

b. Fie $\mathcal{A}$ un operator liniar acționînd de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Y}$. Definim $\mathcal{B}x = -\mathcal{A}x$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}$. Operatorul $\mathcal{B}$ astfel obținut este de asemenea un operator liniar, care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$; el se numește *operatorul opus* lui $\mathcal{A}$.

c. Presupunem că vectorilor $e_1, \ldots, e_n$ ai unei baze a spațiului $\mathfrak{X}$ li se asociază arbitrar vectorii $f_1, \ldots, f_n$ din spațiul $\mathfrak{Y}$. *Atunci există un operator liniar și unul singur $\mathcal{A}$ aplicînd $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$ astfel încît $\mathcal{A}e_k = f_k$ $(k = 1, \ldots n)$.*

Într-adevăr, dacă operatorul căutat $\mathcal{A}$ există, atunci pentru orice vector $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in \mathfrak{X}$ are loc egalitatea

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathcal{A}e_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k,$$

care demonstrează unicitatea operatorului $\mathcal{A}$. Pe de altă parte, pentru orice $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in \mathfrak{X}$ putem pune prin definiție

$$\mathcal{A}x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k.$$

Operatorul $\mathcal{A}$ astfel obținut este evident un operator liniar care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$ și $\mathcal{A}e_k = f_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, ceea ce trebuia arătat.

d. Asociind oricărui vector x dintr-un spațiu $\mathfrak{X}$ același vector x, se obține un operator liniar $\mathcal{E}$ acționînd de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{X}$. Acest operator se numește *operatorul identic* sau *operatorul unitate* al spațiului $\mathfrak{X}$.

4.23. Scrierea matricială a operatorilor liniari. Fie $\mathcal{A}$ un operator liniar acționînd de la un spațiu $\mathfrak{X}$ de dimensiune n într-un spațiu $\mathfrak{Y}$ de dimensiune m. Fixăm în spațiul $\mathfrak{X}$ o bază $e_1, \ldots, e_n$ și în spațiul $\mathfrak{Y}$ o bază $f_1, \ldots, f_m$.

Vectorul e_1 este dus prin operatorul $\mathcal{A}$ într-un anumit vector $\mathcal{A}e_1$ din $\mathfrak{Y}$, care poate fi exprimat liniar cu ajutorul vectorilor bazei din $\mathfrak{Y}$:

$$\mathcal{A}e_1 = a_1^{(1)} f_1 + a_2^{(1)} f_2 + \ldots + a_m^{(1)} f_m.$$

În mod analog acționează operatorul $\mathcal{A}$ pe ceilalți vectori din baza fixată în $\mathfrak{X}$:

$$\mathcal{A}e_2 = a_1^{(2)} f_1 + a_2^{(2)} f_2 + \ldots + a_m^{(2)} f_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathcal{A}e_n = a_1^{(n)} f_1 + a_2^{(n)} f_2 + \cdots + a_m^{(n)} f_m$$

Aceste formule se pot scrie pe scurt

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(j)} f_i \quad (j = 1,2, \ldots, n). \tag{3}$$

Coeficienții $a_i^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ determină o matrice cu m linii și n coloane sau pe scurt o $m \times n$-matrice

$$A = A_{(e;f)} = \begin{Vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \ldots & a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \ldots & a_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m^{(1)} & a_m^{(2)} & \ldots & a_m^{(n)} \end{Vmatrix}$$

care se numește *matricea operatorului* $\mathcal{A}$ *în bazele* $\{e\} = \{e_1, ..., e_n\}$ și $\{f\} = \{f_1, ..., f_m\}$. Coloanele acestei matrici sînt coordonatele vectorilor $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, ..., \mathcal{A}e_n$ relativ la baza $f_1, ..., f_m$.

Fie acum $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ un vector oarecare și $y = \mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{m} \eta_i f_i$; explicităm modul în care coordonatele η_i ale vectorului y se exprimă prin coordonatele ξ_j ale vectorului x. Avem

$$y = \sum_{i=1}^{m} \eta_i f_i = \mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathcal{A}e_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{i=1}^{m} a_i^{(j)} f_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i^{(j)} \xi_j\right) f_i.$$

Egalînd coeficienții vectorului f_i, rezultă

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^{(j)} \xi_j \quad (i = 1, 2, ..., m). \tag{4}$$

Mai explicit

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= a_1^{(1)} \xi_1 + a_1^{(2)} \xi_2 + ... + a_1^{(n)} \xi_n, \\ \eta_2 &= a_2^{(1)} \xi_1 + a_2^{(2)} \xi_2 + ... + a_2^{(n)} \xi_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_m &= a_m^{(1)} \xi_1 + a_m^{(2)} \xi_2 + ... + a_m^{(n)} \xi_n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Așadar, cunoscînd matricea operatorului $\mathcal{A}$ în bazele $\{e\}$, $\{f\}$, se poate determina rezultatul aplicării operatorului la orice vector $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ din spațiul $\mathfrak{X}$: *coordonatele vectorului* $y = \mathcal{A}x$ *se exprimă liniar prin coordonatele vectorului* x după formulele (5). Notăm că *matricea coeficienților în formulele* (5) *coincide cu matricea* $A_{(e,f)}$.

Fie acum $||a_i^{(j)}||$ o matrice $m \times n$-matrice oarecare (indicele inferior indică numărul liniei și cel superior numărul coloanei). Dacă $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, atunci putem construi vectorul $y = \sum_{i=1}^{m} \eta_i f_i$ după formulele (5).

Se poate arăta ușor că operatorul $\mathcal{A}$ care asociază vectorului x vectorul y ca mai sus, este un operator liniar. Construim matricea operatorului $\mathcal{A}$ în bazele fixate $\{e\}, \{f\}$. Vectorul e_1 are coordonatele $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = ... = \xi_n = 0$; în virtutea formulelor (5) coordonatele vectorului $\mathcal{A}e_1$ vor fi numere $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, ..., a_n^{(1)}$ astfel încît

$$\mathcal{A}e_1 = a_1^{(1)} e_1 + a_2^{(1)} e_2 + ... + a_n^{(1)} e_n.$$

În mod analog,

$$\mathcal{A}e_j = a_1^{(j)} e_1 + a_2^{(j)} e_2 + ... + a_n^{(j)} e_n \quad (j = 1, 2, ..., m).$$

Prin urmare, matricea operatorului $\mathcal{A}$ coincide cu matricea inițial considerată $||a_i^{(j)}||$.

Astfel, *orice* $m \times n$*-matrice este matricea unui anumit operator liniar* $\mathcal{A}$ *acționînd de la un spațiu* n*-dimensional* $\mathfrak{X}$ *la un spațiu* m*-dimensional* $\mathfrak{Y}$ *cu bazele fixate* $e_1, ..., e_n$ *în* $\mathfrak{X}$ *și* $f_1, ..., f_m$ *în* $\mathfrak{Y}$.

Am arătat așadar că între operatorii liniari care acționează de la spațiul $\mathfrak{X}$ (cu baza fixată $e_1, ..., e_n$) la spațiul $\mathfrak{Y}$ (cu baza fixată $f_1, ..., f_m$) și $m \times n$-matricile cu coeficienți din corpul K *există o corespondență biunivocă* explicitată prin formulele (3) sau formulele echivalente (4).

Se poate observa că operatorul $\mathcal{A}$ poate fi determinat (în mod unic) cunoscînd matricea $A = ||a_i^{(j)}||$, prin aplicarea directă a formulelor (5). În aceste formule coloana j a matricii A este formată din coordonatele vectorului $\mathcal{A}e_j$.

4.24. *Exemple*

a. Matricea operatorului nul (4.22 a) în orice bază a lui $\mathfrak{X}$ și orice bază a lui $\mathfrak{Y}$, are toate elementele egale cu zero.

b. Dacă $||a_i^{(j)}||$ este matricea unui operator $\mathcal{A}$, atunci matricea operatorului opus (4.22 b) este în mod evident $||-a_i^{(j)}||$.

c. Presupunem că $m \geqslant n$ și că operatorul $\mathcal{A}$ transformă vectorii unei baze $e_1, ..., e_n$ a spațiului $\mathfrak{X}$ în vectori liniar independenți $f_1, ..., f_n$ din spațiul $\mathfrak{Y}$. Completăm vectorii $f_1, ..., f_n$ pînă la o bază a lui $\mathfrak{Y}$ cu vectorii $f_{n+1}, ..., f_m$. Atunci matricea

operatorului $\mathcal{A}$ în bazele $e_1, \ldots, e_n$ și $f_1, \ldots, f_m$ va avea, în mod evident, forma următoare

$$m\left\{\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \hline\end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{|cccc|}\hline 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \begin{matrix} \overbrace{}^{n} \\ n \end{matrix}.$$

d. În particular, matricea operatorului identic (4.22 d) într-o bază $e_1, \ldots, e_n$ a unui spațiu $\mathfrak{X}$ (ca domeniu de definiție) și în aceeași bază în $\mathfrak{X}$ (ca domeniu de valori), are forma

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (5')$$

Matricea E se numește *$n \times n$-matricea identitate* sau *matricea unitate* de ordinul n.

§ 4.3. Operații asupra operatorilor liniari

Considerăm aici operațiile de adunare a operatorilor, de înmulțire a unui operator cu un număr și de înmulțire (compunere) a operatorilor. Doi operatori $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ acționînd de la spațiul $\mathfrak{X}$ la spațiul $\mathfrak{Y}$ se consideră egali și se scrie $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ dacă $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}$.

4.31. *Adunarea operatorilor.* Presupunem dați doi operatori liniari $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ care aplică spațiul $\mathfrak{X}$ în spațiul $\mathfrak{Y}$. Operatorul $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ se definește prin formula

$$\mathcal{C}x = (\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x, \text{ pentru orice } x. \qquad (6)$$

Este evident că operatorul $\mathcal{C}$ aplică spațiul $\mathfrak{X}$ în spațiul $\mathfrak{Y}$. Arătăm că el este un operator liniar. Fie $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$;

atunci

$$\mathcal{C}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \mathcal{B}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) =$$
$$= \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \alpha_2 \mathcal{A}x_2 + \alpha_1 \mathcal{B}x_1 + \alpha_2 \mathcal{B}x_2 = \alpha_1(\mathcal{A}x_1 + \mathcal{B}x_1) +$$
$$+ \alpha_2(\mathcal{A}x_2 + \mathcal{B}x_2) = \alpha_1 \mathcal{C}x_1 + \alpha_2 \mathcal{C}x_2.$$

Astfel, ambele condiții 4.21, a)—b) sînt îndeplinite.

Operatorul liniar $\mathcal{C}$ definit prin relația (6) se numește suma operatorilor $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$.

Se verifică ușor următoarele egalități:

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}, \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}), \\ \mathcal{A} + 0 = \mathcal{A}, \\ \mathcal{A} + (-\mathcal{A}) = 0. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Aici $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sînt operatori liniari oarecare, 0 este operatorul nul (4. 22 a), $-\mathcal{A}$ este operatorul opus lui $\mathcal{A}$, adică operatorul care asociază oricărui vector $x \in \mathfrak{X}$ vectorul $-\mathcal{A}x$ (4.22 b).

4.32. *Înmulțirea unui operator cu un număr.* Dacă $\mathcal{A}$ este un operator liniar acționînd de la spațiul $\mathfrak{X}$ la spațiul $\mathfrak{Y}$ și dacă λ este un număr oarecare din corpul K atunci operatorul $\mathcal{B} = \lambda\mathcal{A}$, numit produsul operatorului $\mathcal{A}$ cu numărul λ, se definește prin formula

$$\mathcal{B}x = (\lambda\mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x), \text{ pentru orice } x \in \mathfrak{X}.$$

Se verifică ușor că în 4.31 operatorul astfel construit este liniar. În plus, au loc următoarele relații

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1(\lambda_2\mathcal{A}) = (\lambda_1\lambda_2)\mathcal{A}, \\ 1 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{A} + \lambda_2\mathcal{A}, \\ \lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \lambda\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}. \end{array}\right\} \qquad (7')$$

Relațiile (7)—(7') arată că *mulțimea tuturor operatorilor liniari, care acționează de la un spațiu vectorial $\mathfrak{X}$ la un spațiu vectorial $\mathfrak{Y}$, formează un nou spațiu vectorial.*

4.33. *Produsul (compunerea) de operatori.* Dacă $\mathcal{A}$ este un operator liniar de la spațiul $\mathfrak{X}$ la spațiul $\mathfrak{Y}$ și $\mathcal{B}$ este un operator liniar de la spațiul $\mathfrak{Y}$ la spațiul $\mathfrak{Z}$ (toate spațiile

UNIV. „AL. I. CUZA" BIBL. DE FIZICĂ

fiind peste același corp de numere K), atunci se poate defini operatorul $\mathfrak{L} = \mathfrak{B}\mathcal{A}$ numit *produsul* (*compunerea*) operatorului $\mathfrak{B}$ cu operatorul $\mathcal{A}$, ca operator de la spațiul $\mathfrak{X}$ la spațiul $\mathfrak{Z}$, dat prin formula

$$\mathfrak{L}x = (\mathfrak{B}\mathcal{A})x = \mathfrak{B}(\mathcal{A}x)$$

(adică mai întîi se aplică operatorul $\mathcal{A}$ vectorului x și apoi asupra rezultatului, ca vector din $\mathfrak{Y}$, i se aplică operatorul $\mathfrak{B}$). Operatorul astfel construit este de asemenea liniar, deoarece

$$\mathfrak{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \mathfrak{B}[\mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \mathfrak{B}(\alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \alpha_2 \mathcal{A}x_2) =$$

$$= \alpha_1 \mathfrak{B}\mathcal{A}x_1 + \alpha_2 \mathfrak{B}\mathcal{A}x_2 = \alpha_1 \mathfrak{L}x_1 + \alpha_2 \mathfrak{L}x_2.$$

4.34. Se probează ușor următoarele relații:

a) $\lambda(\mathfrak{B}\mathcal{A}) = (\lambda\mathfrak{B})\mathcal{A}$ pentru orice operatori $\mathcal{A}$ și $\mathfrak{B}$ cu proprietățile indicate și pentru orice $\lambda \in K$;

b) $(\mathcal{A} + \mathfrak{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathfrak{B}\mathcal{C}$ pentru orice operatori $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$ de la spațiul $\mathfrak{Y}$ la spațiul $\mathfrak{Z}$ și pentru orice $\mathcal{C}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$;

c) $\mathcal{A}(\mathfrak{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathfrak{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}$ pentru orice operatori $\mathfrak{B}$ și $\mathcal{C}$ acționînd de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Y}$ și pentru orice operator $\mathcal{A}: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$;

d) $(\mathcal{A}\mathfrak{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathfrak{B}\mathcal{C})$ pentru orice operatori $\mathcal{C}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{B}: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$, $\mathcal{A}: \mathfrak{Z} \to \mathfrak{W}$.

Verificăm, de exemplu, relația d). Conform definiției egalității a doi operatori, trebuie arătat că pentru orice vector $x \in \mathfrak{X}$ avem

$$[\mathcal{A}(\mathfrak{B}\mathcal{C})]x = [(\mathcal{A}\mathfrak{B})\mathcal{C}]x.$$

Conform definiției produsului de operatori, avem

$$[\mathcal{A}(\mathfrak{B}\mathcal{C})]x = \mathcal{A}[(\mathfrak{B}\mathcal{C})x] = \mathcal{A}[\mathfrak{B}(\mathcal{C}x)],$$

$$[(\mathcal{A}\mathfrak{B})\mathcal{C}]x = (\mathcal{A}\mathfrak{B})(\mathcal{C}x),$$

de unde rezultă egalitatea necesară.

Celelalte egalități se demonstrează în mod similar.

§ 4.4. Operații corespunzătoare asupra matricilor

Explicităm modul cum operațiile asupra operatorilor descrise în § 4.3 se reflectă asupra matricilor acestor operatori.

4.41. *Adunarea operatorilor.* Fie $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$ doi operatori definiți pe spațiul $\mathfrak{X}$ cu valori în spațiul $\mathfrak{Y}$. Fie $e_1, \ldots, e_n$ o bază a lui $\mathfrak{X}$ și $f_1, \ldots, f_m$ o bază în $\mathfrak{Y}$ și presupunem că operatorului $\mathcal{A}$ i se asociază în aceste baze matricea $A = ||a_i^{(j)}||$, iar operatorului $\mathfrak{B}$, matricea $\mathfrak{B} = ||b_i^{(j)}||$; așadar,

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(j)} f_i, \quad \mathfrak{B}e_j = \sum_{i=1}^{m} b_i^{(j)} f_i \qquad (j = 1,2, \ldots, n).$$

În acest caz

$$(\mathcal{A} + \mathfrak{B})e_j = \mathcal{A}e_j + \mathfrak{B}e_j = \sum_{i=1}^{m} (a_i^{(j)} + b_i^{(j)}) f_i,$$

de unde rezultă că operatorului $\mathcal{A} + \mathfrak{B}$ îi corespunde matricea $||a_i^{(j)} + b_i^{(j)}||$. Această matrice se numește *suma matricilor* $||a_i^{(j)}||$ și $||b_i^{(j)}||$. Astfel, suma $A + B$ este definită pentru orice două matrici A, B avînd același tip (același număr de linii și același număr de coloane).

4.42. *Înmulțirea unui operator cu un număr.* În aceleași condiții

$$(\lambda\mathcal{A})e_j = \lambda(\mathcal{A}e_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda a_i^{(j)} f_i.$$

Așadar, operatorului $\lambda\mathcal{A}$ îi corespunde matricea $||\lambda a_i^{(j)}||$, obținută prin înmulțirea tuturor elementelor matricii $||a_i^{(j)}||$ cu numărul λ. Această matrice se numește *produsul matricii* $||a_i^{(j)}||$ *cu numărul* λ.

Deoarece $m \times n$-matricile și operatorii liniari acționînd de la un spațiu n-dimensional la un spațiu m-dimensional se corespund în mod biunivoc (4.23), operațiilor cu operatori le corespund operații corespunzătoare, cu aceeași denumire și pentru matrici; rezultă că operațiile cu matrici satisfac de asemenea regulile (6)—(7), fapt care se poate ușor arăta și în mod direct. În acest mod, rezultă că *mulțimea tuturor* $m \times n$*-matricilor formează un spațiu vectorial*. Prin însuși construcția lui, acest spațiu este izomorf cu spațiul vectorial al tuturor operatorilor acționînd de la spațiul n-dimensional $\mathfrak{X}$ la spațiul m-dimensional $\mathfrak{Y}$.

4.43. *Înmulțirea operatorilor.* Fie spațiile $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; în spațiul $\mathfrak{X}$ considerăm o bază $e_1, \ldots, e_n$, în spațiul $\mathfrak{Y}$ baza $f_1, \ldots, f_m$

și în $\mathfrak{B}$ baza $g_1, \ldots, g_q$. Presupunem că operatorul $\mathcal{B} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ are $m \times n$-matricea $||b_i^{(j)}||$, adică

$$\mathcal{B}\, e_j = \sum_{i=1}^{m} b_i^{(j)} f_i \quad (j = 1, \ldots, n),$$

iar operatorul $\mathcal{A} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ are $q \times m$-matricea $||a_k^{(j)}||$ astfel încît

$$\mathcal{A} f_i = \sum_{k=1}^{q} a_k^{(i)} g_k \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Pentru produsul $\mathcal{L} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ avem

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})e_j = \mathcal{A}(\mathcal{B}\, e_j) = \mathcal{A} \sum_{i=1}^{m} b_i^{(j)} f_i = \sum_{i=1}^{m} b_i^{(j)}\, \mathcal{A} f_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} b_i^{(j)} \sum_{k=1}^{q} a_k^{(i)} g_k = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)}\, b_i^{(j)} \right) g_k.$$

Așadar, elementele $p_k^{(j)}$ ale matricii P a operatorului $\mathcal{L} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ au forma

$$p_k^{(j)} = \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)}\, b_i^{(j)} \quad (j = 1,2, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, q). \qquad (8)$$

Am obținut astfel rezultatul căutat. Acesta poate fi exprimat astfel: *elementul matricii P situat pe linia k și coloana j este egal cu suma produselor tuturor elementelor liniei k a matricii A cu elementele corespunzătoare ale coloanei j din matricea B.*

Matricea $P = ||p_k^{(j)}||$ care se obține din matricile $||a_k^{(i)}||$ și $||b_i^{(j)}||$ prin formula (8) se numește *produsul primei matrici prin cea de-a doua.*

Trebuie observat că numărul coloanelor primei matrici este în mod necesar egal cu numărul liniilor celei de a doua (altfel produsul nu are sens). În acest caz, matricea-produs are atîtea linii cîte linii are prima matrice și atîtea coloane cîte coloane are a doua matrice.

Indicăm o scriere mai sugestivă: produsul unei $q \times l$-matrici A cu o $m \times n$-matrice B este definit dacă $l = m$ și în acest caz produsul AB este o $q \times n$-matrice. Ambele produse AB și BA sînt definite dacă $l = m$, $q = n$; în acest caz AB este o $n \times n$-matrice pătratică iar BA este o $m \times m$-

matrice pătratică. Dacă $n = m = p = q$, adică A și B sînt ambele matrici pătratice de ordin n, atunci AB și BA sînt de asemenea matrici pătratice de ordin n. Totuși ele pot să nu fie egale. De exemplu

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Așadar, înmulțirea matricilor pătratice este în general necomutativă. În ceea ce privește regulile de asociativitate și distributivitate, situația este mai bună: înmulțirea operatorilor satisface regulile de asociativitate și distributivitate, așa cum am văzut în 4.34; deoarece matricile și operatorii sînt în corespondență biunivocă și produsului matricilor îi corespunde produsul operatorilor, rezultă că produsul de matrici este asociativ și distributiv în raport cu suma.

4.44. *Exemple*

În exemplele care urmează, indicii elementelor matricilor se scriu jos, astfel încît elementul a_{jk} al matricii $A = ||a_{jk}||$ se află la intersecția liniei j cu coloana k. Formula $P = AB$ (vezi (8) de la punctul 4.43) se scrie cu aceste notații sub forma

$$p_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ki}\, b_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, q).$$

a. Înmulțim $m \times n$-matricea $A = ||a_{jk}||$ la stînga cu $m \times m$-matricea $B_{rs} = ||b_{jk}||$, în care toate elementele b_{jk} sînt egale cu 0, în afara unui singur element, b_{rs}, egal cu 1. Conform regulii generale (8) se obține $m \times n$-matricea

$$B_{rs}\, A = (r) \begin{Vmatrix} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ldots 1 \ldots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Vmatrix}^{(s)} \begin{Vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{s1} a_{s2} \ldots a_{sn} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix} = (r) \begin{Vmatrix} 0 \;\; 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{s1} a_{s2} \ldots a_{sn} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 \;\; 0 \ldots 0 \end{Vmatrix},$$

astfel încît pe linia r a matricii $B_{rs}A$ se află elementele liniei s a matricii A, iar celelalte elemente ale matricii $B_{rs}A$ sînt egale cu 0.

b. Înmulțim $m \times n$-matricea $A = ||a_{jk}||$ la dreapta cu $n \times n$-matricea $C_{qt} = ||c_{jk}||$ în care toate elementele c_{jk} sînt egale cu 0 în afara singurului element c_{qt}, egal cu 1. Conform regulii generale (8) se obține $m \times n$-matricea

$$AC_{qt} = \begin{Vmatrix} a_{11} \dots a_{1q} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2q} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mq} \dots a_{mn} \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ (q) \end{matrix} \begin{Vmatrix} \\ \\ \\ \\ \dots 1 \dots \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ (t) \end{matrix} = \begin{Vmatrix} 0 \dots a_{1q} \dots 0 \\ 0 \dots a_{2q} \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ 0 \dots a_{mq} \dots 0 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ (t) \end{matrix},$$

astfel încît în coloana t a matricii AC_{qt} se află elementele coloanei q a matricii A și toate celelalte elemente ale matricii AC_{qt} sînt egale cu 0.

c. Cu notațiile anterioare, avem

$$B_{rs}AC_{qt} = (r) \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & a_{sq} & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ (t) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix},$$

astfel încît prin operația $B_{rs}AC_{qt}$ aplicată unei $m \times n$-matrici, se obține o $m \times n$-matrice ale cărei elemente sînt toate nule, cu excepția celui aflat pe linia r și coloana t, care este egal cu a_{sq}.

d. Cu ce $m \times m$-matrice D trebuie să înmulțim la stînga o $m \times n$-matrice A astfel încît matricea DA să coincidă cu matricea obținută din A prin permutarea liniilor r și s?

Exemplul de la pct. **a** arată cum se obține matricea în care linia r este tocmai linia s a matricii A, prin înmulțire la stînga cu $m \times m$-matricea B_{rs}. Dar celelalte linii sînt

egale cu 0. Așadar, pentru a obține matricea căutată trebuie înmulțită matricea A la stînga cu $m \times m$-matricea

$$D = B_{rs} + B_{sr} + \sum_{\substack{j \neq s \\ j \neq s}} B_{jj}.$$

e. Cu ce $n \times n$-matrice G trebuie înmulțită la dreapta $m \times n$-matricea A astfel încît AG să coincidă cu matricea obținută din A prin permutarea coloanelor q și t?

Raționînd în mod similar se obține

$$G = C_{qt} + C_{tq} + \sum_{\substack{k \neq q \\ k \neq t}} C_{kk}.$$

f. Cu ce $m \times m$-matrice F trebuie să înmulțim la stînga o $m \times n$-matrice A astfel încît matricea care se obține să coincidă cu matricea obținută din A în care linia r este adunată la linia s înmulțită cu coeficientul λ?

Conform celor spuse la punctul **a** răspunsul este imediat: $F = E + \lambda B_{rs}$ (E fiind matricea unitate).

g. Cu ce $n \times n$-matrice H trebuie înmulțită la dreapta o $m \times n$-matrice A astfel încît matricea care se obține să coincidă cu matricea obținută din A în care la coloana t este adăugată coloana q înmulțită cu coeficientul μ?

Răspunsul este evident: $H = E + \mu C_{qt}$.

§ 4.5. Alte proprietăți legate de înmulțirea matricilor

4.51. *Înmulțirea matricilor descompuse în blocuri.* În anumite situații este comodă descompunerea matricilor factori în blocuri și efectuarea înmulțirii pe blocuri.

Presupunem că sînt fixate o $m \times n$-matrice A și o $n \times p$-matrice B, care sînt descompuse în blocuri astfel:

$$A = (m) \begin{Vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}}^{n} & \dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{Vmatrix}, \quad B = (n) \begin{Vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix}}^{p} & \dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{Vmatrix}.$$

Presupunem că în fiecare linie-bloc a matricii A sînt tot atîtea blocuri cîte sînt în fiecare coloană-bloc a matricii B, deci lățimea oricărui bloc A_{jk} al matricii A coincide cu înălțimea oricărui bloc B_{ks} al matricii B. Atunci toate produsele $A_{jk}B_{ks}$ au sens și sînt matrici dreptunghiulare ale căror dimensiuni depind de indicii j și s, dar nu depind de indicele k.

Regula de înmulțire a matricilor A și B ca mai sus este următoarea: *matricea AB se alcătuiește din blocuri construite din blocurile matricilor A și B tot astfel cum elementele matricii AB se alcătuiesc din elementele matricilor A și B:*

$$AB = \left\| \begin{array}{c|c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + \ldots & A_{11}B_{12} + \ldots & \ldots \\ \hline A_{21}B_{11} + \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{array} \right\|.$$

Într-adevăr, fie i numărul liniei-bloc a matricii A care conține însăși linia k a matricii A și fie j numărul coloanei-bloc a matricii B care conține însăși coloana q a matricii B. Conform regulii generale 4.43 elementele matricii $P = AB$ au forma

$$p_{kq} = a_{k1}b_{1q} + \ldots + a_{kn}\,b_{nq} = (a_{k1}b_{1q} + \ldots + a_{kp}b_{pq}) + \ldots + \\ + (a_{kr}b_{rq} + \ldots + a_{kn}b_{nq}),$$

unde parantezele sînt compuse în corespondență cu lățimea blocurilor matricii A (și cu înălțimea blocurilor matricii B). Vom numerota liniile și coloanele blocurilor cu aceleași numere ca în însăși matricea A. În prima paranteză se află elementul de la intersecția liniei k cu coloana q din blocul $A_{i1}B_{1j}$, în a doua elementul situat la intersecția liniei k cu coloana j a blocului $A_{i2}B_{2j}$ etc.; în final se obține elementul care este situat la intersecția liniei k cu coloana q ale blocului $A_{i1}B_{1j} + \ldots + A_{ir}B_{rj}$, ceea ce trebuia arătat.

4.52. ***Înmulțirea matricilor cvasidiagonale.*** O matrice se numește *cvasidiagonală* (sau *bloc-diagonală*) dacă ea are forma

$$A = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & & & \\ \hline & A_{22} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & A_{ss} \end{array} \right\|,$$

unde blocurile nenotate sînt formate numai din elemente egale cu zero. Presupunem că blocul A_{kk} este o $m_k \times n_k$-matrice ($k = 1, \ldots, s$). Considerăm matricea cvasidiagonală

$$B = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & & & \\ \hline & B_{22} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & B_{ss} \end{array} \right\|,$$

unde blocul B_{kk} este o $n_k \times p_k$-matrice ($k = 1, \ldots, s$). Matricile A și B pot fi înmulțite conform regulii 4.51 care conduce în acest caz la rezultatul

$$AB = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} A_{11}B_{11} & & & \\ \hline & A_{22}B_{22} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & A_{ss}B_{ss} \end{array} \right\|. \qquad (9)$$

Astfel, în cazul considerat matricea AB este tot o matrice cvasidiagonală în care blocul $A_{kk}B_{kk}$ are m_k linii și p_k coloane.

4.53. *Produsul a două matrici transpuse.* Fie o $m \times n$-matrice $A = ||a_{jk}||$. Se numește *transpusă a lui* A $n \times m$-matricea $A' = ||a'_{pq}||$ pentru care

$$a'_{pq} = a_{qp} \qquad (p = 1, ..., n;\ q = 1, ..., m).$$

Fie A o $m \times n$-matrice și B o $n \times p$-matrice. Așadar, produsul $P = AB$ este bine definit și este o $m \times p$-matrice. Pe de altă parte, este definit și produsul matricilor transpuse $B'A'$, care este o $p \times m$-matrice. Vom arăta că are loc formula

$$B'A' = (AB)'. \tag{10}$$

Pentru demonstrație notăm elementele matricilor A, B, $P = AB$, A', B', P' respectiv prin a_{ij}, b_{ij}, p_{ij}, $a'_{ij} = a_{ji}$ $b'_{ij} = b_{ji}$, $p'_{ij} = p_{ji}$. Egalitatea (8), care definește elementele p_{ik}, poate fi scrisă sub forma

$$p_{ik} = p'_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ji}b'_{kj} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}a'_{ji}.$$

Însumarea se efectuează după indicele j pentru indicii i, k fixați. Indicii fixați arată că pentru a forma elementul p'_{ki}, în matricea B' se folosește linia k iar în matricea A' se folosește linia i. Ca rezultat al sumei produselor elementelor corespunzătoare se obține elementul p'_{ki} aflat la intersecția liniei k cu coloana i a matricii P'. Dar prin definiția produsului de matrici, aceasta înseamnă că matricea P' este produsul matricii B' cu matricea A' și egalitatea (10) este astfel stabilită.

4.54. *Minorii produsului a două matrici.* Considerăm $m \times n$-matricea $A = ||a_{jk}||$ și $n \times p$-matricea $B = ||b_{jk}||$; construim $m \times p$-matricea $P = AB = ||p_{jk}||$. Fixăm în matricea P liniile cu numerele $\alpha_1 \leqslant ... \leqslant \alpha_k$ și coloanele cu numerele $\beta_1 \leqslant ... \leqslant \beta_k$ ($k \leqslant m$, $k \leqslant p$) și ne propunem să calculăm minorul $M = M^{\alpha_1 ... \alpha_k}_{\beta_1 ... \beta_k}(AB)$, construit pe liniile și coloanele fixate

$$M = {}^{\alpha_1, ..., \alpha_k}_{\beta_1, ..., \beta_k}(AB) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 1}b_{1\beta_1} + ... + a_{\alpha_1 n}b_{n\beta_1} & ... & a_{\alpha_1 1}b_{1\beta_k} + ... + a_{\alpha_1 n}b_{n\beta_k} \\ a_{\alpha_2 1}b_{1\beta_1} + ... + a_{\alpha_2 n}b_{n\beta_1} & ... & a_{\alpha_2 1}b_{1\beta_k} + ... + a_{\alpha_2 n}b_{n\beta_k} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{\alpha_k 1}b_{1\beta_1} + ... + a_{\alpha_k n}b_{n\beta_1} & ... & a_{\alpha_k 1}b_{1\beta_k} + ... + a_{\alpha_k n}b_{n\beta_k} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Pentru calcule se folosește proprietatea liniară a determinanților (1.44). Coloana minorului M cu numărul ν este suma a k coloane „elementare" cu elementele de forma $a_{\alpha j}b_{i\beta\nu}$ (unde indicii de coloană i și ν sînt fixați iar indicele de linie j variază de la 1 la k). De aceea întreg minorul M este egal cu suma a k^k determinați „elementari", constînd numai din coloane „elementare". În fiecare din coloanele elementare, factorul $b_{j\beta\nu}$ nu se modifică în lungul acelei coloane și el poate fi scos ca factor. După această operație fiecare din determinanții „elementari" capătă forma următoare:

$$b_{i_1\beta_1}\, b_{i_2\beta_2} \, ... \, b_{i_k\beta_k} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 i_1} & a_{\alpha_1 i_2} & ... & a_{\alpha_1 i_k} \\ a_{\alpha_2 i_1} & a_{\alpha_2 i_2} & ... & a_{\alpha_2 i_k} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{\alpha_k i_1} & a_{\alpha_k i_2} & ... & a_{\alpha_k i_k} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

unde $i_1, ..., i_k$ sînt numere cuprinse între 1 și n. Dacă printre aceste numere unele coincid, atunci determinantul elementar corespunzător este egal cu 0. Așa se va întîmpla dacă $n < k$. De aceea dacă în matricea AB există minori de ordin $k > n$, atunci toți acești minori sînt nuli.

Revenind la cazul $k \leqslant n$, se observă că trebuie considerați acei determinanți elementari pentru care toți indicii $i_1, ..., i_k$ sînt distincți. În acest caz determinantul

$$M^{\alpha_1, ..., \alpha_n}_{i_1, ..., i_n} = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1 i_1} & a_{\alpha_1 i_2} & ... & a_{\alpha_1 i_k} \\ a_{\alpha_2 i_1} & a_{\alpha_2 i_2} & ... & a_{\alpha_2 i_k} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{\alpha_k i_1} & a_{\alpha_k i_2} & ... & a_{\alpha_k i_k} \end{vmatrix}$$

coincide pînă la semn cu minorul $M_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$, unde $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_k$ sînt indicii $i_1, \ldots, i_k$ ordonați în ordine crescătoare. Precizăm acum ce semn trebuie luat în fața minorului $M_{i_1 \ldots i_n}^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, pentru a obține exact minorul $M_{j_1 \ldots j_k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$. Pentru aceasta vom permuta succesiv în minorul $M_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$ coloanele vecine pentru a obține în final dispunerea normală (care coincide cu cea a coloanelor în însăși matricea A). Pentru fiecare permutare a două coloane vecine minorul $M_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ își schimbă semnul; pe de altă parte, numărul de inversiuni în permutarea indicilor $i_1, i_2, \ldots, i_n$ se modifică cu o unitate. Deoarece în dispunerea finală a coloanelor indicii inferiori se află în ordinea naturală, fără inversiuni, atunci numărul schimbărilor succesive de semn este egal cu numărul inversiunilor din permutarea indicilor $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (Se presupune că în fiecare permutare a indicilor, indicele mai mic se află înaintea celui mai mare și prin aceasta numărul inversiunilor se micșorează exact cu o unitate). Notăm acest număr prin $N(i)$. Atunci expresia (12) capătă forma următoare

$$(-1)^{N(i)}\, b_{i_1 \beta_1} b_{i_2 \beta_2} \ldots b_{i_k \beta_k}\, M_{i_1 \ldots i_k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(A). \qquad (13)$$

Pentru a obține mărimea lui M trebuie adunate toate expresiile de forma (13).

Adunăm mai întîi expresiile avînd indicii $i_1 < \ldots < i_k$. Factorul comun $M_{i_1 \ldots i_k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(A)$ poate fi separat și în paranteză se va afla mărimea

$$\Sigma\, (-1)^{N(i)}\, b_{i_1 \beta_1} b_{i_2 \beta_2} \ldots b_{i_k \beta_k},$$

care în mod evident este tocmai minorul $M_{\beta_1 \ldots \beta_k}^{i_1 \ldots i_k}(B)$. În final se obține formula

$$M_{\beta_1 \ldots \beta_k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(AB) = \Sigma\, M_{i_1 \ldots i_k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(A)\, M_{\beta_1 \ldots \beta_k}^{i_1 \ldots i_k}(B). \qquad (14)$$

Însumarea se face aici după toate sistemele de indici $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, care sînt numere variind între 1 și n. Numărul total al termenilor din această sumă este egal cu $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Formulăm rezultatul obținut sub forma unei teoreme.

TEOREMĂ. *Fiecare minor de ordin k al matricii AB poate fi exprimat cu ajutorul minorilor de același ordin din matricile A și B, după formula* (14).

§ 4.6. Domeniul de valori și subspațiul nul (nucleu) ale unui operator liniar

4.61. Presupunem că $\mathcal{A}$ este un operator liniar acționînd de la un spațiu vectorial $\mathfrak{X}$ la un spațiu vectorial $\mathfrak{Y}$. Folosim atunci notația 2.71 $\mathcal{A} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$.

Fie n dimensiunea spațiului $\mathfrak{X}$ și m dimensiunea lui $\mathfrak{Y}$; alegem o bază oarecare $e_1, \ldots, e_n$ în $\mathfrak{X}$ și o bază $f_1, \ldots, f_m$ în $\mathfrak{Y}$. Atunci operatorului $\mathcal{A}$ i se poate asocia conform regulii din 4.23 $m \times n$-matricea $A = ||a_i^{(j)}||$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Notăm cu $\mathrm{T}(\mathcal{A})$ domeniul valorilor operatorului $\mathcal{A}$, adică mulțimea tuturor vectorilor $y = \mathcal{A}x$, $x \in \mathfrak{X}$ (uneori $\mathrm{T}(\mathcal{A})$ se mai notează $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ și este numit imaginea operatorului $\mathcal{A}$). Ne punem problema de a calcula dimensiunea subspațiului $\mathrm{T}(\mathcal{A})$ al lui $\mathfrak{Y}$. Punînd $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ se obține $y = \mathcal{A}x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathcal{A}e_k$. Așadar, domeniul valorilor operatorului $\mathcal{A}$ coincide cu acoperirea liniară a vectorilor $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n$. Dimensiunea acoperirii liniare $\mathfrak{L}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n)$ este egală, conform 2.54 c, cu numărul maxim de vectori liniar independenți din sistemul $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n$. Știm că în coloanele matricii operatorului $\mathcal{A}$ sînt scrise coordonatele vectorilor $\mathcal{A}e_i$ relativ la baza $\{\mathbf{f}\}$; astfel, problema numărului maxim de vectori liniar independenți în sistemul $\mathcal{A}e_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) se reduce direct la cea a numărului maxim de coloane liniar independente ale matricii operatorului $\mathcal{A}$. Dar acesta din urmă este egal, conform 3.12 c, cu rangul matricii operatorului $\mathcal{A}$. Așadar, *dimensiunea domeniului de valori al unui operator liniar $\mathcal{A}$ acționînd de la un spațiu n-dimensional $\mathfrak{X}$ la un spațiu m-dimensional $\mathfrak{Y}$, este egală cu rangul matricii operatorului $\mathcal{A}$ în orice bază $\{\mathbf{e}\}$ a spațiului $\mathfrak{X}$ și orice bază $\{\mathbf{f}\}$ a lui $\mathfrak{Y}$.*

Se poate observa că alegerea bazelor în spațiile $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ nu influențează rezultatul (căci subspațiul $\mathrm{T}(\mathcal{A})$ depinde numai de $\mathcal{A}$), deci *rangul matricii operatorului $\mathcal{A}$ nu depinde de alegerea bazelor, ci numai de operatorul $\mathcal{A}$ însuși.* În cele ce urmează vom numi rangul matricii operatorului $\mathcal{A}$ (în orice baze) *rang al operatorului* $\mathcal{A}$ însuși și îl vom nota $r\mathcal{A}$.

4.62. Notăm cu $\mathrm{N}(\mathcal{A})$ subspațiul nul al operatorului $\mathcal{A}$ (numit și nucleu al lui $\mathcal{A}$), adică mulțimea tuturor vectorilor $x \in \mathfrak{X}$ pentru care $\mathcal{A}x = 0$. Ne punem problema să calculăm dimensiunea subspațiului $\mathrm{N}(\mathcal{A})$, utilizînd matricea $A = ||a_i^{(j)}||$ a operatorului (într-o pereche de baze ca mai sus).

Fie $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in \mathrm{N}(\mathcal{A})$. Atunci sistemul (5) capătă forma

$$\left.\begin{aligned} a_1^{(1)}\xi_1 + a_1^{(2)}\xi_2 + \ldots + a_1^{(n)}\xi_n &= 0, \\ a_2^{(1)}\xi_1 + a_2^{(2)}\xi_2 + \ldots + a_2^{(n)}\xi_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_m^{(1)}\xi_1 + a_m^{(2)}\xi_2 + \ldots + a_m^{(n)}\xi_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Este evident că și invers, orice vector $x \in \mathfrak{X}$ ale cărui coordonate satisfac sistemul (15) aparține subspațiului nul al operatorului $\mathcal{A}$. Astfel, problema dimensiunii lui $\mathrm{N}(\mathcal{A})$ este echivalentă cu cea a dimensiunii subspațiului de soluții ale sistemului (15). În virtutea celor spuse la punctul 3.51 dimensiunea $n_{\mathcal{A}}$ a acestui subspațiu este egală cu numărul $n-r$, unde r este rangul matricii coeficienților sistemului, sau ceea ce este același lucru, rangul operatorului $\mathcal{A}$; astfel, $n_{\mathcal{A}} = n - r_{\mathcal{A}}$.

În acest mod, am arătat că *dimensiunea subspațiului nul al unui operator $\mathcal{A}$ este egală cu diferența între dimensiunea spațiului $\mathfrak{X}$ (pe care este definit operatorul $\mathcal{A}$) și rangul operatorului $\mathcal{A}$*, adică $\dim \mathrm{N}(\mathcal{A}) = \dim \mathfrak{X} - \dim \mathrm{T}(\mathcal{A})$.

4.63. În particular, dacă morfismul $\mathcal{A}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ este un epimorfism, atunci $\mathrm{T}(\mathcal{A}) = \mathfrak{Y}$ și deci $r_{\mathcal{A}} = m$. Dacă morfismul $\mathcal{A}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ este monomorfism, atunci $\mathrm{N}(\mathcal{A}) = 0$ și în acest caz, $r_{\mathcal{A}} = n$. Sînt adevărate și afirmațiile inverse. Anume, dacă rangul matricii A este egal cu numărul m al liniilor sale, atunci dimensiunea lui $\mathrm{T}(\mathcal{A})$ coincide cu dimensiunea lui $\mathfrak{Y}$ și cum $\mathrm{T}(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{Y}$, rezultă $\mathrm{T}(\mathcal{A}) = \mathfrak{Y}$. Așadar, morfismul $\mathcal{A}$ este epimorfism dacă și numai dacă $r_{\mathcal{A}} = m$. Dacă rangul matricii A este egal cu numărul n al coloanelor ei, atunci vectorii $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$ sînt liniar independenți și deci operatorul $\mathcal{A}$ este monomorfism (2.73 c). De aceea morfismul $\mathcal{A}$ este monomorfism dacă și numai dacă $r_{\mathcal{A}} = n$.

4.64. Următoarea proprietate este o reciprocă a rezultatelor 4.61—4.62:

TEOREMĂ. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu n-dimensional și $\mathfrak{Y}$ un spațiu oarecare. Oricare ar fi subspațiile $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{X}$ și $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{Y}$ avînd suma*

dimensiunilor egală cu n există un operator liniar $\mathcal{A}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ astfel încît $\mathrm{N}(\mathcal{A}) = \mathfrak{N}$, $\mathrm{T}(\mathcal{A}) = \mathfrak{T}$.

Demonstrație. Notăm dimensiunile lui $\mathfrak{N}$ și $\mathfrak{T}$ respectiv prin k și $m = n - k$. În subspațiul $\mathfrak{T}$ alegem m vectori liniar independenți $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Alegem de asemenea o bază oarecare $e_1, e_2, \ldots, e_n$ în spațiul $\mathfrak{X}$ astfel încît primii k vectori ai bazei să fie situați în subspațiul $\mathfrak{N}$ (2.43).

Definim operatorul $\mathcal{A}$ prin condițiile

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}e_i &= 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \\ \mathcal{A}e_{i+k} &= f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Arătăm că operatorul $\mathcal{A}$ satisface condițiile cerute în enunț. Mai întîi este evident că $\mathrm{T}(\mathcal{A})$ este acoperirea liniară a vectorilor f_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ și coincide deci cu subspațiul $\mathfrak{T}$. Apoi orice vector al subspațiului $\mathfrak{N}$ aparține evident lui $\mathrm{N}(\mathcal{A})$; rămîne de dovedit că orice vector din $\mathrm{N}(\mathcal{A})$ aparține lui $\mathfrak{N}$. Admitem pentru aceasta că pentru

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

am avea $\mathcal{A}x = 0$. Folosind condițiile (16) rezultă

$$0 = \mathcal{A}x = \mathcal{A}(\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n) = \xi_{k+1} f_1 + \ldots + \xi_n f_m.$$

Deoarece vectorii $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sînt liniar independenți, rezultă atunci că $\xi_{k+1} = \ldots = \xi_n = 0$. Dar atunci $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_k e_k$, deci $x \in \mathfrak{N}$, ceea ce trebuia dovedit.

4.65. Teorema următoare referitoare la rangul produsului a două matrici rezultă din proprietățile de natură geometrică prezentate mai sus.

TEOREMĂ. *Rangul produsului AB a două matrici A și B nu depășește rangul fiecăruia din factori.*

Demonstrație. Se subînțelege că am presupus că numărul coloanelor matricii A coincide cu numărul liniilor matricii B (altfel nu ar avea sens produsul AB). Presupunem că A este o $m \times n$-matrice iar B este o $n \times p$-matrice. Fie spațiile vectoriale $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ de dimensiune respectiv n, m, p. În spațiul $\mathfrak{X}$ considerăm o bază $e_1, \ldots, e_n$, în spațiul $\mathfrak{Y}$ baza $f_1, \ldots, f_m$ și în $\mathfrak{Z}$ baza $g_1, \ldots, g_p$. În aceste condiții matricea A poate fi

pusă în corespondență cu un operator liniar $\mathcal{A} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, iar matricea B cu un operator liniar $\mathcal{B} : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$. Produsului AB al matricilor A, B îi corespunde operatorul liniar $\mathcal{AB} : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}$. Domeniul de valori al operatorului $\mathcal{AB}$ este, conform însăși definiției lui, conținut în domeniul de valori al operatorului $\mathcal{A}$. Deoarece dimensiunea domeniului de valori al unui operator este egal cu rangul matricii corespunzătoare (conform 4.61), rezultă că rangul produsului a două matrici nu depășește rangul primului factor. Pentru a demonstra că el nu depășește nici rangul celui de al doilea factor, aplicăm operația de transpunere; folosind 4.53 obținem

$$\text{rang } AB = \text{rang } (AB)' = \text{rang } B'A' \leqslant \text{rang } B' = \text{rang } B,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

4.66. Rangul produsului a două matrici poate fi mai mic decît rangul fiecăruia din factori. De exemplu, matricile

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

au rangul egal cu unu, iar produsul lor

$$AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

are rangul zero. Următoarea teoremă prezintă interes, deoarece ea dă o evaluare a rangului produsului a două matrici în sens opus (minorare și nu majorare).

TEOREMĂ. *Fie A o $m \times n$-matrice de rang r_A și B o $n \times p$-matrice de rang r_B. Atunci rangul $m \times p$-matricii AB este cel puțin egal cu*

$$r_A + r_B - n, \text{ adică } r_{AB} \geqslant r_A + r_B - n.$$

Demonstrație. Arătăm mai întîi că orice operator $\mathcal{A} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de rang r transformă orice subspațiu k-dimensional $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$ într-un subspațiu $\mathfrak{Y}' \subset \mathfrak{Y}$ a cărui dimensiune nu este mai mică decît $r - (n - k)$. Alegem o bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$ în $\mathfrak{X}$ astfel încît primii k vectori ai bazei să fie situați în subspațiul $\mathfrak{X}'$ (2.43). Coordonatele vectorilor $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_k$ care generează subspațiul $\mathfrak{Y}'$ ocupă în matricea A primele k coloane. Conform ipotezei, în matricea A există r coloane liniar

independente. Împărțim aceste coloane în două grupe: în prima grupă considerăm coloanele care au numere de ordine de la 1 la k, iar în cea de a doua coloanele care au numerele de ordine de la $k+1$ la n. Coloanele din grupa secundă sînt cel mult $n-k$; așadar prima grupă cuprinde cel puțin $r - (n - k)$ coloane. Astfel subspațiul $\mathfrak{Y}'$ are cel puțin $r - (n - k)$ vectori liniar independenți, ceea ce s-a afirmat.

Fie acum $\mathcal{A} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ și $\mathcal{B} : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ operatori liniar corespunzînd matricilor considerate. Evaluarea rangului matricii operatorului $\mathcal{AB}$ conform 4.61 este de fapt o evaluare a dimensiunii domeniului de valori al acestui operator. Operatorul $\mathcal{B}$ transformă întreg spațiul $\mathfrak{Z}$ în subspațiul $T(\mathcal{B}) \subset \mathfrak{X}$ avînd dimensiunea $r_{\mathcal{B}}$. Conform celor arătate mai sus, operatorul $\mathcal{A}$ transformă subspațiul $T(\mathcal{B})$ într-un subspațiu a cărui dimensiune nu este mai mică decît $r_{\mathcal{A}} - (n - r_{\mathcal{B}}) = r_{\mathcal{A}} + r_{\mathcal{B}} - n$. Așadar, dimensiunea domeniului de valori al operatorului $\mathcal{AB}$ și în același timp rangul matricii AB are mărimea nu mai mică decît $r_{\mathcal{A}} + r_{\mathcal{B}} - n$, ceea ce trebuia demonstrat.

4.67. COROLAR. *Dacă una din matricile A și B, unde A este o $m \times n$-matrice iar B este o $n \times p$-matrice, are rangul n, atunci rangul produsului este egal cu rangul celeilalte matrici.*

Într-adevăr, în acest caz evaluările rangului produsului date în teoremele 4.65 și 4.66 conduc direct la rezultat.

4.68. Fie $\mathcal{A} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un operator liniar între spațiile vectoriale $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$. Un operator liniar $\mathcal{B} : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ care transformă $\mathfrak{Y}$ în $\mathfrak{X}$ se numește *invers la stînga* al lui $\mathcal{A}$ dacă $\mathcal{BA} = \mathcal{E}$, adică $\mathcal{BA}$ coincide cu operatorul identic al spațiului $\mathfrak{X}$. În acest caz se mai spune că operatorul $\mathcal{A}$ este invers la dreapta al lui $\mathcal{B}$. În ce caz operatorul $\mathcal{A}$ (respectiv $\mathcal{B}$) are invers la stînga (respectiv la dreapta)? Teorema care urmează dă un răspuns acestei întrebări.

TEOREMĂ. *Operatorul $\mathcal{A} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ are invers la stînga dacă și numai dacă $\mathcal{A}$ este monomorfism. Operatorul $\mathcal{B} : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ are invers la dreapta dacă și numai dacă $\mathcal{B}$ este epimorfism.*

Demonstrație. Presupunem că $\mathcal{A}$ este monomorfism și că $T(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{Y}$ este domeniul său de valori. Pentru orice element $y \in T(\mathcal{A})$ există $x \in \mathfrak{X}$ astfel încît $\mathcal{A}x = y$, iar acest x este unic determinat (deoarece $\mathcal{A}$ este monomorfism). Fie $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{Y}$

un subspațiu a cărui sumă directă cu $T(\mathcal{A})$ este egală cu întreg spațiul $\mathcal{Y}$ (2.46). Definim operatorul $\mathcal{B}: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ după regula următoare. Pentru $y \in T(\mathcal{A})$, elementul $\mathcal{B}y$ este egal cu acel unic x astfel încît $\mathcal{A}x = y$; pentru $y \in \mathcal{Q}$ punem $\mathcal{B}y = 0$; pentru $y = y_1 + y_2$ unde $y_1 \in T(\mathcal{A})$, $y_2 \in \mathcal{Q}$ punem $\mathcal{B}y = \mathcal{B}y_1$. După cum se verifică imediat, operatorul $\mathcal{B}$ este liniar și pentru orice $x \in \mathcal{X}$ avem $\mathcal{B}\mathcal{A}x = x$, deci $\mathcal{B}$ este invers la stînga pentru $\mathcal{A}$. Dacă $\mathcal{A}$ nu este monomorfism, atunci există un vector $x \in \mathcal{X}$, diferit de zero, astfel încît $\mathcal{A}x = 0$. Atunci pentru orice $\mathcal{B}: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ avem $(\mathcal{B}\mathcal{A})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) = \mathcal{B}(0) = 0$ deci nu există invers la stînga pentru operatorul $\mathcal{A}$.

Presupunem că $\mathcal{B}: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ este un epimorfism și că $N(\mathcal{B}) \subset \mathcal{Y}$ este nucleul (spațiul nul) al operatorului $\mathcal{B}$, iar $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Y}$ este un subspațiu a cărui sumă directă cu $N(\mathcal{B})$ este egală cu întreg spațiul $\mathcal{Y}$. Deoarece $\mathcal{X} = \mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \mathcal{B}(N(\mathcal{B}) + \mathcal{Q}) = \mathcal{B}(\mathcal{Q})$, atunci aplicația $\mathcal{B}: \mathcal{Q} \to \mathcal{X}$ este de asemenea epimorfism și chiar izomorfism, deoarece nici un element $y \in \mathcal{Q}$ diferit de zero nu este aplicat în zero prin operatorul $\mathcal{B}$. Definim operatorul $\mathcal{A}: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ prin următoarea regulă: pentru orice $x \in \mathcal{X}$ vectorul $\mathcal{A}x$ este acel vector unic $y \in \mathcal{Q}$ pentru care $\mathcal{B}y = x$. Operatorul $\mathcal{A}$ este evident liniar și pentru orice $x \in \mathcal{X}$ avem $\mathcal{B}\mathcal{A}x = x$, deoarece $\mathcal{A}$ este invers la dreapta pentru $\mathcal{B}$. Dacă $\mathcal{B}: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ nu este epimorfism, atunci pentru vectorul $x \in \mathcal{X}$ care nu aparține lui $T(\mathcal{B})$ și pentru orice operator $\mathcal{A}: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ avem $\mathcal{B}\mathcal{A}x \neq x$, astfel încît $\mathcal{B}$ nu admite invers la dreapta. Teorema este complet demonstrată.

4.69 a. Știm că rezultatul înmulțirii unei $n \times m$-matrici P cu o $m \times n$-matrice A este o matrice pătratică de ordin n

$$S = PA.$$

Dacă S este matricea unitate de ordin n **(4.24 d)**, atunci matricea P se numește *inversă la stînga pentru matricea* A. În mod analog, înmulțind o $m \times n$-matrice A cu o $n \times m$-matrice Q se obține o matrice pătratică de ordin m

$$T = AQ,$$

și dacă T este matricea unitate de ordin m, atunci Q se numește *inversă la dreapta pentru matricea* A.

b. Folosind rezultatele din 4.63 se poate reformula teorema 4.68 în termeni de rang al matricilor.

TEOREMĂ. *O $m \times n$-matrice A are inversă la stînga dacă și numai dacă rangul ei este egal cu n; matricea A are inversă la dreapta dacă și numai dacă rangul ei este egal cu m.*

§ 4.7. Operatori liniari care transformă $\mathcal{K}_n$ în el însuși (endomorfisme ale spațiului $\mathcal{K}_n$)

4.71. Considerăm un operator liniar $\mathcal{A}: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ care transformă spațiul $\mathcal{X}$ în el însuși (punînd în 4.21 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$). Vom spune atunci că $\mathcal{A}$ este operator al lui $\mathcal{X}$ *(operator acționînd în* $\mathcal{X}$ sau, echivalent, *endomorfism* al lui $\mathcal{X}$).

Presupunem că operatorul $\mathcal{A}$ acționează în spațiul n-dimensional $\mathcal{X} = \mathcal{K}_n$. Alegem în spațiul $\mathcal{X}$ o bază $e_1, \ldots, e_n$ și *aceeași bază este folosită și în domeniul de valori al lui* $\mathcal{A}$, *pentru a construi matricea operatorului* $\mathcal{A}$. Conform 4.22 matricea A a operatorului $\mathcal{A}$ se construiește prin formulele

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)} e_i, \tag{17}$$

astfel încît coeficienții $a_i^{(j)}$ formează de această dată o matrice pătratică de ordin n; aceasta se numește *matricea operatorului* $\mathcal{A}$ *în baza* $\{\mathbf{e}\} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Vom nota uneori această matrice prin $A(\mathbf{e})$. Formula corespunzătoare pentru coordonatele vectorului $y = \mathcal{A}x$, $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$, $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, are forma (conform 4.23):

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^{(j)} \xi_j. \tag{18}$$

Fixînd baza $(e_1, \ldots, e_n) = \{\mathbf{e}\}$ se obține o corespondență biunivocă între toți operatorii liniari acționînd în spațiul $\mathcal{K}_n$ și toate matricile pătratice de ordin n avînd elementele din corpul K.

4.72. *Exemple*

a. Operatorul care asociază oricărui vector din spațiul $\mathcal{X}$ vectorul nul este evident liniar. El se numește *operatorul nul* (vezi 4.22 a).

Matricea operatorului nul în orice bază este evident matricea nulă.

b. Operatorul identic $\mathcal{E}$, care asociază oricărui vector $x \in \mathfrak{X}$ același vector x, a fost considerat în 4.22 d. Matricea operatorului identic are forma (4.22 d).

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{Vmatrix}.$$

Această matrice se numește *matrice unitate.*

c. Operatorul $\mathcal{A}$ care transformă orice vector x în λx, unde λ este un număr fixat din corpul K, este evident liniar; el se numește *operatorul de asemănare* (cu coeficientul de asemănare λ).

În mod analog cu exemplul de la pct. b, operatorul de asemănare în orice bază are forma

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{Vmatrix}.$$

d. În planul euclidian $\mathfrak{V}_2$ vectorii pot fi determinați prin coordonatele polare, $x = \{\varphi, \rho\}$. Operatorul $\mathcal{A}$ care transformă vectorul $x = \{\varphi, \rho\}$ în $\mathcal{A}x = \{\varphi + \varphi_0, \rho\}$ cu φ_0 unghi fixat, este un operator liniar (ceea ce se probează imediat). Acest operator se numește *operator de rotație cu unghiul* φ_0.

Pentru construirea matricii operatorului de rotație alegem în planul $\mathfrak{V}_2$ o bază formată din doi vectori unitari perpendiculari e_1, e_2. După rotația cu unghiul φ_0 vectorul e_1 trece în vectorul $(\cos \varphi_0)e_1 + (\sin \varphi_0)e_2$ iar vectorul e_2 în vectorul $(-\sin \varphi_0)e_1 + (\cos \varphi_0)e_2$. Așadar, matricea operatorului de rotație în oricare din bazele indicate mai sus are forma

$$\begin{Vmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{Vmatrix}.$$

e. Fie $e_1, e_2, \dots, e_n$ o bază oarecare în spațiul n-dimensional $\mathfrak{R}_n$. Asociem vectorului $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, vectorul $\mathcal{Q}x = \sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k$, unde $m < n$. Operatorul $\mathcal{Q}$ este liniar; el se numește *operatorul de proiecție pe subspațiul* $\mathfrak{R}_m$ generat de vectorii $e_1, e_2, \dots, e_m$.

Pentru construirea matricii operatorului de proiecție observăm că sub acțiunea acestui operator vectorii $e_1, e_2, \dots, e_m$ trec în ei înșiși, iar vectorii $e_{m+1}, \dots, e_n$ în zero. De aceea matricea operatorului de proiecție în baza $e_1, e_2, \dots, e_n$ are forma

$$\text{linia } m \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

f. Fie $e_1, e_2, \dots, e_n$ o bază în spațiul n-dimensional $\mathfrak{R}_n$ și fie n numere fixate $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Definim operatorul $\mathcal{A}$ pentru vectorii bazei astfel: $\mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1, \mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2, \dots, \mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n$ și pentru orice alt vector $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ este natural să definim prin liniaritate $\mathcal{A}x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k e_k$. Operatorul obținut se numește operator *diagonal* relativ la baza $e_1, \dots, e_n$ sau operator *diagonalizabil.*

Matricea unui operator diagonal relativ la baza $e_1, \dots, e_n$ are în această bază forma următoare

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots \lambda_n \end{Vmatrix}.$$

Elementele nenule se pot afla în această matrice numai pe diagonala principală. Această matrice se numește *diagonală* (de unde și denumirea operatorului). Se poate observa că este posibil ca într-o altă bază $f_1, \dots, f_n$, matricea unui operator diagonal relativ la baza $e_1, \dots, e_n$ să nu mai fie diagonală.

4.73 a. Operatorii liniari acționînd în spațiul $\mathfrak{X}$ pot fi adunați, înmulțiți cu numere, după regulile generale 4.31—4.32, obținîndu-se noi operatori acționînd în $\mathfrak{X}$.

Egalitățile (7) și (7') arată că relativ la operațiile de adunare și înmulțire cu numere, mulțimea tuturor operatorilor acționînd în spațiul $\mathfrak{X}$ este ea însăși un spațiu vectorial peste același corp K. În plus, pentru operatorii acționînd în spațiul $\mathfrak{X}$ produsul (compunerea) este totdeauna definit, conform 4.33, obținîndu-se ca rezultat un nou operator acționînd în $\mathfrak{X}$. În particular, dacă $\mathfrak{B}$ este orice operator în $\mathfrak{X}$, atunci

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{E})x = \mathfrak{B}(\mathfrak{E}x) = \mathfrak{B}x = \mathfrak{E}(\mathfrak{B}x),$$

astfel încît

$$\mathfrak{B}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}.$$

Definim *puterile* unui operator dat $\mathfrak{A} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ după regulile

$$\mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A}^2\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}\mathfrak{A})\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathfrak{A}^n = \mathfrak{A}^{n-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{n-1}.$$

Are loc formula

$$\mathfrak{A}^{m+n} = \mathfrak{A}^m\mathfrak{A}^n \quad (m, n = 1, 2, \dots), \tag{19}$$

care se demonstrează ușor prin inducție.

Punem, de asemenea, prin definiție

$$\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{E} \text{ (operatorul identic).}$$

Este evident că formula (19) rămîne adevărată și în cazul cînd unul din exponenți este nul.

b. Presupunem că spațiul $\mathfrak{X}$ este finit-dimensional, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_n$. Fixăm în spațiul $\mathfrak{X}$ baza $e_1, \dots, e_n$. Atunci oricărui operator liniar $\mathfrak{A}$ acționînd în spațiul $\mathfrak{X}$ îi corespunde o matrice în această bază. Conform regulilor 4.41—4.43, odată cu operatorii, matricile corespunzătoare se adună, se înmulțesc cu numere, se ridică la putere. În acest caz, se poate determina ușor dimensiunea spațiului liniar al tuturor matricilor de

ordin n. Anume, matricile E_{jk}, avînd un singur element nenul egal cu 1, situat pe linia j și coloana k, sînt liniar independente; pe de altă parte, fiecare matrice de ordin n este combinație liniară a matricilor E_{jk} indicate. Așadar, matricile E_{jk} constituie o bază în spațiul tuturor matricilor pătratice de ordin n. Deoarece numărul matricilor E_{jk} este egal cu n^2, conform (2.35) rezultă că *dimensiunea spațiului vectorial al tuturor matricilor de ordin n este egală cu n^2.*

Aceeași dimensiune n^2 o are evident și spațiul tuturor operatorilor liniari acționînd în spațiul $\mathfrak{X}_n$.

4.74. *Exemple*

a. Înmulțirea cu numărul complex $\omega = \alpha + i\beta$ este o transformare liniară $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to z\omega$ a planului complex ($z = x + iy$), care poate fi scrisă cu ajutorul unei matrici reale de ordin 2. Din formulele de înmulțire $(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$ rezultă că în baza 1, i matricea corespunzătoare are forma

$$\tilde{\omega} = \begin{Vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{Vmatrix}.$$

Astfel, numerele complexe $\omega = \alpha + i\beta$ corespund biunivoc cu matricile reale $\tilde{\omega}$ de ordin 2; se vede lesne că sumei și produsului de numere le corespund suma și produsul matricilor corespunzătoare. Se spune că *matricile reale $\tilde{\omega}$ constituie o reprezentare a corpului numerelor complexe.*

b. Notăm cu $\mathfrak{B}_k$ ($k \geqslant 0$) operatorul de „deplasare cu k pași"; prin definiție, el transformă fiecare vector din baza e_m în vectorul e_{m-k} din bază (dacă $m - k > 0$) și în vectorul nul (dacă $m - k \leqslant 0$). Evident, $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}_k \cdot \mathfrak{B}_r = \mathfrak{B}_{k+r}$; în particular, $\mathfrak{B}_1^k = \mathfrak{B}_k$. Matricea operatorului $\mathfrak{B}_1$ are forma

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Matricea operatorului $\mathfrak{B}_k$ are forma $(k < n)$

$$k+1 \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|.$$

4.75. *Determinantul produsului a două matrici.* Fie $A = ||a_{jk}||$, $B = ||b_{jk}||$ două $n \times n$-matrici oarecare și $C = AB$ produsul lor. În virtutea teoremei 4.54 aplicată minorului $M^{1,\dots,n}_{1,\dots,n}(AB)$, adică însuși determinantului matricii AB, obținem

$$\det AB = (\det A)(\det B).$$

Astfel am demonstrat

TEOREMĂ. *Determinantul produsului a două $n \times n$-matrici este egal cu produsul determinanților acestor matrici.*

Există și demonstrații directe ale acestei teoreme (care nu se bazează pe propoziții de forma 4.54). Iată una din aceste demonstrații. Considerăm determinantul de ordin $2n$

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1n} & -1 & 0 \dots & 0 \\ b_{21} \dots b_{2n} & 0 & -1 \dots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} \dots b_{nn} & 0 & 0 \dots & -1 \\ 0 \dots 0 & a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ 0 \dots 0 & a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Conform 1.82 determinantul D este egal cu produsul determinanților matricilor

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \quad \text{și} \quad B = \left\| \begin{array}{ccc} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array} \right\|.$$

Dar se poate obține valoarea determinantului D și pe o altă cale. Folosind numerele -1 situate în primele n linii și ultimele n coloane ale determinantului D se pot anula toate elementele situate în ultimele n linii și ultimele n coloane ale determinantului D. Pentru aceasta este suficient să adunăm la linia $n+1$ a determinantului D, prima linie înmulțită cu a_{11}, a doua înmulțită cu a_{12}, ... și linia n înmulțită cu a_{1n}; apoi adunăm la linia $n+2$ a determinantului D, prima linie înmulțită cu a_{21}, a doua înmulțită cu a_{22} etc.; în final adunăm la linia de ordin $2n$ prima linie înmulțită cu a_{n1}, a doua înmulțită cu a_{n2}, ..., linia n înmulțită cu a_{nn}. Ca rezultat se obține

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 \dots & 0 \\ b_{21} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 \dots & -1 \\ b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} + \dots + b_{n1}a_{1n} & \dots & b_{1n}a_{11} + \dots + b_{nn}a_{1n} & 0 & 0 \dots & 0 \\ b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} + \dots + b_{n1}a_{2n} & \dots & b_{1n}a_{21} + \dots + b_{nn}a_{2n} & 0 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{11}a_{n1} + b_{21}a_{n2} + \dots + b_{n1}a_{nn} & \dots & b_{1n}a_{n1} + \dots + b_{nn}a_{nn} & 0 & 0 \dots & 0 \end{vmatrix},$$

de unde aplicînd teorema Laplace 1.81 și dezvoltînd determinantul D după ultimele n linii, rezultă

$$D = (-1)^{1+\dots+n} \begin{vmatrix} -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & -1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} + \dots + b_{n1}a_{1n} \dots b_{1n}a_{11} + \dots + b_{nn}a_{1n} \\ b_{11}a_{21} + \dots + b_{n1}a_{2n} \dots b_{1n}a_{21} + \dots + b_{nn}a_{2n} \\ \dots\dots\dots = \dots\dots \\ b_{11}a_{n1} + \dots + b_{n1}a_{nn} \dots b_{1n}a_{n1} + \dots + b_{nn}a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} \dots a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + \dots + a_{2n}b_{n1} \dots a_{21}b_{1n} + \dots + a_{2n}b_{nn} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}b_{11} + \dots + a_{nn}b_{n1} \dots a_{n1}b_{1n} + \dots + a_{nn}b_{nn} \end{vmatrix} = \det(A \cdot B).$$

Comparînd acest rezultat cu cel obținut la început rezultă tocmai relația căutată.

În particular, observăm că dacă înmulțim două matrici pătratice nesingulare A și B (adică $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$), atunci matricea AB este nesingulară. Dacă una din matrici, de exemplu A, este singulară ($\det A = 0$), atunci $\det AB = 0$. Dealtfel această afirmație se poate deduce și din 4.67.

4.76. *Operatorul invers.* În conformitate cu definiția 4.68 un operator $\mathfrak{B}$ acționînd în spațiul $\mathfrak{X}$ se numește *invers*

la stînga al unui operator $\mathcal{A}$ acționînd în același spațiu $\mathfrak{X}$ dacă $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{E}$. În acest caz, operatorul $\mathcal{A}$ se numește *invers la dreapta* al lui $\mathcal{B}$.

a. Este posibil ca operatorul $\mathcal{A}$ să aibă mai mulți inverși la stînga și nici un invers la dreapta sau, invers, mai mulți inverși la dreapta și nici unul la stînga (vezi problema 25). Să presupunem că operatorul $\mathcal{A}$ admite un invers la stînga $\mathcal{L}$ și un invers la dreapta $\mathcal{Q}$; atunci are loc egalitatea

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{E} = \mathcal{L}(\mathcal{A}\mathcal{Q}) = (\mathcal{L}\mathcal{A})\mathcal{Q} = \mathcal{E}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}. \tag{20}$$

Fixăm $\mathcal{Q}$; vedem că orice operator invers la stînga $\mathcal{L}$ coincide cu $\mathcal{Q}$ și în acest mod, $\mathcal{L}$ este unic determinat. În mod similar, în cazul considerat operatorul invers la dreapta $\mathcal{Q}$ este de asemenea unic determinat. Acest operator $\mathcal{L} = \mathcal{Q}$ unic determinat ca operator simultan invers la stînga și la dreapta al operatorului $\mathcal{A}$, se numește *operator invers al operatorului* $\mathcal{A}$ și se notează prin $\mathcal{A}^{-1}$. Un operator $\mathcal{A}$ care admite invers se numește *operator inversabil.*

b. Considerăm cazul unui operator $\mathcal{A}$ acționînd în spațiul n-dimensional $\mathfrak{R}_n$. Fie A matricea operatorului $\mathcal{A}$ într-o anumită bază fixată $e_1, \ldots, e_n$. Este posibilă una din următoarele două situații: sau $\det A \neq 0$, sau $\det A = 0$. În primul caz rangul matricii A este egal cu n și conform **4.69 b** matricea A admite inversă la stînga și inversă la dreapta. În mod corespunzător, operatorul $\mathcal{A}$ admite invers la stînga și invers la dreapta. Conform **a**, operatorul $\mathcal{A}$ este un operator inversabil.

Dacă $\det A = 0$, atunci aplicînd din nou 4.69 b, matricea A nu admite nici inversă la stînga și nici inversă la dreapta; deci operatorul $\mathcal{A}$ corespunzător, acționînd în $\mathfrak{R}_n$, nu admite nici invers la stînga și nici invers la dreapta.

4.77. *Matricea operatorului invers.* Fie $\mathcal{A}$ un operator inversabil într-un spațiu n-dimensional $\mathfrak{X}$ și $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$ operatorul invers al lui $\mathcal{A}$. Alegem o bază $e_1, \ldots, e_n$ în $\mathfrak{X}$ și notăm prin $||a_i^{(j)}||$ și $||b_i^{(j)}||$ matricile operatorilor $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ în această bază.

Căutăm expresia explicită a elementelor $b_i^{(j)}$ cu ajutorul elementelor $a_i^{(j)}$. Fixînd numărul i și scriind succesiv elementele liniei i din matricea $E = AB$, prin utilizarea formulelor (8), rezultă

$$b_i^{(1)}a_1^{(1)} + b_i^{(2)}a_2^{(1)} + \ldots + b_i^{(n)}a_n^{(1)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_i^{(1)}a_1^{(i)} + b_i^{(2)}a_2^{(i)} + \ldots + b_i^{(n)}a_n^{(i)} = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_i^{(1)}a_1^{(n)} + b_i^{(2)}a_2^{(n)} + \ldots + b_i^{(n)}a_n^{(n)} = 0.$$

Necunoscutele $b_i^{(1)}, \ldots, b_i^{(n)}$ se determină din acest sistem de ecuații liniare aplicînd regula lui Cramer 1.73, deoarece prin ipoteză $\det A \neq 0$. Dezvoltînd determinantul de la numărător, se obține

$$b_i^{(j)} = \frac{A_j^{(i)}}{\det A}, \tag{21}$$

unde $A_j^{(i)}$ este complementul algebric al elementului $a_j^{(i)}$ din matricea A. Astfel, *elementul* $b_i^{(j)}$ *al matricii inverse* A^{-1} *este egal cu raportul dintre complementul algebric al elementului* $a_j^{(i)}$ *al matricii* A *și determinantul lui* A.

Am obținut:

TEOREMĂ. *Pentru orice matrice nesingulară* $A = ||a_i^{(j)}||$ *există și este unică o matrice inversă* $B = ||b_i^{(j)}||$ *pentru care*

$$AB = BA = E.$$

Elementele matricii B *se calculează după formulele* (21).

4.78. Operatorul invers al unui operator $\mathcal{A}$ inversabil se notează cu $\mathcal{A}^{-1}$. Apoi $(\mathcal{A}^{-1})^k$ pentru k natural se notează $\mathcal{A}^{-k}$. Este ușor de demonstrat prin inducție că formula (19) are loc și pentru exponenți negativi.

Notații similare se aplică pentru puterile matricii inverse. Extinderea formulei (19) la puteri de matrici cu exponenți negativi rezultă direct din justețea acestei extinderi pentru operatori.

§ 4.8. Subspații invariante

4.81. Într-un spațiu liniar $\mathfrak{X}$ presupunem dat un operator liniar $\mathcal{A} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$. Introducem următoarea definiție. Un subspațiu $\mathfrak{X}'$ al lui $\mathfrak{X}$ se numește *invariant relativ la opera-*

torul $\mathcal{A}$ (sau $\mathcal{A}$-*invariant*) dacă din faptul că $x \in \mathcal{K}'$, rezultă $\mathcal{A}x \in \mathcal{K}'$.

În particular, subspațiile banale — subspațiul nul și întreg spațiul sînt invariante pentru orice operator liniar; ne vor interesa desigur subspațiile invariante nebanale.

4.82. Considerăm din acest punct de vedere exemplele de operatori liniari indicate în 4.72.

a—c. Pentru operatorii din exemplele 4.72 a-c (operatorul nul, operatorul identic și operatorul de omotetie), *orice subspațiu este invariant.*

d. Operatorul de rotație (4.72 d) cu unghiul $\varphi_0 \neq m\pi$, m întreg, *nu admite subspații invariante nebanale.*

e. Operatorul de proiecție 4.72 e are de exemplu următoarele subspații invariante: subspațiul $\mathcal{K}'$ al vectorilor $x = \sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k$ care nu se modifică prin proiecție și subspațiul $\mathcal{K}''$ al vectorilor $y = \sum_{k=m+1}^{n} \xi_k e_k$ care sînt transformate în zero.

f. Orice subspațiu generat de o parte din vectorii unei baze $e_1, e_2, \ldots, e_n$ este subspațiu invariant pentru un operator diagonal (4.72 f).

4.83. Presupunem că un operator $\mathcal{A}$ ce acționează într-un spațiu n-dimensional $\mathcal{K}_n$ admite un subspațiu m-dimensional $\mathcal{K}_m$. Alegem în $\mathcal{K}_n$ o bază $e_1, \ldots, e_n$ astfel încît primii m vectori $e_1, \ldots, e_m$ să fie situați în subspațiul $\mathcal{K}_m$. Atunci vom putea scrie

$$\mathcal{A}e_1 = a_1^{(1)}e_1 + \ldots + a_1^{(m)}e_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathcal{A}e_m = a_m^{(1)}e_1 + \ldots + a_m^{(m)}e_m,$$

și atunci matricea operatorului $\mathcal{A}$ în baza indicată va avea forma

$$A = \begin{Vmatrix} a_1^{(1)} & \ldots & a_m^{(1)} & a_{m+1}^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(m)} & \ldots & a_m^{(m)} & a_{m+1}^{(m)} & \ldots & a_n^{(m)} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m+1}^{(m+1)} & \ldots & a_n^{(m+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m+1}^{(n)} & \ldots & a_n^{(n)} \end{Vmatrix}.$$

În primele m coloane toate elementele situate pe linia $m+1$ și următoarele sînt egale cu 0. Invers, dacă matricea unui operator $\mathcal{A}$ are o astfel de formă, atunci subspațiul generat de vectorii $e_1, \ldots, e_m$ este $\mathcal{A}$-invariant.

4.84. Presupunem că spațiul $\mathcal{K}_n$ poate fi reprezentat sub forma unei sume directe de subspații invariante $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, ..., $\mathcal{H}$ (2.45). Alegem o bază a spațiului $\mathcal{K}_n$ astfel încît vectorii $e_1, \ldots, e_r$ să aparțină lui $\mathcal{E}$; $f_1, \ldots, f_s$ să aparțină lui $\mathcal{F}$, ..., iar $h_1, \ldots, h_t$ să aparțină lui $\mathcal{H}$. Atunci matricea operatorului $\mathcal{A}$ are forma cvasidiagonală

$$A = \begin{Vmatrix} A_e & & & & \\ & A_f & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & A_h \end{Vmatrix}.$$

Blocurile pătratice diagonale ale lui A sînt matrici formate cu elemente $a_k^{(j)}$, $b_k^{(j)}$, ..., $c_k^{(j)}$ astfel încît

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{k=1}^{r} a_k^{(j)} e_k,$$
$$\mathcal{A}f_j = \sum_{k=1}^{s} a_k^{(j)} f_k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathcal{A}h_j = \sum_{k=1}^{t} a_k^{(j)} h_k;$$

și în afara elementelor blocurilor diagonale, toate elementele din A sînt nule. Invers, dacă matricea unui operator $\mathcal{A}$ într-o anumită bază are structură cvasidiagonală, atunci spațiul $\mathcal{K}_n$ se descompune în sumă directă de subspații generate de grupele corespunzătoare ale elementelor bazei.

§ 4.9. Vectori proprii și valori proprii

4.91. Un rol deosebit îl joacă subspațiile invariante de dimensiune 1 relativ la un operator $\mathcal{A}$; ele se mai numesc *direcții invariante* sau *direcții proprii*. Orice vector nenul aparținînd unei direcții invariante (unidimensionale) a unui operator liniar $\mathcal{A}$ se numește *vector propriu al operatorului* $\mathcal{A}$; altfel spus, un vector $x \neq 0$ se numește *vector propriu al unui operator* $\mathcal{A}$ dacă operatorul $\mathcal{A}$ transformă vectorul x într-un vector coliniar cu x

$$\mathcal{A}x = \lambda x. \tag{22}$$

Numărul λ care figurează în această egalitate se numește *valoare proprie* (sau *număr propriu*) *pentru operatorul* $\mathcal{A}$, *corespunzînd vectorului propriu* x.

4.92. Revenim la exemplele de la punctul 4.72.

a—c. În exemplele 4.72 **a—c** fiecare vector nenul al spațiului este vector propriu al operatorului corespunzător cu valorile proprii respectiv 0, 1, λ.

d. Operatorul de rotație (4.72 d) cu un unghi diferit de $m\pi$, m fiind întreg, nu are vectori proprii.

e. Operatorul de proiecție (4.72 **e**), prin însăși definiția lui, admite vectori proprii de forma $x = \sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k$ și $y = \sum_{k=m+1}^{n} \xi_k e_k$ cu valorile proprii egale respectiv cu 1 și 0. Se poate arăta că operatorul de proiecție nu are alți vectori proprii.

f. Operatorul diagonal (4.72 **f**) admite, prin însăși definiția lui, vectori proprii $e_1, e_2, \ldots, e_n$ cu valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ respectiv.

4.93. Indicăm două proprietăți simple ale vectorilor proprii.

a. LEMĂ. *Orice vectori proprii* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *ai unui operator* $\mathcal{A}$ *care corespund la valori proprii distincte două cîte două* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *sînt liniar independenți.*

Această afirmație se demonstrează prin inducție după m. Evident, lema este adevărată pentru $m = 1$. Admitem că

lema are loc pentru orice $m-1$ vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$; arătăm că ea rămîne adevărată și pentru orice m vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$. Presupunînd contrariul, admitem că între m vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$ ar exista o dependență liniară

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0,$$

unde $\alpha_1 \neq 0$ (de exemplu). Aplicînd acestei egalități operatorul $\mathcal{A}$ se obține

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \alpha_m \lambda_m x_m = 0.$$

Înmulțim prima egalitate cu λ_m și o scădem din cea de a doua; obținem

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m) x_2 + \ldots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) x_{m-1} = 0,$$

de unde, conform ipotezei de inducție, toți coeficienții trebuie să fie nuli. În particular, $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0$, ceea ce contravine condițiilor $\alpha_1 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_m$. Așadar, presupunerea făcută nu este adevărată și vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt liniar independenți.

În particular, într-un spațiu n-dimensional orice operator $\mathcal{A}$ nu poate avea mai mult de n vectori proprii cu valori proprii distincte.

b. LEMĂ. *Toți vectorii proprii ai unui operator liniar* $\mathcal{A}$ *corespunzînd unei aceleiași valori proprii fixate* λ *formează un subspațiu* $\mathfrak{R}^{(\lambda)} \subset \mathfrak{R}$.

Într-adevăr, dacă $\mathcal{A}x_1 = \lambda x_1$ și $\mathcal{A}x_2 = \lambda x_2$, atunci

$$\mathcal{A}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \mathcal{A}x_1 + \beta \mathcal{A}x_2 = \alpha\lambda x_1 + \beta\lambda x_2 = \lambda(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

și de aici rezultă lema.

Subspațiul $\mathfrak{R}^{(\lambda)}$ se numește *subspațiul propriu al operatorului* $\mathcal{A}$ *corespunzînd valorii proprii* λ.

4.94. Vom indica aici modul de calcul al coordonatelor vectorilor proprii ai unui operator $\mathcal{A}$, dat prin matricea sa într-o anumită bază $e_1, \ldots, e_n$ a spațiului $\mathfrak{R}_n$. Admitem că

vectorul $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ este vector propriu al operatorului $\mathcal{A}$, deci există λ astfel încît $\mathcal{A}x = \lambda x$. Folosind formulele 4.23 (5) se poate scrie această relație cu ajutorul coordonatelor:

$$\begin{aligned}
\lambda\xi_1 &= a_1^{(1)}\xi_1 + a_1^{(2)}\xi_2 + \ldots + a_1^{(n)}\xi_n,\\
\lambda\xi_2 &= a_2^{(1)}\xi_1 + a_2^{(2)}\xi_2 + \ldots + a_2^{(n)}\xi_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda\xi_n &= a_n^{(1)}\xi_1 + a_n^{(2)}\xi_2 + \ldots + a_n^{(n)}\xi_n,
\end{aligned}$$

sau

$$\left.\begin{aligned}
(a_1^{(1)} - \lambda)\,\xi_1 + a_1^{(2)}\xi_2 \quad &+ \ldots + \quad a_1^{(n)}\xi_n = 0,\\
a_2^{(1)}\xi_1 + (a_2^{(2)} - \lambda)\,\xi_2 &+ \ldots + \quad a_2^{(n)}\xi_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n^{(1)}\xi_1 + a_n^{(2)}\xi_2 \quad &+ \ldots + (a_n^{(n)} - \lambda)\,\xi_n = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Acest sistem liniar omogen de ecuații relativ la mărimile ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n admite o soluție nenulă în acel și numai în acel caz cînd determinantul sistemului este egal cu zero (3.21):

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix}
a_1^{(1)} - \lambda & a_1^{(2)} & \ldots & a_1^{(n)}\\
a_2^{(1)} & a_2^{(2)} - \lambda & \ldots & a_2^{(n)}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\
a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & \ldots & a_n^{(n)} - \lambda
\end{vmatrix} = 0. \qquad (24)$$

Polinomul de grad n în λ aflat în membrul stîng al acestei ecuații se numește *polinomul caracteristic* al matricii A. Oricărei rădăcini $\lambda_0 \in K$ a acestui polinom îi corespunde cel puțin un vector propriu, care poate fi determinat după înlocuirea lui λ cu λ_0 în relațiile (23), prin rezolvarea sistemului compatibil obținut relativ la ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n.

Rezultatul obținut arată printre altele că deși matricea operatorului $\mathcal{A}$ depinde de alegerea bazei e_1, e_2, ..., e_n, totuși rădăcinile polinomului caracteristic al acestei matrici nu depind de alegerea bazei. Vom reveni la această chestiune la punctul 5.53.

4.95. Distingem cîteva posibilități care pot apărea în rezolvarea ecuației caracteristice (24).

a. *Cazul cînd ecuația nu are rădăcini în corpul K.* Dacă ecuația $\Delta(\lambda) = 0$ nu are rădăcini în corpul K, atunci operatorul liniar $\mathcal{A}$ nu are vectori proprii în spațiul $\mathcal{R}_n$.

De exemplu, operatorul de rotație cu unghiul $\varphi_0 \neq m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) în planul $\mathcal{V}_2$ nu are vectori proprii, așa cum am observat deja. Acest fapt evident geometric, se stabilește ușor și pe cale algebrică. Într-adevăr, ecuația (24) pentru operatorul de rotație se scrie

$$\begin{vmatrix}
\cos\varphi_0 - \lambda & -\sin\varphi_0\\
\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 - \lambda
\end{vmatrix} = 0$$

și după dezvoltare

$$1 - 2\lambda\cos\varphi_0 + \lambda^2 = 0,$$

dacă $\lambda_0 \neq m\pi (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, această ecuație nu are rădăcini reale.

b. Dacă $K = \mathbb{C}$ este corpul numerelor complexe, atunci conform teoremei fundamentale a algebrei, ecuația (24) are *întotdeauna* o rădăcină $\lambda_0 \in K$. Astfel, *în spațiul* $\mathbb{C}_n$ *orice operator liniar are cel puțin un vector propriu.*

c. *Cazul a n rădăcini distincte.* Dacă toate cele n rădăcini $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ale ecuației $\Delta(\lambda) = 0$ sînt situate în corpul K și sînt distincte, atunci în spațiul $\mathcal{R}_n$ se pot găsi n vectori proprii distincți ai operatorului $\mathcal{A}$ rezolvînd sistemul (23) succesiv pentru $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Conform lemei 4.93 a, vectorii proprii $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vor fi liniar independenți. Considerăm baza formată din acești vectori și construim matricea operatorului $\mathcal{A}$ în această bază. Deoarece

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}f_1 &= \lambda_1 f_1,\\
\mathcal{A}f_2 &= \lambda_2 f_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\mathcal{A}f_n &= \lambda_n f_n,
\end{aligned}$$

matricea $A_{(f)}$ are forma

$$\left\|\begin{matrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{matrix}\right\|. \tag{25}$$

Folosind definiția operatorului diagonalizabil (4.72 f), putem formula rezultatul obținut în forma următoare: *în spațiul $\mathcal{H}_n$ orice operator liniar a cărui matrice (într-o bază oarecare) are ca polinom caracteristic un polinom cu n rădăcini distincte în corpul K este diagonalizabil; matricea acestui operator construită într-o bază formată cu vectori proprii ai săi este diagonală și elementele ei diagonale sînt exact valorile proprii ale operatorului.*

d. Pe de altă parte, dacă operatorul $\mathcal{A}$ într-o anumită bază $f_1, \dots, f_n$ a spațiului $\mathcal{H}_n$ admite o matrice diagonală (25) cu elemente nu neapărat distincte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pe diagonala principală, atunci vectorii $f_1, \dots, f_n$ sînt proprii iar $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sînt valori proprii corespunzătoare pentru $\mathcal{A}$.

Arătăm că operatorul $\mathcal{A}$ nu are în acest caz alte valori proprii distincte de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Într-adevăr, dacă λ este valoare proprie corespunzînd vectorului propriu $f = \sum_j^n \beta_j f_j$, atunci din egalitatea

$$\mathcal{A}f = \mathcal{A}\left(\sum_1^n \beta_j f_j\right) = \sum_1^n \beta_j \mathcal{A} f_j = \sum_1^n \beta_j \lambda_j f_j = \lambda f =$$

$$= \lambda \sum_1^n \beta_j f_j = \sum_1^n \lambda \beta_j f_j$$

rezultă

$$\lambda \beta_j = \lambda_j \beta_j \ (j = 1, \dots, n). \tag{26}$$

Printre numerele $\beta_1, \dots, \beta_n$ există cel puțin unul diferit de zero; de exemplu, $\beta_1 \neq 0$. Atunci din egalitatea (26) pentru $j = 1$, rezultă $\lambda = \lambda_1$, ceea ce trebuia arătat.

e. Cazul unei rădăcini multiple. Fie $\lambda = \lambda_0$ o rădăcină a ecuației (24) de multiplicitate $r \geqslant 1$. Se pune următoarea problemă: care este dimensiunea subspațiului propriu corespunzător $\mathcal{H}^{(\lambda_0)}$ sau, cu alte cuvinte, cîte soluții liniar independente admite sistemul (23) pentru $\lambda = \lambda_0$? Cunoscînd rangul matricii sistemului, putem da un răspuns precis la această întrebare (3.51). Dar va fi util de legat acest răspuns numai de multiplicitatea r a rădăcinii λ_0.

În exemplele 4.72 **a**—**c** și **f**, după cum se observă imediat, dimensiunea fiecărui subspațiu propriu $\mathcal{H}^{(\lambda_0)}$ coincide cu multiplicitatea valorii proprii corespunzătoare λ_0 ca rădăcină a polinomului caracteristic al operatorului $\mathcal{A}$. Totuși în cazul general acest fapt nu are loc. Considerăm operatorul $\mathcal{A}$ în $\mathcal{H}_2$ dat prin matricea

$$A = \left\|\begin{matrix}\lambda_0 & 0\\ \mu & \lambda_0\end{matrix}\right\|,$$

unde $\mu \neq 0$ este arbitrar. Polinomul caracteristic este $(\lambda_0 - \lambda)^2$ și admite rădăcina dublă $\lambda = \lambda_0$. Sistemul (23) are în acest caz forma

$$0 \cdot \xi_1 + 0 \cdot \xi_2 = 0,$$

$$\mu \cdot \xi_1 + 0 \cdot \xi_2 = 0$$

și admite ca soluție $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$ (unică pînă la un factor numeric). Așadar, subspațiul propriu al operatorului $\mathcal{A}$ corespunzînd valorii proprii $\lambda = \lambda_0$ are dimensiunea 1, deci mai mică decît multiplicitatea rădăcinii λ_0. Se poate dovedi că în general dimensiunea subspațiului propriu $\mathcal{H}^{(\lambda_0)}$ nu depășește multiplicitatea rădăcinii λ_0 (vezi problema 11 din capitolul 15). Răspunsul complet la problema dimensiunii spațiului $\mathcal{H}^{(\lambda)}$, în cazul $K = \mathbb{C}$, va fi dat în capitolul 6 ca rezultat al definirii formei canonice a matricii unui operator $\mathcal{A}$.

PROBLEME

1. Definind în mod natural adunarea formelor liniare și înmulțirea unei forme liniare cu un număr real, se construiește pentru orice spațiu liniar $\mathcal{H}$, un nou spatiu liniar $\mathcal{H}^*$. Care este dimensiunea lui $\mathcal{H}^*$ dacă $\dim \mathcal{H} = n$?

2. Indicații care din funcțiile vectoriale următoare definite pe spațiul $\mathcal{V}_3$ sînt operatori liniari:

a) $\mathcal{A}x = x + a$ (a — vector nenul fixat);
b) $\mathcal{A}x = a$;
c) $\mathcal{A}x = (a, x)a$;

d) $\mathcal{A}x = (a, x)x$;

e) $\mathcal{A}x = (\xi_1^2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3^2)$, unde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$;

f) $\mathcal{A}x = (\sin \xi_1, \cos \xi_2, 0)$;

g) $\mathcal{A}x = (2\xi_1 - \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_1)$.

(notația (a, x) la punctele c), d) desemnează produsul scalar uzual al vectorilor a și x din $\mathcal{V}_3$, adică produsul lungimilor celor doi vectori prin cosinusul unghiului dintre ei).

3. Sînt operatori liniari în spațiul tuturor polinoamelor în t:

a) înmulțirea cu t;

b) înmulțirea cu t^2;

c) derivarea?

4. Determinați matricea operatorului $\mathcal{A}$ al lui $\mathcal{V}_3$ care transformă vectorii

$$x_1 = (0, 0, 1) \text{ în } y_1 = (2, 3, 5),$$
$$x_2 = (0, 1, 1) \text{ în } y_2 = (1, 0, 0),$$
$$x_3 = (1, 1, 1) \text{ în } y_3 = (0, 1, -1)$$

relativ la baza

a) $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$;

b) x_1, x_2, x_3.

5. În spațiul tridimensional notăm prin $\mathcal{A}$ operatorul de rotație cu 90° în jurul axei Ox (de la Oy spre Oz), prin $\mathcal{B}$ operatorul de rotație cu 90° în jurul axei Oy (de la Oz spre Ox) și prin $\mathcal{C}$ operatorul de rotație cu 90° în jurul axei Oz (de la Ox la Oy). Să se arate că $\mathcal{A}^4 = \mathcal{B}^4 = \mathcal{C}^4 = \mathcal{E}$, $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$, $\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^2\mathcal{A}^2$. Are loc relația $\mathcal{ABAB} = \mathcal{A}^2\mathcal{B}^2$?

6. În spațiul tuturor polinoamelor de t notăm prin $\mathcal{A}$ operatorul de derivare, prin $\mathcal{B}$ operatorul de înmulțire cu t:

$$\mathcal{A}P(t) = P'(t), \quad \mathcal{B}P(t) = tP(t).$$

Are loc relația $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$? Determinați operatorul $\mathcal{AB} - \mathcal{BA}$.

7. În ipoteza că $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, să se arate că

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^2 = \mathcal{A}^2 + 2\mathcal{AB} + \mathcal{B}^2,$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^3 = \mathcal{A}^3 + 3\mathcal{A}^2\mathcal{B} + 3\mathcal{AB}^2 + \mathcal{B}^3.$$

Cum trebuie modificate aceste formule dacă $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$?

8. În ipoteza că $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \mathcal{E}$, să se demonstreze formula

$$\mathcal{A}^m\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}^m = m\mathcal{A}^{m-1} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

9. Să se determine dimensiunea spațiului liniar $\mathfrak{L}(\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_m)$ al tuturor operatorilor liniari de la spațiul n-dimensional $\mathcal{R}_n$ în spațiul m-dimensional $\mathcal{R}_m$ și să se construiască o bază a spațiului $\mathfrak{L}(\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_m)$.

10. Să se determine produsul AB pentru matricile

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{Vmatrix}.$$

11. Să se determine A^n, B^n ($n > 1$ întreg) pentru matricile

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \text{ și } B = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}.$$

12. Să se determine toate matricile de ordin 2 astfel încît

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

13. Să se calculeze $AB - BA$ unde

a) $$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix};$$

b) $$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{Vmatrix}.$$

14. Suma elementelor diagonale $a_{11} + \ldots + a_{nn}$ într-o matrice pătratică $A = \|a_{jk}\|$ se numește *urma* matricii A și se notează $\mathrm{sp}A$. Să se arate că $\mathrm{sp}(A + B) = \mathrm{sp}A + \mathrm{sp}B$, $\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA)$.

15. Folosind problema 14 să se arate că pentru operatori $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ acționînd în spațiul $\mathcal{R}_n$, egalitatea $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \mathcal{E}$ nu este posibilă.

Observație. Rezultatul problemei 6 arată că în cazul considerat presupunerea asupra dimensiunii finite a spațiului $\mathcal{R}_n$ este esențială.

16. Să se arate că pentru orice matrice pătratică C de ordin doi astfel încît $\mathrm{sp}C = 0$ (vezi problema 14) există matrici pătratice A, B de ordin 2 astfel încît $C = AB - BA$.

17. Presupunem că într-un spațiu n-dimensional sînt fixați m vectori liniar independenți

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(j)} e_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

și că un operator $\mathcal{A}$ acționează în acoperirea liniară $\mathfrak{L}(x_1, \ldots, x_m)$ după formulele

$$y_j = Ax_j = \sum_{k=1}^{m} a_k^{(j)} x_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Să se arate că orice minor de ordin m din matricea coordonatelor vectorilor y_j (relativ la baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$) este egal cu produsul minorului corespunzător din matricea coordonatelor vectorilor x_j prin numărul $\det ||a_k^{(j)}||$.

18. Să se arate că dacă într-o matrice A de rang r un minor principal este situat în colțul din stînga sus, atunci raportul dintre orice minor M de ordin r și minorul situat în aceleași coloane ca și minorul M, dar în primele r linii, depinde numai de numerele coloanelor minorului M.

19. Să se arate că dacă A este o matrice de rang r, atunci orice determinant de ordin 2 format din minori de ordin r ai matricii A, de forma

$$\begin{vmatrix} M_{i_1, i_2, \ldots, i_r}^{i_1, i_2, \ldots, i_r} & M_{k_1, k_2, \ldots, k_r}^{i_1, i_2, \ldots, i_r} \\ M_{i_1, i_2, \ldots, i_r}^{k_1, k_2, \ldots, k_r} & M_{k_1, k_2, \ldots, k_r}^{k_1, k_2, \ldots, k_r} \end{vmatrix}$$

este egal cu zero.

20. Să se arate că fiecare minor de ordin k din matricea ABC este egal cu suma produselor anumitor minori de ordin k din matricile A, B, C.

21. Să se determine inversele matricilor

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$C = \begin{Vmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{Vmatrix}.$$

22. Să se arate că pentru orice matrice pătratică nesingulară A are loc egalitatea

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

23. Să se determine toate soluțiile ecuației $XA = 0$ unde A este o matrice pătratică dată de ordin 2, X este matricea necunoscută.

24. Fie $A = ||a_i^{(j)}||$ orice matrice pătratică de ordin n și $A_i^{(j)}$ complementul algebric al elementului $a_i^{(j)}$ în determinantul matricii A. Matricea $\widetilde{A} = ||A_j^{(i)}||$ se numește *adjuncta lui* A. Să se arate că $\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = (\det A) \cdot E$.

25. Fie $\mathfrak{L}$ spațiul liniar al tuturor polinoamelor de argument t. Se consideră operatorii $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ definiți prin formulele

$$\mathcal{A}[a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n] = a_1 + a_2 t + \ldots + a_n t^{n-1},$$

$$\mathcal{B}[a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n] = a_0 t + a_1 t^2 + \ldots + a_n t^{n-1}.$$

Să se arate că $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sînt operatori liniari și că

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E}, \quad \mathcal{B}\mathcal{A} \neq \mathcal{E}.$$

Admite operatorul $\mathcal{A}$ un invers?

26. Să se arate că operatorul $\mathcal{B}$ definit în problema 25 admite o infinitate de inverși la stînga.

27. Dacă $\mathcal{A}$ este un operator liniar nesingular într-un spațiu liniar n-dimensional, atunci orice subspațiu invariant relativ la $\mathcal{A}$ este invariant și relativ la $\mathcal{A}^{-1}$.

28. Dacă operatorii $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ comută (adică $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$), atunci orice subspațiu propriu al operatorului $\mathcal{B}$ este subspațiu invariant și pentru operatorul $\mathcal{A}$.

29. Dacă suma directă (2.45) a subspațiilor proprii ale unui operator $\mathcal{A}$ coincide cu întreg spațiul $\mathfrak{R}$ și dacă fiecare subspațiu propriu al operatorului $\mathcal{A}$ este invariant relativ la un operator $\mathcal{B}$, să se arate că operatorii $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ comută.

30. Să se arate că dacă x și y sînt vectori proprii ai unui operator $\mathcal{A}$ cu valori proprii distincte, atunci $\alpha x + \beta y$ ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$) nu este vector propriu pentru $\mathcal{A}$.

31. Dacă fiecare vector al spațiului $\mathfrak{R}$ este vector propriu pentru operatorul $\mathcal{A}$, atunci să se arate că $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}(\lambda \in K)$.

32. Dacă operatorul liniar $\mathcal{A}$ comută cu toți operatorii liniari acționînd într-un spațiu dat, să se arate că $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$.

33. Dacă un operator liniar $\mathcal{A}$ are un vector propriu e_0 cu valoarea proprie λ_0, atunci pentru operatorul $\mathcal{A}^2$ vectorul e_0 este de asemenea propriu cu valoarea proprie λ_0^2.

34. Se poate întîmpla ca un operator liniar $\mathcal{A}$ să nu admită vectori proprii, dar operatorul $\mathcal{A}^2$ să admită (de exemplu, dacă $\mathcal{A}$ este operatorul de rotație cu 90° în plan). Să se arate că dacă un operator $\mathcal{A}^2$ în spațiul $\mathfrak{R}_n$ admite un vector propriu cu valoare proprie nenegativă $\lambda = \mu^2$, atunci operatorul $\mathcal{A}$ admite de asemenea un vector propriu.

35. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai operatorului definiți prin matricile următoare:

a) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$;

d) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

36. Să se probeze următoarele fapte:

a) relația $N(\mathcal{A}) \supset T(\mathcal{A})$ este o condiție necesară și suficientă pentru ca $\mathcal{A}^2 = 0$;

b) pentru orice operator $\mathcal{A}$ avem $N(\mathcal{A}) \subset N(\mathcal{A}^2) \subset N(\mathcal{A}^3) \subset \ldots$;

c) pentru orice operator $\mathcal{A}$ avem $T(\mathcal{A}) \supset T(\mathcal{A}^2) \supset T(\mathcal{A}^3) \supset \ldots$;

d) dacă $T(\mathcal{A}^k) \cup N(\mathcal{A}^m)$, atunci

$$T(\mathcal{A}) \subset N(\mathcal{A}^{m+k-1}),\ T(\mathcal{A}^{m+k-1}) \subset N(\mathcal{A}).$$

37. Să se arate că fiecare operator liniar $\mathcal{A}$ de rang r, poate fi reprezentat ca sumă a r operatori liniari de rang 1.

38. Să se determinè toate subspațiile invariante distincte ale unui operator diagonal al spațiului $\mathcal{R}_n$ avînd elementele diagonale distincte și să se arate că numărul acestora este egal cu 2^n.

Capitolul 5

TRANSFORMAREA COORDONATELOR

Se cunoaște rolul alegerii corespunzătoare a unui sistem de coordonate în rezolvarea problemelor geometrice cu ajutorul geometriei analitice. Într-o formă mai extinsă, în legătură cu geometria spațiilor vectoriale n-dimensionale, rolul alegerii convenabile a sistemelor de coordonate va fi de asemenea de mare însemnătate. Acest capitol este consacrat regulilor de transformare a coordonatelor într-un spațiu vectorial n-dimensional. Rezultatele obținute aici vor permite în particular clasificarea formelor pătratice, care va fi tratată în capitolul 7.

§ 5.1. Formulele de trecere la o nouă bază

5.11. Fie $\{\mathbf{e}\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în spațiul n-dimensional $\mathcal{R}_n$ și $\{\mathbf{f}\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ o altă bază în același spațiu. Vectorii sistemului $\{\mathbf{f}\}$ sînt bine determinați prin descompunerile lor cu ajutorul primei baze:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= p_1^{(1)}e_1 + p_2^{(1)}e_2 + \ldots + p_n^{(1)}e_n, \\ f_2 &= p_1^{(2)}e_1 + p_2^{(2)}e_2 + \ldots + p_n^{(2)}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= p_1^{(n)}e_1 + p_2^{(n)}e_2 + \ldots + p_n^{(n)}e_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

sau, mai concis, (2)

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(j)} e_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

În formulele (1) și (2) coeficienții $p_i^{(j)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ definesc matricea

$$P = \| p_i^{(j)} \| = \begin{Vmatrix} p_1^{(1)} & p_1^{(2)} & \ldots & p_1^{(n)} \\ p_2^{(1)} & p_2^{(2)} & \ldots & p_2^{(n)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ p_n^{(1)} & p_n^{(2)} & \ldots & p_n^{(n)} \end{Vmatrix},$$

care se numește *matricea de trecere de la baza* {e} *la baza* {f}. Ca în alte cazuri similare anterioare (§ 4.2), coordonatele vectorilor f_j (relativ la baza {e}) apar scrise pe coloanele matricii P.

Determinantul D al matricii P este diferit de zero; într-adevăr, în caz contrar, coloanele ei și totodată vectorii f_1, f_2, ..., f_n ar fi liniar dependenți (3.12 **a**). Orice matrice pătratică cu determinantul nenul a fost denumită nesingulară. Așadar, *trecerea de la o bază a spațiului n-dimensional* $\mathfrak{R}_n$ *la o altă bază se realizează cu ajutorul unei matrici nesingulare.*

Formulele (1) odată cu matricea P definesc operatorul liniar corespunzător $\mathfrak{A}$ definit prin relațiile $f_i = \mathfrak{A}e_i (i = 1, 2, ..., n)$. Acesta se numește de asemenea *operatorul de trecere de la baza* {e} *la baza* {f}.

5.12. Invers, fie $\{\mathbf{e}\} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază dată în spațiul n-dimensional $\mathfrak{R}_n$ și $P = \| p_i^{(j)} \|$ o matrice nesingulară de ordin n. Construim prin formulele (1) sistemul de vectori $f_1, f_2, ..., f_n$. Evident, acești vectori sînt liniar independenți deoarece coloanele oricărei matrici nesingulare sînt liniar independente (3.12 **a**). Așadar, vectorii $f_1, f_2, ..., f_n$ formează o nouă bază a spațiului $\mathfrak{R}_n$. Astfel, *orice matrice nesingulară* $P = \| p_i^{(j)} \|$ *definește prin formulele* (1) *trecerea de la o bază a spațiului n-dimensional* $\mathfrak{R}_n$ *la o altă bază.*

5.13. Notăm un caz particular de trecere la o nouă bază, anume cazul cînd fiecare din vectorii f_k coincide cu vectorul corespunzător e_k, înmulțit cu un număr $\lambda_k \neq 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$. Formulele (1) capătă forma

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda_1 e_1 \\ f_2 &= \lambda_2 e_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= \lambda_n e_n, \end{aligned}$$

și matricea P are atunci forma diagonală

$$P = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n \end{Vmatrix}.$$

În particular, dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 1$, atunci se obține matricea *transformării identice* — matricea unitate

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix}; \qquad (3)$$

(prin transformarea identică baza inițială nu se modifică).

§ 5.2. Transformări succesive

5.21. Fie $P = \| p_i^{(j)} \|$ matricea de trecere de la baza $\{\mathbf{e}\} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la baza $\{\mathbf{f}\} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ și $Q = \| q_j^{(k)} \|$ matricea de trecere de la baza {f} la o bază $\{\mathbf{g}\} = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Determinăm matricea de trecere de la baza {e} direct la baza {g}. Formula de trecere de la baza {e} la baza {f} are forma (2)

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(j)} e_i \quad (j = 1,2, ..., n) \qquad (4)$$

și cea de la baza {f} la baza {g} este

$$g_k = \sum_{j=1}^{n} q_j^{(k)} f_j \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

Înlocuind (4) în (5), se obține

$$g_k = \sum_{j=1}^{n} q_j^{(k)} \sum_{i=1}^{n} p_i^{(j)} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_i^{(j)} q_j^{(k)} \right) e_i \quad (k = 1,2, ..., n). \qquad (6)$$

Pe de altă parte, dacă $T = \| t_i^{(k)} \|$ este matricea căutată de trecere de la baza {e} la baza {g}, atunci putem scrie

$$g_k = \sum_{i=1}^{n} t_i^{(k)} e_i \qquad (k = 1, 2,..., n), \qquad (7)$$

Comparînd (6) și (7), rezultă

$$t_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} p_i^{(j)} q_j^{(k)} \qquad (i, k = 1, 2, ..., n). \qquad (8)$$

Formula obținută (8) diferă de formula 4.43(8) doar prin notarea indicilor (și nu prin rolul acestora). Așadar, *matricea căutată T este produsul matricilor P și Q.*

5.22. Considerăm următorul caz particular de transformări succesive. Sistemul (1) poate fi rezolvat relativ la vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_n$, deoarece matricea P nu este singulară; se obține atunci un sistem de egalități de forma

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= q_1^{(1)}f_1 + q_2^{(1)}f_2 + \ldots + q_n^{(1)}f_n, \\ e_2 &= q_1^{(2)}f_1 + q_2^{(2)}f_2 + \ldots + q_n^{(2)}f_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= q_1^{(n)}f_1 + q_2^{(n)}f_2 + \ldots + q_n^{(n)}f_n \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

care definesc trecerea de la baza $\{\mathbf{f}\}$ la baza $\{\mathbf{e}\}$.

Trecerea succesivă de la baza $\{\mathbf{e}\}$ la baza $\{\mathbf{f}\}$ cu ajutorul matricii P și apoi de la baza $\{\mathbf{f}\}$ la baza $\{\mathbf{e}\}$ cu ajutorul matricii $Q = \|q_k^{(j)}\|$ este de fapt trecerea de la baza $\{\mathbf{e}\}$ la ea însăși, adică, în final, transformarea identică, cu matricea unitate; de aceea rezultă $PQ = E$.

§ 5.3. Transformarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei

5.31. Fie $\{\mathbf{e}\} = \{e_1 e_2, \ldots, e_n\}$ și $\{\mathbf{f}\} = \{f_1 f_2, \ldots, f_n\}$ două baze într-un spațiu vectorial n-dimensional $\mathcal{R}_n$. Orice vector $x \in \mathcal{R}_n$ poate fi reprezentat sub forma

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \ldots + \eta_n f_n, \qquad (10)$$

unde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt coordonatele vectorului x relativ la baza $\{\mathbf{e}\}$, iar $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ coordonatele lui x relativ la baza $\{\mathbf{f}\}$. Ne punem problema să calculăm coordonatele vectorului x relativ la baza $\{\mathbf{f}\}$ cunoscînd coordonatele lui x relativ la baza $\{\mathbf{e}\}$. Presupunem că este dată matricea $P = \|p_i^{(j)}\|$ de trecere de la baza $\{\mathbf{e}\}$ la baza $\{\mathbf{f}\}$. Atunci vectorii $\{\mathbf{e}\}$ se exprimă cu ajutorul vectorilor $\{\mathbf{f}\}$ prin formulele (9) sau, mai concis,

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} q_k^{(j)} f_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (11)$$

unde $Q = \|q_k^{(j)}\|$ este matricea inversă a matricii P. Înlocuind (11) în (10), rezultă

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j = \sum_{k=1}^{n} \eta_k f_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(\sum_{k=1}^{n} q_k^{(j)} f_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} q_k^{(j)} \xi_j \right) f_k,$$

de unde în virtutea unicității descompunerii vectorului x în baza $\{\mathbf{f}\}$, deducem

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{n} q_k^{(j)} \xi_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (12)$$

Adică explicit rezultă sistemul de egalități

$$\begin{aligned} \eta_1 &= q_1^{(1)}\xi_1 + q_1^{(2)}\xi_2 + \ldots + q_1^{(n)}\xi_n, \\ \eta_2 &= q_2^{(1)}\xi_1 + q_2^{(2)}\xi_2 + \ldots + q_2^{(n)}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n &= q_n^{(1)}\xi_1 + q_n^{(2)}\xi_2 + \ldots + q_n^{(n)}\xi_n. \end{aligned}$$

Astfel, *coordonatele unui vector x relativ la baza $\{\mathbf{f}\}$ se exprimă liniar cu ajutorul coordonatelor lui x relativ la baza $\{\mathbf{e}\}$; coeficienții acestor expresii liniare formează o matrice, care este transpusa matricii de trecere de la baza $\{\mathbf{f}\}$ la baza $\{\mathbf{e}\}$ (adică transpusa inversei matricii P).*

Folosind notația P^{-1} pentru matricea inversă și notînd cu S matricea definită prin relațiile (12), rezultă că $S = (P^{-1})'$.

5.32. Are loc și teorema inversă:

Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ coordonatele unui vector oarecare x relativ la o bază $\{\mathbf{e}\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a unui spațiu n-dimensional $\mathcal{R}_n$ și numerele $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ definite prin

$$\begin{aligned} \eta_1 &= s_{11}\xi_1 + s_{12}\xi_2 + \ldots + s_{1n}\xi_n, \\ \eta_2 &= s_{21}\xi_1 + s_{22}\xi_2 + \ldots + s_{2n}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n &= s_{n1}\xi_1 + s_{n2}\xi_2 + \ldots + s_{nn}\xi_n, \end{aligned}$$

unde $\det \|s_{jk}\| \neq 0$. Atunci în spațiul $\mathcal{R}_n$ se poate găsi o nouă bază $\{\mathbf{f}\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ astfel încît numerele $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ să devină coordonatele vectorului x relativ la baza $\{\mathbf{f}\}$.

Demonstrație. Considerăm matricea $S = \|s_{jk}\|$ și fie matricea $P = (S')^{-1}$ ale cărei elemente le notăm cu $p_i^{(j)}$. Cu ajutorul matricii P construim o nouă bază cu ajutorul formulelor (1). Afirmăm că această bază este cea căutată.

Într-adevăr, considerăm formulele de trecere (12) la coordonatele vectorului x relativ la noua bază. După cum am văzut, aceste formule se scriu cu ajutorul matricii $(P^{-1})'$. Dar această matrice coincide cu S, deoarece

$$(P^{-1})' = ([(S')^{-1}]^{-1})' = (S')' = S.$$

Așadar, numerele $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ și coordonatele vectorului x relativ la baza $\{\mathbf{f}\}$ sînt unul și același lucru, oricare ar fi x.

5.33. În mod similar cu 5.21 se poate construi matricea unei succesiuni de transformări de coordonate. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ coordonatele unui vector x relativ la baza $\{\mathbf{e}\}$ și numerele $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ și $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ definite prin egalitățile

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}\xi_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\tau_k = \sum_{j=1}^{n} q_{kj}\eta_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

cu matricile nesingulare $P = \| p_{ji} \|$ și $Q = \| q_{kj} \|$ respectiv. Atunci se pot exprima mărimile $\{\tau\}$ direct cu ajutorul mărimilor $\{\xi\}$ prin formulele

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{kj}p_{ji}\xi_i = \sum_{i=1}^{n} t_{ki}\xi_i \ (k = 1, 2, \ldots, n),$$

unde t_{ki} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ formează o matrice T, egală cu produsul matricilor Q și P.

§ 5.4. Transformarea coeficienților unei forme liniare

Presupunem că în spațiul $\mathfrak{R}_n$ este dată o formă liniară $L(x)$. Așa cum am văzut în 4.13, dacă în spațiul $\mathfrak{R}_n$ este aleasă o bază $\{\mathbf{e}\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ atunci valorile formei $L(x)$ pot fi calculate după formula

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k\xi_k,$$

unde ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sînt coordonatele vectorului x relativ la baza $\{\mathbf{e}\}$, iar $l_k = L(e_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Coeficienții l_k depind în mod evident de alegerea bazei $\{\mathbf{e}\}$. Deducem

aici regula de transformare a coeficienților unei forme liniare prin schimbarea bazei.

Presupunem că formulele

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(j)}e_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

definesc trecerea de la baza $\{\mathbf{e}\}$ la o nouă bază $\{\mathbf{f}\}$ și căutăm coeficienții formei liniare $L(x)$ în baza $\{\mathbf{f}\}$. Acești coeficienți sînt numerele $\lambda_j = L(f_j)$; calculînd aceste numere cu ajutorul formulelor (13), găsim

$$\lambda_j = L(f_j) = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(j)}L(e_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(j)}l_i.$$

Astfel, *coeficienții formei liniare se transformă în același mod cum se transformă vectorii bazei.*

§ 5.5. Transformarea matricii unui operator liniar

5.51. Considerăm un operator liniar $\mathcal{A}$ în spațiul n-dimensional $\mathfrak{R}_n$. Notăm cu $A_{(\mathbf{e})} = \| a_i^{(j)} \|$ matricea operatorului $\mathcal{A}$ relativ la o bază $\{\mathbf{e}\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ și cu $A_{(\mathbf{f})} = \| \alpha_q^{(p)} \|$ matricea sa relativ la o bază $\{\mathbf{f}\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Presupunem apoi că formulele de trecere de la baza $\{\mathbf{e}\}$ la baza $\{\mathbf{f}\}$ au forma

$$f_k = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(k)}e_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Notăm matricea de trecere $\| p_j^{(k)} \|$ cu P. Stabilim legătura între matricile $A_{(\mathbf{e})}$, $A_{(\mathbf{f})}$ și P. Matricea $A_{(\mathbf{e})} = \| a_i^{(j)} \|$ se determină prin sistemul de egalități

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)}e_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

iar matricea $A = \|\alpha_k^{(m)}\|$ prin sistemul de egalități

$$\mathcal{A}f_m = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m)}f_k \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Înlocuim în ultima formulă vectorii f_k prin expresiile lor scrise cu ajutorul vectorilor e_j (14), schimbînd indicele de însumare j cu i:

$$\mathcal{A}f_m = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m)} \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} p_i^{(k)} \alpha_k^{(m)} \right) e_i.$$

Acum aplicăm operatorul $\mathcal{A}$ celor doi membri ai formulei (14), folosind expresia vectorilor $\mathcal{A}e_j$ din (15):

$$\mathcal{A}f_m = \mathcal{A} \sum_{j=1}^{n} p_j^{(m)} e_j = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(m)} \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(m)} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)} e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i^{(j)} p_j^{(m)} \right) e_i.$$

Comparînd coeficienții lui e_i în ultimele două dezvoltări, găsim

$$\sum_{k=1}^{n} p_i^{(k)} \alpha_k^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} a_i^{(j)} p_j^{(m)}$$

sau în formă matricială

$$PA_{(f)} = A_{(e)}P. \tag{16}$$

Aceasta este legătura căutată între matricile $A_{(e)}$, $A_{(f)}$ și P. Înmulțind în ambii membri cu matricea P^{-1} la stînga, se obține expresia următoare pentru matricea $A_{(f)}$:

$$A_{(f)} = P^{-1}A_{(e)}P.$$

5.52. Folosind teorema produsului de determinanți (4.75), din (16) rezultă următoarea relație:

$$\det P \det A_{(f)} = \det A_{(e)} \det P$$

și cum $\det P \neq 0$,

$$\det A_{(e)} = \det A_{(f)}.$$

Astfel, *determinantul matricii unui operator nu depinde de alegerea bazei în spațiul respectiv*. De aceea vom putea vorbi de determinantul unui operator, înțelegînd prin acesta determinantul matricii acestui operator într-o bază oarecare.

5.53. În afara determinanților, există și alte funcții de elementele matricii unui operator care rămîn neschimbate prin trecerea la o nouă bază. Pentru a construi astfel de funcții, considerăm operatorul $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, unde λ este un

parametru luat din corpul K. Matricea acestui operator în baza $\{e\}$ este evident matricea $A_{(e)} - \lambda E$, iar în baza $\{f\}$ — matricea $A_{(f)} - \lambda E$. Conform celor demonstrate, pentru orice λ avem

$$\det(A_{(e)} - \lambda E) = \det(A_{(f)} - \lambda E).$$

În ambii membri se află polinoame de gradul n în λ. Deoarece aceste polinoame sînt egale, atunci coeficienții diverselor puteri ale lui λ sînt aceiași. Acești coeficienți sînt funcții de elementele matricii operatorului considerat, care rămîn deci nemodificate la schimbarea bazei. Explicităm forma acestor funcții. Determinantul matricii $A_{(e)} - \lambda E$ are forma

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} - \lambda & a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} - \lambda & \dots & a_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & \dots & a_n^{(n)} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n\lambda^n + \Delta_1\lambda^{n-1} + \dots + \Delta_{n-1}\lambda + \Delta_n.$$

Coeficientul Δ_1 al lui λ^{n-1} este egal cu suma elementelor diagonale $a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + \dots + a_n^{(n)}$, luată cu semnul $(-1)^{n-1}$, așa cum se vede imediat folosind definiția determinantului; acest număr se numește *urma* operatorului $\mathcal{A}$. Coeficientul Δ_2 al lui λ^{n-2} este suma tuturor minorilor diagonali de ordin 2, luată cu semnul $(-1)^{n-2}$ (un minor $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$ se numește diagonal dacă $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, ..., $i_k = j_k$). În mod similar, coeficientul Δ_k al lui λ^{n-k} este suma tuturor minorilor diagonali de ordin k, luată cu semnul $(-1)^{n-k}$. În sfîrșit, coeficientul Δ_n al lui λ^0, adică termenul liber, este egal chiar cu determinantul operatorului. Așadar, polinomul $\det(A_{(e)} - \lambda E)$ care nu depinde de alegerea bazei în spațiu, așa cum am văzut, poartă numele de *polinomul caracteristic al operatorului* $\mathcal{A}$.

§ 5.6. Tensori

5.61. Coordonatele unui vector, coeficienții unei forme liniare, elementele matricii unui operator liniar, sînt exemple de mărimi geometrice numite *tensori*.

Înainte de a trece la definiția corespunzătoare, raționalizăm puțin sistemul de notații adoptat.

Vectorii unei baze într-un spațiu n-dimensional $\mathcal{R}_n$ vor fi notați ca pînă acum, prin simboluri $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (cu indici inferiori).

Coordonatele vectorilor $x, y, \ldots$ vor fi notate respectiv prin simboluri $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$; $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n, \ldots$ (cu indici superiori.)

Coeficienții unei forme liniare $f(x)$ vor fi notați $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (cu indici inferiori).

Elementele matricii unui operator liniar vor fi notate prin a_i^j; indicele superior arată *numărul liniei* iar cel inferior arată *numărul coloanei* (spre deosebire de notațiile utilizate în 4.23).

Utilitatea unei astfel de plasări a indicilor se află în următoarea convenție de însumare: dacă avem o sumă de n monoame, astfel încît indicele de sumare i se întîlnește în termenul general al sumei de două ori — o dată sus și o dată jos, atunci *simbolul sumă va fi omis.*

De exemplu, dezvoltarea unui vector x în baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ va fi scrisă sub forma

$$x = \xi^i e_i$$

(simbolul sumă după i este omis, dar este subînțeles). Expresia unei forme liniare $f(x)$ cu ajutorul coordonatelor vectorului și coeficienților formei este

$$f(x) = l_i \xi^i.$$

Rezultatul aplicării operatorului $\mathcal{A}$ vectorului e_i are forma următoare

$$\mathcal{A} e_i = a_i^j e_j$$

(însumare după j). Coordonatele η^j ale vectorului $\mathcal{A}x$ se exprimă atunci prin coordonatele vectorului x în modul următor:

$$\eta^j = a_i^j \xi^i$$

(însumare după i).

Mărimile care se referă la un nou sistem de coordonate vor fi notate prin aceleași simboluri, dar cu accente pe indici. Astfel, vectorii noii baze vor fi notați $e_{1'}, e_{2'}, \ldots, e_{n'}$, noile coordonate ale vectorului x sînt notate $\xi^{1'}, \xi^{2'}, \ldots, \xi^{n'}$ etc.

Elementele matricii de trecere de la baza e_i la baza $e_{i'}$, le notăm cu $p_{i'}^i$, deci

$$e_{i'} = p_{i'}^i e_i \tag{17}$$

(însumare după i).

Coeficienții matricii trecerii inverse vor fi notați prin $q_i^{i'}$:

$$e_i = q_i^{i'} e_{i'} \tag{18}$$

(însumare după i'). Matricea $q_i^{i'}$ este inversa matricii $p_{i'}^i$, ceea ce poate fi scris astfel:

$$p_{i'}^i q_j^{i'} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } i \neq j, \\ 1 \text{ pentru } i = j \end{cases} \tag{19}$$

sau prin egalitatea

$$p_{i'}^i q_{i'}^{j'} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } i' \neq j', \\ 1 \text{ pentru } i' = j'. \end{cases} \tag{20}$$

Pentru prescurtarea scrierii, mărimea depinzînd de indicii i și j, egală cu 0 dacă $i \neq j$ și cu 1 dacă $i = j$ se notează cu δ_j^i (simbolul lui Kronecker); astfel, relația (19) se scrie echivalent

$$p_{i'}^i q_j^{i'} = \delta_j^i, \tag{21}$$

iar relația (20) se scrie

$$p_i^{i'} q_{i'}^{j'} = \delta_{i'}^{j'}. \tag{22}$$

5.62. Pentru a arăta avantajele utilizării noilor notații, deducem din nou formulele de transformare a coordonatelor unui vector, a coeficienților unei forme liniare și a elementelor matricii unui operator prin trecere la o nouă bază.

Fie acum $x = \xi^i e_i = \xi^{i'} e_{i'}$. Înlocuind e_i prin $q_i^{i'} e_{i'}$, conform (18) se obține

$$x = \xi^i q_i^{i'} e_{i'} = \xi^{i'} e_{i'}.$$

Deoarece $e_{i'}$ constituie o bază, rezultă

$$\xi^{i'} = q_i^{i'} \xi^i. \tag{23}$$

Aceasta este tocmai formula de transformare a coordonatelor unui vector.

Fie acum o formă liniară $L(x)$. Numerele $l_{i'}$ se determină ca de obicei prin egalitățile $l_{i'} = L(e_{i'})$. Înlocuind $e_{i'}$ prin $p_{i'}^i e_i$, conform (17), se obține

$$l_{i'} = L(p_{i'}^i e_i) = p_{i'}^i L(e_i) = p_{i'}^i l_i.$$

Astfel,

$$l_{i'} = p^i_{i'} l_i; \tag{24}$$

tocmai formula căutată.

În sfîrșit, fie $\mathcal{A}$ un operator. Elementele matricii sale într-o nouă bază se determină din egalitățile

$$\mathcal{A}e_{i'} = a^{j'}_{i'} e_{j'}.$$

Înlocuind aici $e_{i'}$ (respectiv $e_{j'}$) prin formulele $p^i_{i'} e_i$ (respectiv $p^j_{j'} e_j$), folosind (17), rezultă

$$p^i_{i'} \mathcal{A}e_i = a^{j'}_{i'} p^j_{j'} e_j.$$

Dar $\mathcal{A}e_i = a^j_i e_j$ și prin urmare

$$p^i_{i'} a^j_i e_j = a^{j'}_{i'} p^j_{j'} e_j.$$

Deoarece e_j constituie o bază, rezultă

$$p^i_{i'} a^j_i = a^{j'}_{i'} p^j_{j'}.$$

Pentru a obține de aici $a^{j'}_{i'}$, înmulțim ambii membri ai acestei egalități cu $q^{k'}_j$ și însumăm după j. Conform formulei (22) vom obține

$$p^i_{i'} a^j_i q^{k'}_j = a^{j'}_{i'} p^j_{j'} q^{k'}_j = a^{j'}_{i'} \delta^{k'}_{j'}.$$

Conform definiției mărimilor $\delta^{k'}_{j'}$ și însumînd după j', trebuie reținut numai termenul care corespunde valorii $j' = k'$. În acest caz $\delta^{k'}_{k'} = 1$ și, prin urmare,

$$a^{k'}_{i'} = p^i_{i'} q^{k'}_j a^j_i, \tag{25}$$

tocmai formula căutată.

Se verifică fără dificultate că toate cele trei formule de transformare obținute mai sus coincid cu formulele obținute anterior pe cale obișnuită (§§ 5.3, 5.4, 5.5). Formulele (23), (24), (25) exprimă mai multe proprietăți comune. În primul rînd, aceste formule sînt liniare relativ la mărimile care se transformă. Apoi coeficienții acestor formule sînt fie elemente ale matricii de trecere de la baza veche la baza nouă, fie elemente ale matricii inverse de trecere, fie și una și alta.

5.63. Se poate acum trece la definiția tensorilor. Tensorii se împart în *covarianți*, *contravarianți* și *micști*. În plus, orice tensor are un ordin bine determinat.

Începem cu definiția tensorului covariant de ordinul trei.

Presupunem că există o regulă care permite ca în fiecare sistem de coordonate dintr-un spațiu n-dimensional $\mathcal{X}_n$ să se construiască n^3 numere T_{ijk} (componentele tensorului), fiecare fiind definit pentru indicii i, j, k fixați între 1 și n. Aceste numere T_{ijk} formează, prin definiție, *un tensor covariant de ordin trei* dacă transformarea mărimilor T_{ijk} prin trecerea la o nouă bază se realizează prin formula

$$T_{i'j'k'} = p^i_{i'} p^j_{j'} p^k_{k'} T_{ijk}.$$

În mod analog se definesc tensori covarianți de orice ordin; un tensor de ordin m are n^m componente (și nu n^3) și în formula de transformare se află nu trei factori de forma $p^i_{i'}$, ci m astfel de factori.

Coeficienții unei forme liniare, care se transformă, așa cum am văzut, după formula (24), oferă un exemplu de tensor covariant de ordinul întîi.

Dăm acum noțiunea de *tensor contravariant de ordin trei*. Presupunem că există o regulă care permite ca în fiecare sistem de coordonate să se construiască n^3 numere T^{ijk}, fiecare din ele fiind definit pentru indici i, j, k cuprinși între 1 și n. Aceste numere T^{ijk} formează un tensor contravariant de ordin trei dacă transformarea mărimilor T^{ijk} prin schimbarea bazei are loc după formula

$$T^{i'j'k'} = q^{i'}_i q^{j'}_j q^{k'}_k T^{ijk}.$$

În mod analog se definesc tensori contravarianți de orice ordin. În particular, coordonatele unui vector x formează un tensor contravariant de ordinul întîi.

Termenii „covariant" și „contravariant", introduși mai sus, se explică în modul următor. „Covariant" înseamnă „care se schimbă la fel" cu vectorii unei baze, adică prin utilizarea coeficienților $p^i_{i'}$. „Contravariant" înseamnă „care se schimbă invers", adică prin utilizarea coeficienților $q^{i'}_i$.

Se pot de asemenea considera tensori micști. De exemplu, n^3 numere T^k_{ij} date în fiecare sistem de coordonate, formează un *tensor mixt de ordin trei, de două ori covariant și o dată contravariant* dacă transformarea acestor mărimi prin trecerea la o nouă bază se realizează după formula

$$T^{k'}_{i'j'} = p^i_{i'} p^j_{j'} q^{k'}_k T^k_{ij}.$$

În mod analog se definesc tensori micști de l ori covarianți și de m ori contravarianți.

De exemplu, elementele matricii unui operator liniar formează un tensor mixt de ordin doi, o dată covariant și o dată contravariant. Trebuie notat că poziția indicilor permite indicarea caracterului unui tensor.

5.64. *Operații cu tensori.* Se poate defini operația de *adunare* a doi tensori de aceeași structură T^k_{ij} și S^k_{ij} (de două ori covarianți și o dată contravarianți). Suma lor va fi un tensor Q^k_{ij} de aceeași structură; în orice sistem de coordonate, prin fixarea lui i, j, k, componentele sumei reprezintă suma componentelor corespunzătoare. Faptul că mărimile Q^k_{ij} formează într-adevăr un tensor (de aceeași structură cu a termenilor), rezultă din următoarele egalități:

$$Q^{k'}_{i'j'} = T^{k'}_{i'j'} + S^{k'}_{i'j'} = p^i_{i'}p^j_{j'}q^{k'}_k T^k_{ij} + p^i_{i'}p^j_{j'}q^{k'}_k S^k_{ij} =$$
$$= p^i_{i'}p^j_{j'}q^{k'}_k(T^k_{ij} + S^k_{ij}) = p^i_{i'}p^j_{j'}q^{k'}_k Q^k_{ij}.$$

Operația de *înmulțire* este aplicată tensorilor de orice structură. De exemplu, înmulțim un tensor T_{ij} cu un tensor S^l_k. Acesta va fi un tensor Q^l_{ijk} de ordinul 4; în fiecare sistem de coordonate, pentru i, j, k, fixate componenta respectivă este tocmai produsul componentelor corespunzătoare ale factorilor. Caracterul tensorial al lui Q^l_{ijk} se verifică în modul următor:

$$Q^{l'}_{i'j'k'} = T_{i'j'}S^{l'}_{k'} = p^i_{i'}p^j_{j'}T_{ij}p^k_{k'}q^{l'}_l S^l_k = p^i_{i'}p^j_{j'}p^k_{k'}q^{l'}_l T_{ij}S^l_k =$$
$$= p^i_{i'}p^j_{j'}p^k_{k'}q^{l'}_l Q^l_{ijk}.$$

Considerăm acum operația de *contracție*, care se aplică tensorilor pentru care există cel puțin un indice covariant și unul contravariant. De exemplu, fie tensorul T^k_{ij}, căruia îi aplicăm contracția indicilor k și i, care constă în a considera mărimile T^i_{ij}, unde i este indice de însumare și se însumează după i; mărimile $T_j = T^i_{ij}$ depind numai de indicele j. *Se obține astfel un nou tensor, al cărui ordin este cu două unități mai mic decît cel inițial.* Arătăm caracterul tensorial al lui T_j din exemplul anterior. Avem

$$T_{j'} = T^{i'}_{i'j'} = p^i_{i'}p^j_{j'}q^{i'}_k T^k_{ij} = (p^i_{i'}q^{i'}_k)p^j_{j'}T^k_{ij} = \delta^i_k p^j_{j'}T^k_{ij}.$$

Aici prin însumare după k este suficient să ne mărginim la valoarea $k = i$; deoarece $\delta^i_i = 1$, obținem

$$T_{j'} = p^j_{j'}T^i_{ij} = p^j_{j'}T_j,$$

ceea ce trebuia arătat.

Ce se obține dacă contractăm un tensor mixt de ordin doi T^i_j după cei doi indici? Mărimea $T = T^i_i$ nu are nici un indice, adică în orice sistem de coordonate ea reprezintă doar un număr. Acest număr este unul și același în orice sistem de coordonate; într-adevăr,

$$T' = T^{i'}_{i'} = p^i_{i'}q^{i'}_j T^j_i = \delta^i_j T^j_i = T^i_i = T.$$

O astfel de mărime numerică independentă de sistemul de coordonate se numește *invariant*. Așadar, operația de contracție a tensorilor poate conduce la obținerea de invarianți.

Dacă tensorul a^i_j, corespunzînd unui operator liniar $\mathcal{A}$, este contractat după indicii săi, atunci invariantul obținut a^i_i va fi tocmai urma operatorului $\mathcal{A}$ (suma elementelor diagonale ale matricii asociate). Invarianța acestei mărimi a fost deja demonstrată prin alte mijloace (5.53). Iată încă un exemplu: matricea c^i_l a produsului a doi operatori cu matricile corespunzătoare a^k_i și b^l_l este un tensor mixt de rangul doi, care se obține prin contracția tensorului de rangul patru $a^k_i b^l_l$ după indicii k și l.

PROBLEME

1. Un vector $x \in \mathcal{R}_n$ are relativ la o bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$ coordonatele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Cum trebuie construită o bază în $\mathcal{R}_n$ astfel încît coordonatele lui x relativ la noua bază să devină $1, 0, \ldots, 0$?

2. Într-un spațiu n-dimensional $\mathcal{R}_n$ este fixată o bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Să se arate că orice subspațiu $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}_n$ se poate defini ca mulțimea tuturor vectorilor $x \in \mathcal{R}_n$ ale căror coordonate (relativ la baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$) satisfac un sistem de ecuații de forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

3. (Continuare). Să se arate că orice hiperplan $H \subset \mathcal{R}_n$ poate fi definit ca mulțimea tuturor vectorilor $x \in \mathcal{R}_n$ ale căror coordonate (relativ la baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$) satisfac un sistem de ecuații de forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

4. Într-un plan sînt alese trei baze; coordonatele unui vector x relativ la aceste baze sînt respectiv ξ_1, ξ_2; η_1, η_2; τ_1, τ_2. Presupunem că

$$\eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2; \qquad \tau_1 = b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2;$$
$$\eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2; \qquad \tau_2 = b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2;$$
$$A = \|a_{ij}\|, \qquad B = \|b_{ij}\|.$$

Să se exprime coordonatele τ_1, τ_2 cu ajutorul coordonatelor η_1, η_2.

5. Pentru o formă liniară dată $f(x)$ nenulă în spațiul $\mathcal{R}_n$ să se indice o bază $g_1, g_2, \ldots, g_n$ astfel încît pentru orice vector $x = \sum_{k=1}^{n} \eta_k g_k$ să aibă loc egalitatea $f(x) = \eta_1$.

6. Se consideră un operator $\mathcal{A}$ care acționează într-un spațiu n-dimensional $\mathcal{R}$, avînd un subspațiu invariant k-dimensional $\mathcal{R}'$. Atunci, socotind pentru moment că operatorul $\mathcal{A}$ acționează doar în subspațiul $\mathcal{R}'$, se poate construi polinomul caracteristic corespunzător de grad k. Să se arate că acest polinom este divizor al polinomului caracteristic al operatorului $\mathcal{A}$ acționînd în întreg spațiul $\mathcal{R}$.

7. Fie $\lambda = \lambda_0$ o rădăcină multiplă de ordin r a ecuației $\det \| A_{(e)} - \lambda E \| = 0$. Să se arate ca dimensiunea subspațiului propriu $\mathcal{R}^{(\lambda_0)}$ al operatorului $\mathcal{A}$ corespunzînd rădăcinii λ_0, nu depășește r.

8. Să se arate că mărimile δ_i^j formează un tensor de ordinul doi, o dată covariant și o dată contravariant.

9. Un sistem de mărimi S_{ij} este definit în fiecare sistem de coordonate prin rezolvarea sistemului de ecuații

$$T^{ik} S_{ij} = \delta_j^k,$$

unde T^{ik} reprezintă un tensor covariant de rangul doi, astfel încît $\det \|T^{ik}\| \neq 0$. Să se arate că S_{ij} reprezintă un tensor covariant de ordinul doi.

10. Dacă l_i și ζ^i au sensul indicat în text, ce sens geometric are contracția $l_i \zeta^j$ după cei doi indici?

Capitolul 6

FORMA CANONICĂ A MATRICII UNUI OPERATOR LINIAR

Doi operatori $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ acționînd într-un spațiu n-dimensional $\mathcal{R}_n$ se numesc *echivalenți* dacă există două baze în $\mathcal{R}_n$ astfel încît matricea operatorului $\mathcal{A}$ în prima bază să coincidă cu matricea operatorului $\mathcal{B}$ în cea de a doua bază. Evident, operatorii echivalenți definesc în spațiul $\mathcal{R}_n$ aceeași transformare liniară. Dar cum putem decide, cunoscînd matricile operatorilor $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ într-o aceeași bază, dacă acești operatori sînt sau nu echivalenți?

În acest capitol, pentru orice operator liniar dat $\mathcal{A}$ într-un spațiu n-dimensional (complex sau real) vom indica o bază în care matricea A a operatorului $\mathcal{A}$ are o formă „canonică", adică într-un anumit sens cea mai simplă posibilă.

Forma canonică poate fi obținută direct prin cunoașterea elementelor matricii operatorului $\mathcal{A}$ într-o bază oarecare. Se va demonstra că dacă operatorii $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sînt echivalenți, atunci forma canonică a matricilor lor va fi aceeași. Astfel, o condiție necesară și suficientă pentru echivalența a doi operatori este ca matricile lor canonice să coincidă.

Vom începe cu studiul unei clase particulare de operatori (§ 6.1), cazul general va fi considerat în § 6.3.

§ 6.1. Forma canonică a matricii unui operator nilpotent

6.11. Un operator liniar $\mathcal{B}$ acționînd într-un spațiu n-dimensional $\mathcal{R}_n$ se numește *nilpotent* dacă există r natural astfel încît $\mathcal{B}^r = 0$, adică $\mathcal{B}^r x = 0$ pentru orice $x \in \mathcal{R}_n$. Presupunem că $\mathcal{B}$ este operator nilpotent; anume $\mathcal{B}^r = 0$ și $\mathcal{B}^{r-1} \neq 0$ (adică există $x \in \mathcal{R}_n$ astfel încît $\mathcal{B}^{r-1} x \neq 0$). Vom numi *înălțime* a unui vector $x \in \mathcal{R}_n$ cel mai mic întreg m astfel încît $\mathcal{B}^m x = 0$. Toți vectorii $x \in \mathcal{R}_n$ au, conform ipotezei făcute, înălțimea $\leqslant r$, și există vectori cu înălțimea r. Pentru orice $k \leqslant r$, vom nota cu $\mathcal{R}_k$ mulțimea tuturor vectorilor de înălțime $\leqslant k$. Evident, $\mathcal{R}_k$ este un subspațiu în $\mathcal{R}_n$ (dacă $x \in \mathcal{R}_k$ și $y \in \mathcal{R}_k$, atunci $\mathcal{B}^k x = 0$, $\mathcal{B}^k y = 0$, de unde pentru orice $\alpha \in K$, $\beta \in K$, avem $\mathcal{B}^k(\alpha x + \beta y) = 0$, deoarece înălțimea

vectorului $\alpha x + \beta y$ nu depășește k și $\alpha x + \beta y \in \mathcal{H}_k$). Apoi, $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_n$ (deoarece vectorii din $\mathcal{H}_n$ au înălțimea $\leqslant r$) și

$$0 = \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{H}_{r-1} \subset \mathcal{H}_r = \mathcal{H}_n.$$

Notăm dimensiunea acestor subspații respectiv prin $m_0 = 0 \leqslant m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_r = n$. Vom construi o bază a spațiului $\mathcal{H}_n$ în modul următor.

Așa cum am văzut, $\mathcal{H}_{r-1}$ nu coincide cu întreg spațiul $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_r$. De aceea se pot găsi vectori $f_1, \ldots, f_{p_1}$ situați în $\mathcal{H}_r$ și liniar independenți peste $\mathcal{H}_{r-1}$ (2.44); așadar, $p_1 = m_r - m_{r-1}$. Evident vectorii $\mathcal{B}f_1, \ldots, \mathcal{B}f_{p_1}$ sînt situați în $\mathcal{H}_{r-1}$ și în plus sînt liniar independenți peste $\mathcal{H}_{r-2}$: într-adevăr, dacă am avea

$$c_1 \mathcal{B}f_1 + \ldots + c_{p_1}\mathcal{B}f_{p_1} = g \in \mathcal{H}_{r-2},$$

atunci, aplicînd $\mathcal{B}^{r-2}$, ar rezulta că

$$c_1 \mathcal{B}^{r-1}f_1 + \ldots + c_{p_1}\mathcal{B}^{r-1}f_{p_1} = 0,$$

sau echivalent

$$c_1 f_1 + \ldots + c_{p_1} f_{p_1} \in \mathcal{H}_{r-1},$$

ceea ce are loc doar pentru toți coeficienții c_i nuli. Rezultă atunci că dimensiunea $m_{r-1} - m_{r-2}$ a spațiului $\mathcal{H}_{r-1}$ peste $\mathcal{H}_{r-2}$ este egală sau mai mare decît dimensiunea $m_r - m_{r-1}$ a spațiului $\mathcal{H}_r$ peste $\mathcal{H}_{r-1}$. Completăm vectorii $\mathcal{B}f_1, \ldots, \mathcal{B}f_{p_1}$ prin vectorii $f_{p_1+1}, \ldots, f_{p_2}$ în $\mathcal{H}_{r-1}$ pînă la un sistem maximal, liniar independent peste $\mathcal{H}_{r-2}$ ($p_2 = m_{r-1} - m_{r-2}$). Aplicînd tuturor acestor vectori operatorul $\mathcal{B}$, se obțin vectorii din $\mathcal{H}_{r-2}$.

$$\mathcal{B}^2 f_1, \ldots, \mathcal{B}^2 f_{p_1}, \quad \mathcal{B}f_{p_1+1}, \ldots, \mathcal{B}f_{p_2},$$

liniar independenți peste $\mathcal{H}_{r-3}$, fapt care se demonstrează ca mai sus. De aici rezultă $m_{r-2} - m_{r-3} \geqslant m_{r-1} - m_{r-2}$ și se pot construi în spațiul $\mathcal{H}_{r-2}$ vectori $f_{p_2+1}, \ldots, f_{p_3}$, generînd împreună cu vectorii precedenți un sistem liniar independent peste $\mathcal{H}_{r-3}$.

Trecînd în același mod la spațiile $\mathcal{H}_{r-3}, \ldots, \mathcal{H}_0 = (0)$, se obține în final un sistem total de n vectori liniar independenți.

6.12. Sistemul obținut de vectori poate fi scris într-un tablou

$$\begin{array}{l} f_1, \ldots, f_{p_1}, \\ \mathcal{B}f_1, \ldots, \mathcal{B}f_{p_1}, f_{p_1+1}, \ldots, f_{p_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{B}^{r-1}f_1, \ldots, \mathcal{B}^{r-1}f_{p_1}, \mathcal{B}^{r-2}f_{p_1+1}, \ldots, \mathcal{B}^{r-2}f_{p_2}, \ldots, f_{p_{r-1}+1}, \ldots, f_{p_r}. \end{array}$$

Vectorii situați în prima linie a tabloului au înălțimea r, vectorii din linia a doua au înălțimea $r-1$ etc.; vectorii ultimei linii au înălțimea 1, adică prin operatorul $\mathcal{B}$ ei sînt transformați în 0. Fiecare coloană a tabloului determină un subspațiu invariant al operatorului $\mathcal{B}$; primele p_1 subspații invariante au fiecare dimensiunea r, următoarele $p_2 - p_1$ au fiecare dimensiunea $r-1$ etc. Ultimele coloane, formate din cîte un element, determină subspații invariante unidimensionale.

Întreg spațiul $\mathcal{H}_n$ este suma directă a celor p_r subspații indicate.

6.13. Scriem matricea operatorului $\mathcal{B}$ în subspațiul generat de vectorii primei coloane. Ca bază alegem vectorii $\mathcal{B}^{r-1}f_1$, $\mathcal{B}^{r-2}f_1, \ldots, \mathcal{B}f_1, f_1$; în această ordine, ei sînt dispuși după creșterea înălțimii. În această scriere primul vector al bazei este transformat de operatorul $\mathcal{B}$ în 0, al doilea este transformat în primul, ..., al r-lea în al $(r-1)$-lea; de aceea matricea operatorului $\mathcal{B}$ conține, conform 4.23, r linii și r coloane și are forma

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array} \right\| \qquad (1)$$

cu elemente nenule (și egale cu 1) imediat deasupra diagonalei principale.

O formă analoagă are matricea operatorului $\mathcal{B}$ în celelalte subspații invariante, corespunzînd celorlalte coloane ale tabloului anterior; deosebirea față de matricea (1) constă doar în numărul liniilor și coloanelor.

6.14. Matricea operatorului $\mathcal{B}$, acționînd în întreg spațiul $\mathcal{R}_n$, va fi cvasidiagonala (4.52) cu blocurile indicate pe diagonală

$$B = \left\| \begin{array}{|cccc|} \hline 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right. \left. \begin{array}{|cccc|} \hline 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right. \ddots \left. \begin{array}{|cc|} \hline 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right. \ddots \left. \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \right. \ddots \left. \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \right\| \cdot \quad (2)$$

Numărul blocurilor de dimensiunea r este egal cu p_1, numărul blocurilor de dimensiune $r-1$ este egal cu $p_2 - p_1$, ..., numărul blocurilor de dimensiune 2 este egal cu $p_{r-1} - p_{r-2}$, numărul blocurilor de dimensiune 1 este egal cu $p_r - p_{r-1}$. Se înțelege că dacă există j astfel încît $p_{r-j+1} = p_{r-j}$, atunci în matricea (2) nu vor exista blocuri de dimensiune j.

§ 6.2. Algebre; algebra polinoamelor într-o nedeterminată

6.21. Dăm mai jos cîteva definiții din teoria algebrelor. Un spațiu vectorial $\mathcal{R}$ peste un corp de numere K se numește

K-algebră (sau *algebră peste K*) dacă în $\mathcal{R}$ este definită o operație de *înmulțire*, care asociază oricărei perechi x, y de elemente din $\mathcal{R}$ un element $x \cdot y$ din $\mathcal{R}$, astfel încît să fie satisfăcute următoarele condiții:

1) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$, pentru orice x și y din $\mathcal{R}$ și pentru orice $\alpha \in K$;

2) $(xy)z = x(yz)$ pentru orice x, y, z din $\mathcal{R}$ (*asociativitate*);

3) $(x + y)z = xz + yz$ și $z(x + y) = zx + zy$ pentru orice x, y, z din $\mathcal{R}$ (*distributivitate*).

În general, înmulțirea poate să nu fie comutativă (adică se poate întîmpla să existe x, y în $\mathcal{R}$ astfel încît $xy \neq yx$). Dacă înmulțirea ar fi comutativă, adică ar fi îndeplinită condiția

4) $xy = yx$ pentru orice x, y din $\mathcal{R}$, atunci se spune că algebra $\mathcal{R}$ este comutativă.

Fie 0 vectorul nul al spațiului $\mathcal{R}$. Atunci pentru orice $x \in \mathcal{R}$ avem

$$0 \cdot x = (0 + 0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

de unde rezultă că $0 \cdot x = 0$.

Un element $e \in \mathcal{R}$ se numește *element neutru la stînga* dacă $ex = x$ pentru orice $x \in \mathcal{R}$ și *element neutru la dreapta* dacă $xe = x$ pentru orice $x \in \mathcal{R}$; de asemenea, $e \in \mathcal{R}$ se numește *element neutru bilateral* sau *element unitate* în $\mathcal{R}$ dacă $ex = xe = x$ pentru orice $x \in \mathcal{R}$ (dacă există, un astfel de element este unic).

Un element $x \in \mathcal{R}$ se numește *invers la stînga al elementului* $y \in \mathcal{R}$ dacă xy este element unitate în $\mathcal{R}$; în acest caz, y se numește *invers la dreapta* pentru x. Dacă un element z are invers la stînga și la dreapta, atunci inversul său este unic (vezi 4.76 a) și se notează z^{-1}; se mai spune atunci că z este *inversabil*.

Produsul zu a două elemente inversabile z și u este de asemenea inversabil, avînd inversul $u^{-1}z^{-1}$. Dacă elementul u este inversabil, atunci ecuația $ux = v$ are soluția $x = u^{-1}v$; deoarece aceasta se obține din însăși ecuația considerată prin înmulțire cu u^{-1}, ea este unică. În cazul comutativ se utilizează notația $x = \frac{v}{u}$ sau $x = v : u$; acest element se

numește *cîtul* elementelor v și u. Pentru cîturi se verifică ușor următoarele reguli:

$$\frac{v_1}{u_1}+\frac{v_2}{u_2}=\frac{v_1u_2+u_1v_2}{u_1u_2} \text{ (dacă } u_1 \text{ și } u_2 \text{ sînt inversabile);}$$

$$\frac{v_1}{u_1}\cdot\frac{v_2}{u_2}=\frac{v_1v_2}{u_1u_2} \text{ (dacă } u_1 \text{ și } u_2 \text{ sînt inversabile);}$$

$$\frac{v_1}{u_1}:\frac{v_2}{u_2}=\frac{v_1u_2}{u_1v_2} \text{ (dacă } u_1,\ u_2,\ v_2 \text{ sînt inversabile).}$$

Prin definiție algebra $\mathfrak{K}$ *are dimensiunea* n dacă spațiul vectorial $\mathfrak{K}$ corespunzător are dimensiunea n.

6.22. *Exemple*

a. În orice spațiu vectorial $\mathfrak{K}$ punem $x\cdot y=0$ pentru orice $x\in\mathfrak{K}$, $y\in\mathfrak{K}$. Se obține atunci o algebră, numită *algebra trivială*.

b. Un exemplu de algebră comutativă netrivială peste un corp K îl constituie mulțimea Π a tuturor polinoamelor

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{p}a_k\lambda^k$$

cu coeficienți în K, cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire. În această algebră, polinomul $e(\lambda)$ avînd $a_0=1$ și toți ceilalți coeficienți nuli este element neutru.

c. Spațiul vectorial $L(\mathfrak{K}_n)$ al tuturor matricilor pătratice de ordin n cu elementele din K, cu înmulțirea uzuală de matrici constituie un exemplu de algebră necomutativă finit-dimensională de dimensiune n^2 (4.73 b). Această algebră are element neutru, anume matricea unitate E.

d. Un exemplu mai general de algebră necomutativă avînd element neutru îl constituie spațiul vectorial $\mathfrak{B}(\mathfrak{K})$ al tuturor operatorilor liniari acționînd într-un spațiu vectorial $\mathfrak{K}$, cu operația uzuală de produs (compunere) de operatori (4.33).

6.23. a. Un spațiu $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{K}$ se numește *subalgebră* a unei algebre $\mathfrak{K}$ dacă din faptul că $x\in\mathfrak{L}$, $y\in\mathfrak{L}$, rezultă că $xy\in\mathfrak{L}$. Un subspațiu $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{K}$ se numește *ideal drept* în $\mathfrak{K}$ dacă din $x\in\mathfrak{L}$, $y\in\mathfrak{K}$ rezultă $xy\in\mathfrak{L}$ și *ideal stîng* în $\mathfrak{K}$ dacă $x\in\mathfrak{L}$, $y\in\mathfrak{K}$ implică $yx\in\mathfrak{L}$. Un ideal drept și stîng în același timp se numește *ideal bilateral*. Într-o algebră comutativă nu există nici o distincție între ideale drepte, stîngi și bilaterale. În orice algebră $\mathfrak{K}$ există două ideale bilaterale evidente: **unul** notat (0), constînd din singurul element 0, iar celălalt constînd din toate elementele din $\mathfrak{K}$. Toate celelalte ideale (drepte, stîngi sau bilaterale) se numesc ideale *proprii*. Orice ideal este o subalgebră. Reciproca acestei afirmații este falsă; de exemplu, mulțimea tuturor polinoamelor $P(\lambda)$ avînd proprietatea că $P(0)=P(1)$ formează o subalgebră a algebrei Π, care nu este un ideal. Mulțimea tuturor polinoamelor $P(\lambda)$ satisfăcînd condiția $P(0)=0$ constituie un ideal propriu în algebra Π.

b. Fie $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{K}$ un subspațiu al algebrei $\mathfrak{K}$. Considerăm spațiul-cît $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ (2.48), adică spațiul vectorial al claselor X de elemente $x\in\mathfrak{K}$ congruente relativ la subspațiul $\mathfrak{L}$. Dacă $\mathfrak{L}$ este un ideal bilateral în $\mathfrak{K}$, atunci pentru clasele $X\in\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$, introducem, alături de operațiile liniare, o operație de înmulțire. Anume, considerînd clasele X, Y, alegem elemente arbitrare $x\in X$, $y\in Y$ și prin produsul XY vom înțelege clasa produsului xy. Această operație este bine definită, deoarece dacă în clasa X alegem un element x', iar în clasa Y un element y', atunci vom avea

$$x'y'-xy=x'(y'-y)+(x'-x)\,y;$$

acest element aparține idealului $\mathfrak{L}$, odată cu $y'-y$ și $x'-x$. Din condițiile 6.21, 1)—3) îndeplinite în algebra $\mathfrak{K}$, rezultă imediat că aceste condiții sînt îndeplinite pentru clasele $X\in\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$; de aceea spațiul-cît $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ cu operația de înmulțire anterioară este de asemenea o algebră. Algebra $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ se numește *algebra-cît a lui* $\mathfrak{K}$ *prin idealul bilateral* $\mathfrak{L}$. Este evident că dacă algebra $\mathfrak{K}$ este comutativă, atunci algebra-cît $\mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ este comutativă.

6.24. Fie $\mathfrak{K}'$ și $\mathfrak{K}''$ două algebre peste corpul K. Un morfism $\omega:\mathfrak{K}'\to\mathfrak{K}''$ de spații vectoriale (2.71) se numește *morfism de algebre* dacă alături de condițiile (2.71), prin asigură că ω este morfism de spații vectoriale, anume

a) $\omega(x'+y')=\omega(x')+\omega(y')$ pentru orice x', $y'\in\mathfrak{K}'$;

b) $\omega(\alpha x')=\alpha\omega(x')$ pentru orice $x'\in\mathfrak{K}'$ și oricare ar fi $\alpha\in K$, este îndeplinită de asemenea condiția

c) $\omega(x'\cdot y')=\omega(x')\cdot\omega(y')$ pentru orice x', $y'\in\mathfrak{K}'$.

Dacă un morfism ω este epimorfism (respectiv monomorfism

sau izomorfism) al spațiului $\mathcal{X}'$ în spațiul $\mathcal{X}''$ (2.71), atunci el se numește *epimorfism* (respectiv *monomorfism* sau *izomorfism*) *al algebrei* $\mathcal{X}'$ *în algebra* $\mathcal{X}''$.

6.25. *Exemple*

a. Fie $\mathfrak{L}$ o subalgebră a algebrei $\mathcal{X}$. O aplicație ω care asociază oricărui vector $x \in \mathfrak{L}$ același vector x în $\mathcal{X}$ este morfism al algebrei $\mathfrak{L}$ în algebra $\mathcal{X}$, chiar un monomorfism. Ca și în cazul similar din 2.72, acest monomorfism se numește *incluziunea* (*scufundarea*) lui $\mathfrak{L}$ în $\mathcal{X}$.

b. Fie $\mathfrak{L}$ un ideal bilateral al algebrei $\mathcal{X}$ și $\mathcal{X}/\mathfrak{L}$ algebra-cît corespunzătoare (6.23 **b**). Aplicația ω care asociază oricărui vector $x \in \mathcal{X}$ clasa corespunzătoare $X \in \mathcal{X}/\mathfrak{L}$ a elementului x, este un morfism al algebrei $\mathcal{X}$ în algebra $\mathcal{X}/\mathfrak{L}$, și anume un epimorfism. Ca și în cazul analog din 2.72 **b** acest epimorfism se numește *reprezentarea canonică* a lui $\mathcal{X}$ pe $\mathcal{X}/\mathfrak{L}$.

c. Fie ω un monomorfism al algebrei $\mathcal{X}'$ în algebra $\mathcal{X}''$. Mulțimea tuturor vectorilor $\omega(x') \in \mathcal{X}''$ este o subalgebră $\mathfrak{L}'' \subset \mathcal{X}''$ și monomorfismul ω este un izomorfism al algebrei $\mathcal{X}'$ în algebra $\mathfrak{L}''$.

d. Fie ω un morfism de la algebra $\mathcal{X}'$ la algebra $\mathcal{X}''$. Arătăm că mulțimea $\mathfrak{L}'$ a tuturor vectorilor $x' \in \mathcal{X}'$ pentru care $\omega(x') = 0$ este un ideal bilateral al algebrei $\mathcal{X}'$. Într-adevăr, $\mathfrak{L}'$ este un subspațiu al lui $\mathcal{X}'$ (2.76 **b**); apoi dacă $x' \in \mathfrak{L}'$, $y' \in \mathcal{X}'$, atunci $\omega(x' \cdot y') = \omega(x') \cdot \omega(y') = 0$, deci $x' \cdot y' \in \mathfrak{L}'$ și în mod analog $y' \cdot x' \in \mathfrak{L}'$, ceea ce trebuia dovedit. De asemenea, monomorfismul Ω al spațiului $\mathcal{X}'/\mathfrak{L}'$ în spațiul $\mathcal{X}''$ care asociază oricărei clase $X' \in \mathcal{X}'/\mathfrak{L}'$ elementul $\omega(x')$, $x' \in X'$ (2.76 **b**) este un monomorfism al algebrei $\mathcal{X}'/\mathfrak{L}'$ în algebra $\mathcal{X}''$. Într-adevăr, alegînd $x' \in X'$, $y' \in Y'$, avem $x'y' \in X'Y'$ și $\Omega(X'Y') = \omega(x' \cdot y') = \omega(x') \cdot \omega(y') = \Omega(X')\,\Omega(Y')$. În particular, dacă morfismul ω este un epimorfism al algebrei $\mathcal{X}'$ în algebra $\mathcal{X}''$, atunci morfismul Ω este un izomorfism între algebrele $\mathcal{X}'/\mathfrak{L}'$ și $\mathcal{X}''$.

e. Fie $\mathcal{A}$ un operator liniar acționînd în spațiul $\mathcal{X}$. Deoarece pentru operatorii liniari în spațiul $\mathcal{X}$ sînt definite operațiile de adunare și înmulțire, atunci fiecărui polinom $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k \in \Pi$ îi putem asocia operatorul

$$P(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k,$$

acționînd în același spațiu $\mathcal{X}$. Prin această corespondență, adunării și înmulțirii de polinoame le corespund adunarea și respectiv înmulțirea de operatori asociați în sensul § 4.3. Într-adevăr, fie

$$P(\lambda) = P_1(\lambda) + P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k)\, \lambda^k;$$

atunci

$$P(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k)\, \mathcal{A}^k = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathcal{A}^k + \sum_{k=0}^{m} b_k \mathcal{A}^k = P_1(\mathcal{A}) + P_2(\mathcal{A}).$$

În mod analog, fie

$$Q(\lambda) = P_1(\lambda)\, P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k \sum_{j=0}^{m} b_j \lambda^j = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} a_k b_j \lambda^{k+j};$$

atunci aplicînd proprietatea de distribuție pentru operatori (4.33)

$$Q(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} a_k b_j \mathcal{A}^{k+j} = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathcal{A}^k \sum_{j=0}^{m} b_j \mathcal{A}^j = P_1(\mathcal{A})\, P_2(\mathcal{A}).$$

În particular, operatorii $P(\mathcal{A})$ și $Q(\mathcal{A})$ sînt întotdeauna permutabili, oricare ar fi polinoamele $P(\lambda)$ și $Q(\lambda)$.

Am obținut astfel un morfism al algebrei polinoamelor Π(6.22 b) în algebra operatorilor liniari $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$ (6.22 d). În general, acest morfism nu este epimorfism (deoarece operatorii de forma $P(\mathcal{A})$ comută între ei, în timp ce algebra $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$ este necomutativă (cu excepția cazului trivial $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1$).

f. Există un izomorfism între algebra $\mathfrak{B}(K_n)$ a tuturor operatorilor acționînd în spațiul K_n și algebra $\mathfrak{L}(K_n)$ a tuturor matricilor de ordin n cu elemente din corpul K; acesta poate fi explicitat fixînd în spațiul K_n o bază $e_1, \ldots, e_n$ și asociind fiecărui operator $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}(K_n)$ matricea sa în această bază. Ambele algebre au aceeași dimensiune, anume n^2.

6.26. În algebra comutativă Π a tuturor polinoamelor $P(\lambda)$ cu coeficienți din corpul K (6.22 **b**), mulțimea tuturor polinoamelor de forma $P(\lambda)\, Q_0(\lambda)$, unde $Q_0(\lambda)$ este un polinom fixat, iar $P(\lambda)$ un polinom arbitrar, este evident un ideal.

Arătăm că invers, *orice ideal* $I \neq 0$ *al algebrei* Π *este de această formă*, adică elementele lui I se obțin dintr-un anumit polinom $Q_0(\lambda)$ prin înmulțire cu orice polinom $P(\lambda)$. Pentru demonstrație, alegem în idealul I un polinom $Q_0(\lambda)$ nenul de grad minim, notat q. Afirmăm că orice polinom $Q(\lambda) \in I$ este de forma $P(\lambda)\, Q_0(\lambda)$, unde $P(\lambda) \in \Pi$. Într-adevăr, aplicînd teorema împărțirii cu rest a polinoamelor, se poate scrie

$$Q(\lambda) = P(\lambda)\, Q_0(\lambda) + R(\lambda), \tag{3}$$

unde $P(\lambda)$ este cîtul împărțirii lui $Q(\lambda)$ cu $Q_0(\lambda)$ iar $R(\lambda)$ restul corespunzător, avînd gradul mai mic decît gradul q al împărțitorului. Polinoamele $Q(\lambda)$ și $Q_0(\lambda)$ aparțin idealului I. Dar atunci și polinomul $R(\lambda)$ aparține idealului I, așa cum rezultă din relația (3). Deoarece gradul polinomului $R(\lambda)$ este mai mic decît q iar polinomul $Q_0(\lambda)$ are printre elementele idealului I gradul cel mai mic posibil q printre polinoamele nenule, rezultă neapărat că $R(\lambda) = 0$, ceea ce trebuia arătat.

Polinomul $Q_0(\lambda)$ se numește *generator al idealului* I.

6.27. *Polinomul* $Q_0(\lambda)$ *este determinat de idealul* I *în mod unic pînă la un factor numeric.* Într-adevăr, dacă alături de $Q_0(\lambda)$ ar exista un polinom $Q_1(\lambda)$ cu aceeași proprietate, atunci ar rezulta

$$Q_1(\lambda) = P_1(\lambda)\, Q_0(\lambda),$$

$$Q_0(\lambda) = P_0(\lambda)\, Q_1(\lambda).$$

Din aceste egalități rezultă că gradele polinoamelor $Q_1(\lambda)$ și $Q_0(\lambda)$ sînt aceleași și ca atare $P_1(\lambda)$, $P_0(\lambda)$ nu conțin λ, adică sînt numere, ceea ce trebuia dovedit.

6.28. Considerăm polinoamele nenule $Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda)$ care nu au un divizor comun de grad $\geqslant 1$. Vom arăta că există polinoame $P_1^0(\lambda), \ldots, P_m^0(\lambda)$ astfel încît

$$P_1^0(\lambda)\, Q_1(\lambda) + \ldots + P_m^0(\lambda)\, Q_m(\lambda) = 1. \tag{4}$$

Într-adevăr, fie I mulțimea tuturor polinoamelor de forma

$$P_1(\lambda)\, Q_1(\lambda) + \ldots + P_m(\lambda)\, Q_m(\lambda)$$

pentru orice $P_1(\lambda), \ldots, P_m(\lambda)$ din Π. Evident, mulțimea I constituie un ideal. Conform 6.26 idealul I este generat de un polinom

$$Q_0(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} P_k^0(\lambda)\, Q_k(\lambda). \tag{5}$$

În particular, deoarece $Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda)$ aparțin lui I, rezultă că

$$Q_1(\lambda) = S_1(\lambda)\, Q_0(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda) = S_m(\lambda)\, Q_0(\lambda),$$

unde $S_1(\lambda), \ldots, S_m(\lambda)$ sînt anumite polinoame. Aceste egalități arată că $Q_0(\lambda)$ este un divizor comun al polinoamelor $Q_1(\lambda), \ldots, Q_m(\lambda)$. Dar atunci din ipoteză rezultă că gradul polinomului $Q_0(\lambda)$ este egal cu 0, adică $Q_0(\lambda)$ este o constantă a_0. În acest caz $a_0 \neq 0$, deoarece în caz contrar $I = 0$. Înmulțind (5) cu $\frac{1}{a_0}$, se obține (4), ceea ce trebuia dovedit.

§ 6.3. Forma canonică a matricii unui operator oarecare

6.31. Considerăm un operator liniar $\mathcal{A}$ într-un spațiu n-dimensional $\mathfrak{R}_n$.

Reprezentarea $\omega(P(\lambda)) = P(\mathcal{A})$, indicată în 6.25 e, este un epimorfism (6.23) al algebrei Π a tuturor polinoamelor cu coeficienți din corpul K în algebra $\Pi_{\mathcal{A}}$ a operatorilor liniari de forma $P(\mathcal{A})$ acționînd în spațiul $\mathfrak{R}_n$. Conform 6.25 d algebra $\Pi_{\mathcal{A}}$ este izomorfă algebrei-cît Π/I, unde I este idealul tuturor polinoamelor $P(\lambda)$ cu proprietatea că $\omega(P(\lambda)) = P(\mathcal{A}) = 0$. Vom studia în cele ce urmează structura acestui ideal.

6.32. În punctul 6.22 am văzut că mulțimea tuturor operatorilor liniari acționînd în spațiul $\mathfrak{R}_n$ formează o algebră peste corpul K de dimensiune n^2. Fixînd un operator $\mathcal{A}$, considerăm șirul de operatori

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \ldots, \mathcal{A}^m, \ldots$$

În acest șir primii n^2+1 termeni sînt liniar dependenți, adică există o relație de forma $\sum_{k=0}^{m} c_k \mathcal{A}^k = 0$ $(m \leqslant n^2)$, cu coefi-

cienții c_k nu toți nuli. Aceasta înseamnă că în corespondența stabilită anterior (6.31) polinomului $Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} c_k \lambda^k$ îi corespunde operatorul nul.

Orice polinom $Q(\lambda)$ pentru care operatorul $Q(\mathcal{A})$ este operatorul nul se numește *polinom anulator al operatorului* $\mathcal{A}$. Am demonstrat că *pentru orice operator* $\mathcal{A}$ *există un operator anulator de grad* $\leqslant n^2$.

6.33. Mulțimea tuturor polinoamelor anulatoare ale unui operator $\mathcal{A}$ formează un ideal în algebra Π. Conform **6.26** există un polinom $Q_0(\lambda)$ definit pînă la o constantă multiplicativă, astfel încît toate polinoamele anulatoare să aibă forma $P(\lambda) Q_0(\lambda)$, unde $P(\lambda)$ este orice polinom din Π. În particular, $Q_0(\lambda)$ însuși este polinom anulator. Printre toate polinoamele anulatoare, $Q_0(\lambda)$ are cel mai mic grad și de aceea el se numește *polinom anulator minimal* pentru operatorul $\mathcal{A}$.

6.34. TEOREMĂ. *Presupunem că un polinom anulator* $Q(\lambda)$ *al unui operator* $\mathcal{A}$ *se descompune în produsul a două polinoame prime între ele* $Q(\lambda) = Q_1(\lambda) Q_2(\lambda)$. *Atunci spațiul* $\mathcal{H}_n$ *poate fi descompus ca sumă directă a două subspații* $\mathcal{H}_n = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$, *invariante relativ la operatorul* $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_1$, $\mathcal{A}\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_2$), *astfel încît*

$$Q_1(\mathcal{A})\, x_2 = 0, \quad Q_2(\mathcal{A})\, x_1 = 0,$$

pentru orice $x_1 \in \mathcal{T}_1$, $x_2 \in \mathcal{T}_2$, *adică* $Q_1(\lambda)$ *(respectiv* $Q_2(\lambda)$*) este polinom anulator pentru operatorul* $\mathcal{A}$ *acționînd în spațiul* $\mathcal{T}_1$ *(respectiv* $\mathcal{T}_2$*).*

Demonstrație. Conform **6.28** există polinoame $P_1(\lambda)$ și $P_2(\lambda)$ astfel încît

$$P_1(\lambda) Q_1(\lambda) + P_2(\lambda) Q_2(\lambda) = 1.$$

Folosind morfismul **6.25 e**, găsim

$$P_1(\mathcal{A}) Q_1(\mathcal{A}) + P_2(\mathcal{A}) Q_2(\mathcal{A}) = \mathcal{E}.$$

Notăm cu $\mathcal{T}_k$ ($k = 1, 2$) domeniul de valori ale operatorului $Q_k(\mathcal{A})$, adică mulțimea vectorilor de forma $Q_k(\mathcal{A})x$, $x \in \mathcal{H}_n$ (4.61). Evident, din faptul că $y = Q_k(\mathcal{A})\, x \in \mathcal{T}_k$, rezultă

$\mathcal{A}y = Q_k(\mathcal{A})\, \mathcal{A}x \in \mathcal{T}_k$, deci $\mathcal{T}_k$ este subspațiu invariant relativ la operatorul $\mathcal{A}$.

Pentru orice $x_1 \in \mathcal{T}_1$ există $y \in \mathcal{H}_n$ astfel încît

$$Q_2(\mathcal{A})\, x_1 = Q_2(\mathcal{A})\, Q_1(\mathcal{A})\, y = Q(\mathcal{A})\, y = 0,$$

și analog, pentru orice $x_2 \in \mathcal{T}_2$ există $z \in \mathcal{H}_n$ astfel încît

$$Q_1(\mathcal{A})\, x_2 = Q_1(\mathcal{A})\, Q_2(\mathcal{A})\, z = Q(\mathcal{A})\, z = 0.$$

Apoi, pentru orice $x \in \mathcal{H}_n$ are loc egalitatea

$$x = Q_1(\mathcal{A})\, P_1(\mathcal{A})\, x + Q_2(\mathcal{A})\, P_2(\mathcal{A})\, x = x_1 + x_2,$$

unde $x_k = Q_k(\mathcal{A})\, P_k(\mathcal{A}) x \in \mathcal{T}_k$ ($k = 1, 2$), care arată că suma subspațiilor $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ este întreg spațiul $\mathcal{H}_n$.

Fie acum $x_0 \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Atunci $Q_1(\mathcal{A})\, x_0 = Q_2(\mathcal{A})\, x_0 = 0$ și prin urmare

$$x_0 = P_1(\mathcal{A})\, Q_1(\mathcal{A})\, x_0 + P_2(\mathcal{A})\, Q_2(\mathcal{A})\, x_0 = 0.$$

Așadar, $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = 0$ și suma $\mathcal{H}_n = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ este directă. Se înțelege, nu este exclusă posibilitatea ca unul din subspațiile $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ să fie subspațiul nul (constînd doar din vectorul nul).

6.35. *Observație.* Prin construcție operatorul $Q_1(\mathcal{A})$ anulează subspațiul $\mathcal{T}_2$, iar operatorul $Q_2(\mathcal{A})$ anulează subspațiul $\mathcal{T}_1$. Arătăm că *orice vector* x *anulat de operatorul* $Q_1(\mathcal{A})$ *aparține lui* $\mathcal{T}_2$ *și orice vector* x *anulat de operatorul* $Q_2(\mathcal{A})$ *aparține lui* $\mathcal{T}_1$. Fie $Q_1(\mathcal{A})\, x = 0$. Avem $x = x_1 + x_2$, unde $x_1 \in \mathcal{T}_1$, $x_2 \in \mathcal{T}_2$. Deoarece $Q_1(\mathcal{A}) x_2 = 0$, atunci $Q_1(\mathcal{A})\, x_1 = Q_1(\mathcal{A})\, x - Q_1(\mathcal{A})\, x_2 = 0$. Dar avem și $Q_2(\mathcal{A})\, x_1 = 0$, deoarece $x_1 \in \mathcal{T}_1$. Așadar, $x_1 = P_1(\mathcal{A})\, Q_1(\mathcal{A})\, x_1 + P_2(\mathcal{A})\, Q_2(\mathcal{A})\, x_1 = 0$, $x = x_2 \in \mathcal{T}_2$. În mod analog, din relația $Q_2(\mathcal{A})\, x = 0$, rezultă $x \in \mathcal{T}_1$, ceea ce trebuia dovedit.

6.36. Descompunînd polinoamele $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$ în factori primi între ei, se obține posibilitatea reprezentării spațiului $\mathcal{H}_n$ ca sumă directă de subspații invariante relativ la operatorul $\mathcal{A}$, anulate respectiv de factorii polinoamelor $Q_1(\lambda)$ și $Q_2(\lambda)$.

Presupunem că un polinom $P(\lambda)$ admite în corpul K o descompunere de forma

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda - \lambda_j)^{r_j}, \tag{6}$$

unde λ_j sînt toate rădăcinile (distincte) ale polinomului, iar r_j multiplicităţile lor. O astfel de descompunere este întotdeauna posibilă în corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe. Descompunerea (6) este o descompunere în m factori primi între ei $(\lambda - \lambda_j)^{r_j}$. Aplicînd rezultatul 6.34, obţinem următoarea afirmaţie:

TEOREMĂ. *Dacă polinomul anulator al unui operator $\mathcal{A}$ are forma* (6), *atunci spaţiul $\mathcal{K}_n$ se descompune în suma directă a m subspaţii $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_m$ invariante relativ la operatorul $\mathcal{A}$, iar subspaţiul $\mathcal{T}_k$ este anulat de operatorul $\mathcal{B}_k^{r_k}$, unde $\mathcal{B}_k = \mathcal{A} - \lambda_k \mathcal{E}$.*

6.37. În fiecare spaţiu nenul $\mathcal{T}_k$ se poate alege, conform 6.14, o bază în care matricea operatorului $\mathcal{B}_k$ (prin însăşi construcţia ei nilpotentă în spaţiul $\mathcal{T}_k$) să aibă forma canonică (2). În această bază matricea operatorului $\mathcal{A} = \mathcal{B}_k + \lambda_k \mathcal{E}$ are forma

$$\begin{Vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_k \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_k \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_k} \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Matricea operatorului $\mathcal{A}$ acţionînd în întreg spaţiul $\mathcal{K}_n = \mathcal{T}_1 + \ldots + \mathcal{T}_m$ în baza care se obţine prin reuniunea tuturor bazelor canonice construite în spaţiile $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_m$, va avea forma finală

$$J(\mathcal{A}) = \begin{Vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{\lambda_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_m & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{matrix}} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \boxed{\lambda_m} \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Formulăm rezultatul final:

TEOREMĂ. *Pentru orice operator $\mathcal{A}$ într-un spaţiu n-dimensional $\mathcal{K}_n$ avînd un polinom anulator de forma* (6) *(în particular, pentru orice operator $\mathcal{A}$ în spaţiul n-dimensional complex $\mathcal{C}_n$), există o bază în care matricea operatorului $\mathcal{A}$*

este de forma (8). *Matricea* (8) *se numește forma normală Jordan a operatorului* $\mathcal{A}$, *iar baza corespunzătoare — bază Jordan.*

În cazul $\mathcal{H}_n = \mathcal{C}_n$ numerele complexe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ pot fi ordonate după o regulă oarecare; de exemplu, în ordinea crescătoare a modulelor, iar pentru module egale, în ordinea creșterii argumentului θ, variind în intervalul $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

Pentru un operator $\mathcal{A}$ acționînd într-un spațiu $\mathcal{H}_n \neq \mathcal{C}_n$, reprezentarea (8) nu este întotdeauna posibilă. Considerăm în § 6.6 forma canonică a matricii operatorului $\mathcal{A}$ acționînd în spațiul $\mathcal{H}_n = \mathcal{R}_n$.

§ 6.4. Divizori elementari

6.41. Matricea (8) poate fi dată prin tabelul

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1; & n_1^{(1)}, \ldots, n_{r_1}^{(1)} \\ \lambda_2; & n_1^{(2)}, \ldots, n_{r_2}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \lambda_m; & n_1^{(m)}, \ldots, n_{r_m}^{(m)} \end{array}\right\} (n_1^{(k)} \geqslant n_2^{(k)} \geqslant \ldots \geqslant n_{r_k}^{(k)}), \tag{9}$$

în care pentru orice număr diagonal λ_k sînt indicate dimensiunile $n_1^{(k)}, \ldots, n_{r_k}^{(k)}$ ale „celulelor elementare Jordan" de forma

$$\left.\begin{Vmatrix} \lambda_k & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots \lambda_k \end{Vmatrix}\right\} n_j^{(k)} \text{ linii}, \tag{10}$$

care apar în matricea (8). Vom clarifica acum modul de construire a tabelului (9) și vom stabili forma matricii $J(\mathcal{A})$ a operatorului $\mathcal{A}$ cunoscînd matricea sa A într-o bază oarecare a spațiului $\mathcal{H}_n$.

6.42. După cum se știe (5.53), polinomul caracteristic al operatorului $\mathcal{A}$ nu depinde de alegerea bazei. Explicităm acest polinom pentru o bază jordaniană; deoarece dedesubtul

diagonalei principale toate elementele sînt nule, rezultă că

$$\det(A - \lambda E) = \det \| J(\mathcal{A}) - \lambda E \| =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda)^{n_1^{(k)} + \ldots + n_{r_k}^{(k)}}. \tag{11}$$

Așadar, numerele λ_k sînt rădăcinile polinomului caracteristic, iar sumele $r_k = n_1^{(k)} + \ldots + n_{r_k}^{(k)}$ sînt multiplicitățile lor. Astfel, calculînd polinomul caracteristic (ceea ce se poate face cunoscînd matricea A) și determinînd rădăcinile ei, se obțin mărimile λ_k și $r_k = n_1^{(k)} + \ldots + n_{r_k}^{(k)}$, care apar în tabelul (9).

6.43. Vom indica în continuare (aici și în 6.44) modul cum, cunoscînd matricea A a operatorului $\mathcal{A}$ într-o bază oarecare se pot calcula chiar numerele $n_j^{(k)}$. Deoarece $J(\mathcal{A})$ și A sînt matrici ale aceluiași operator în baze diferite, are loc conform 5.51 egalitatea

$$J(\mathcal{A}) = T^{-1}AT,$$

unde T este o matrice nesingulară. De aceea și

$$J(\mathcal{A}) - \lambda E = T^{-1}(A - \lambda E)\, T.$$

Minorii de ordin p fixat ai matricii $A - \lambda E$ constituie polinoame de grad $\leqslant p$. Notăm cu $I_p(\mathcal{A})$ idealul generat de toți acești minori în algebra II. Un sens analog are idealul $I_p(J(\mathcal{A}))$. Arătăm că aceste ideale coincid. Într-adevăr, fiecare minor de ordin p din matricea $J(\mathcal{A}) - \lambda E$ este conform 4.54 suma unor produse de minori de ordin p ai matricilor $A - \lambda E$, T^{-1} și T. Dar elementele matricilor T și T^{-1} sînt numere; astfel, orice minor de ordin p al matricii $J(\mathcal{A}) - \lambda E$ este o combinație liniară de minori de ordin p din matricea $A - \lambda E$ și prin urmare el aparține idealului $I_p(J(\mathcal{A}))$. Așadar, $I_p(\mathcal{A}) = I_p(J(\mathcal{A}))$, ceea ce s-a și afirmat.

Fie $D_p(\lambda)$ un polinom care generează acest ideal; el poate fi definit ca fiind cel mai mare divizor comun al polinoamelor care generează idealul $I_p(\mathcal{A})$ (6.26). Așadar, cel mai mare divizor comun al minorilor de ordin p din matricea $J(\mathcal{A}) - \lambda E$ este același cu cel mai mare divizor comun al minorilor de ordin p din matricea $A - \lambda E$ și de aceea el poate fi considerat cunoscut. Calculăm acum direct cel mai mare divizor comun

al minorilor de ordin p din matricea $J(\mathcal{A}) - \lambda E$. În locul matricii $J(\mathcal{A}) - \lambda E$ se poate considera o matrice de forma $P(J(\mathcal{A}) - \lambda E)Q$, unde P și Q sînt matrici numerice inversabile, neconținînd λ. Operațiile de permutare a liniilor, coloanelor, de adăugare la o coloană a unei alte coloane multiplicate cu un număr, pot fi efectuate în matricea $J(\mathcal{A}) - \lambda E$ (ca în 4.44). Arătăm că orice celulă elementară

$$\begin{Vmatrix} \lambda_k - \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k - \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k - \lambda \end{Vmatrix}$$

poate fi transformată, prin operațiile indicate, într-o matrice de forma

$$\left.\begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (\lambda_k - \lambda)^{n_j^{(k)}} \end{Vmatrix}\right\} n_j^{(k)} \text{ linii.} \qquad (12)$$

Anume, pentru obținerea acestui rezultat, trebuie mai întîi să scădem din linia secundă prima linie înmulțită cu $\lambda_k - \lambda$, din a treia pe a doua înmulțită cu $\lambda_k - \lambda$ etc.; obținem matricea ($p = n_j^{(k)}$)

$$\begin{Vmatrix} \lambda_k - \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -(\lambda_k - \lambda)^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{p-2}(\lambda_k - \lambda)^{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ (-1)^{p-1}(\lambda_k - \lambda)^p & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Dacă acum din prima coloană se scade cea de a doua înmulțită cu $\lambda_k - \lambda$, apoi a treia înmulțită cu $-(\lambda_k - \lambda)^2$, ..., a $(p-1)$-a

înmulțită cu $(-1)^{p-2}(\lambda_k - \lambda)^{p-1}$, atunci obținem matricea

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ (-1)^{p-1}(\lambda_k - \lambda)^p & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} \qquad (13)$$

din care se obține matricea (12) prin permutarea coloanelor.

Acum putem calcula mai simplu cel mai mare divizor comun al minorilor de ordin p din matricea $\hat{J}(\lambda)$ avînd celule de forma (12) pe diagonala principală. Deoarece în această matrice în afara diagonalei principale se află zerouri, atunci minorii nenuli pot fi numai cei situați pe linii și coloane cu același număr de ordine; un astfel de minor este egal cu produsul elementelor sale diagonale.

În matricea $\hat{J}(\lambda)$ printre elementele de pe diagonala principală se află un anumit număr N de binoame de forma $(\lambda_k - \lambda)^{n_j^{(k)}}$, iar celelalte $n-N$ elemente ale diagonalei principale sînt egale cu 1. Numărul N este numărul total de celule Jordan în matricea $J(\mathcal{A})$, adică $N = r_1 + \dots + r_m$. Pe de altă parte, printre minorii pînă la ordinul $n-N$ există unii egali cu 1, deci $D_p(\lambda) = 1$ pentru $p \leqslant n - N$. Se poate înlocui matricea $\hat{J}(\lambda)$ prin matricea diagonală mai simplă

$$I(\lambda) = \begin{Vmatrix} (\lambda_1 - \lambda)^{n_1^{(1)}} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & (\lambda_1 - \lambda)^{n_{r_1}^{(1)}} & & & & \\ & & & (\lambda_2 - \lambda)^{n_1^{(2)}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & (\lambda_m - \lambda)^{n_{r_m}^{(m)}} \end{Vmatrix};$$

atunci polinomul $D_p(\lambda)$ considerat pentru matricea $\hat{J}(\lambda)$ va coincide cu polinomul $D_{p-(n-N)}(\lambda)$ considerat pentru matricea

$I(\lambda)$. Evident, cel mai mare divizor comun al minorilor de ordin p ai matricii $I(\lambda)$ are forma

$$D_p(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda_j - \lambda)^{m_j(p)} \tag{14}$$

unde $m_j \geqslant 0$. Se pune întrebarea: ce valoare are de exemplu exponentul $m_1(p)$? Această mărime este cel mai mic exponent la care apare $\lambda_1 - \lambda$ în toți minorii de ordin p. Dacă $p \leqslant n_1^{(2)} + \ldots + n_{r_m}^{(m)}$, atunci există un minor de ordin p care nu conține în general $\lambda_1 - \lambda$, deoarece pentru acești p ar rezulta $m_1(p) = 0$. Pentru $p = n_1^{(2)} + \ldots + n_{r_m}^{(m)} + 1$, considerînd că exponenții $n_1^{(1)}, \ldots, n_{r_1}^{(1)}$ sînt în ordine descrescătoare, rezultă că

$$m_1(p) = n_{r_1}^{(1)}.$$

În continuare pentru fiecare mărire a lui p cu o unitate, exponentul $m_1(p)$ va crește corespunzător cu $n_{r_1-1}^{(1)}, n_{r_1-2}^{(1)}, \ldots$; în fine, pentru $p = n$ obținem

$$m_1(p) = n_1^{(1)} + \ldots + n_{r_1}^{(1)}.$$

Analog,

$$m_j(p) = n_1^{(j)} + \ldots + n_{r_j}^{(j)} \quad (1 \leqslant j \leqslant m).$$

6.44. Raportul $E_p(\lambda) = \dfrac{D_{p+1}(\lambda)}{D_p(\lambda)}$ se numește *divizor elementar al operatorului* $\mathcal{A}$; împreună cu polinoamele $D_p(\lambda)$, divizorii elementari nu depind de alegerea bazei și ei pot fi calculați utilizînd matricea operatorului $\mathcal{A}$ în orice bază.

Din cele spuse în 6.43 se vede că divizorii elementari au forma

$$E_{n-q}(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda_j - \lambda)^{n_q^{(j)}}, \quad q = 1, 2, \ldots, n-1,$$

cu rădăcinile avînd multiplicitățile egale cu dimensiunile succesive ale celulelor Jordan. Astfel, calculînd divizorii elementari, obținem numerele $n_q^{(j)}$ și în acest mod este rezolvată problema pe care ne-am propus-o în 6.43.

6.45. *Exemple*

a. Fie matricea Jordan de ordin 10

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 2 & & \\ & & & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 2 \end{array} \right\|$$

având trei celule corespunzînd rădăcinii $\lambda_1 = 1$, de dimensiuni 3, 2, 1 și două celule corespunzînd rădăcinii $\lambda_2 = 2$, de dimensiuni 2 și 2; de aceea divizorii elementari au valorile

$$E_9(\lambda) = (1 - \lambda)^3 (2 - \lambda)^2,$$

$$E_8(\lambda) = (1 - \lambda)^2 (2 - \lambda)^2,$$

$$E_7(\lambda) = 1 - \lambda,$$

$$E_6(\lambda) = \ldots = E_1(\lambda) = 1.$$

b. Presupunem că pentru o matrice $A = \|a_{jk}\|$ de ordin 10 divizorii elementari (calculați așa cum s-a indicat în 6.43 și 6.44 cu ajutorul minorilor matricii $A - \lambda E$) sînt egali cu

$$E_9(\lambda) = (3 - \lambda)^2 (4 - \lambda)^3,$$

$$E_8(\lambda) = (3 - \lambda)^2 (4 - \lambda),$$

$$E_7(\lambda) = 4 - \lambda,$$

$$E_6(\lambda) = 4 - \lambda,$$

$$E_5(\lambda) = \ldots = E_1(\lambda) = 1.$$

Scriem expresia matricii $J(\mathcal{A})$. Așa cum am arătat în 6.44 matricea $J(\mathcal{A})$ are două celule care corespund rădăcinii

$\lambda_1 = 3$ de dimensiuni 2 şi 2 şi 4 celule corespunzînd rădăcinii $\lambda_2 = 4$ de dimensiuni 3, 1, 1, 1. În acest mod,

$$J(\mathcal{A}) = \left\| \begin{array}{cc|cc|ccc|c|c|c} 3 & 1 & & & & & & & & \\ 0 & 3 & & & & & & & & \\ \hline & & 3 & 1 & & & & & & \\ & & 0 & 3 & & & & & & \\ \hline & & & & 4 & 1 & & & & \\ & & & & & 4 & 1 & & & \\ & & & & & & 4 & & & \\ \hline & & & & & & & 4 & & \\ \hline & & & & & & & & 4 & \\ \hline & & & & & & & & & 4 \end{array} \right\|.$$

6.46. Astfel, cunoscînd divizorii elementari ai unui operator $\mathcal{A}$, pot fi determinate toate mărimile $n_j^{(k)}$ şi în acelaşi timp structura matricii jordaniene a operatorului $\mathcal{A}$. În particular, se vede că *matricea Jordan a operatorului se defineşte în mod bine determinat prin însuşi operatorul* $\mathcal{A}$.

Pe de altă parte, deoarece divizorii elementari ai unui operator $\mathcal{A}$ se determină prin minorii matricii $A - \lambda E$ în orice bază, *doi operatori echivalenţi* $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ (*adică avînd aceeaşi matrice în două baze, distincte sau nu*) *au aceeaşi formă canonică Jordan.*

Este evidentă şi afirmaţia inversă: *dacă doi operatori au una şi aceeaşi formă canonică, atunci ei sînt echivalenţi.* În acest mod, problema echivalenţei operatorilor liniari (în cazul scalarilor complecşi), pusă la începutul acestui capitol, este complet rezolvată.

§ 6.5. Cîteva consecinţe

6.51. Dacă operatorul $\mathcal{A}$ se reduce la forma diagonală, adică matricea sa într-o anumită bază are forma:

$$A = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_m \end{array} \right\|,$$

atunci matricea A este matricea Jordan a operatorului $\mathcal{A}$ (toate celulele Jordan avînd dimensiunea 1). În particular, toţi divizorii elementari au rădăcini simple. Invers, dacă toţi divizorii elementari ai unui operator $\mathcal{A}$ au numai rădăcini simple, atunci matricea Jordan $J(\mathcal{A})$ are numai celule de dimensiune 1 şi, prin urmare, este diagonală.

6.52. Avînd forma jordaniană a unui operator $\mathcal{A}$, se poate determina polinomul său anulator minimal. Presupunem că un operator $\mathcal{B}$ într-o anumită bază $e_1, \ldots, e_p$ are matricea

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Aceasta înseamnă că

$$\mathcal{B}e_1 = 0, \quad \mathcal{B}e_2 = e_1, \ldots, \mathcal{B}e_p = e_{p-1},$$

de unde rezultă că $\mathcal{B}^p x = 0$ pentru orice $x = \sum_1^p c_k e_k$. În acest mod, un polinom anulator al operatorului $\mathcal{B}$ are forma λ^p. Polinomul anulator minimal ca divizor al lui λ^p trebuie să aibă forma λ^m, $m \leqslant p$; deoarece $\mathcal{B}^{p-1} e_p = e_1 \neq 0$, vedem că λ^p este polinomul anulator minimal.

Presupunem că operatorul $\mathcal{A}$ într-o bază $e_1, \ldots, e_p$ admite matricea

$$\begin{Vmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_0 \end{Vmatrix}.$$

astfel încît $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \lambda_0 \mathcal{E}$. Conform celor arătate, $(\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{E})^p = \mathcal{B}^p = 0$, astfel încît pentru operatorul $\mathcal{A}$ un polinom anulator este $(\lambda_0 - \lambda)^p$; acesta este minimal conform raționamentului anterior.

Presupunem că un operator $\mathcal{A}$ admite matricea

$$\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 \end{vmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{vmatrix} \lambda_0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 \end{vmatrix} \end{Vmatrix},$$

unde $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_r$ sînt dimensiunile celulelor sale diagonale. Un polinom $Q(\lambda)$ anulator al operatorului $\mathcal{A}$ trebuie să anuleze separat fiecare celulă (4.52). Această proprietate este satisfăcută de polinomul $(\lambda_0 - \lambda)^{p_1}$. Conform celor spuse mai sus, acesta este polinom anulator minimal.

În sfîrșit, în cazul general, dacă operatorul $\mathcal{A}$ admite matricea jacobiană cu tabloul

$$\lambda_1;\ n_1^{(1)} \geqslant n_2^{(1)} \geqslant \ldots \geqslant n_{p_1}^{(1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_m;\ n_1^{(m)} \geqslant n_2^{(m)} \geqslant \ldots \geqslant n_{p_m}^{(m)},$$

un polinom anulator este

$$Q(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda)^{n_1^{(k)}}. \tag{15}$$

Acesta este chiar polinomul anulator minimal al operatorului $\mathcal{A}$, deoarece nici unul din exponenții $n_1^{(k)}$ nu poate fi micșorat, conform considerațiilor făcute mai sus.

Așadar, *polinomul anulator minimal al matricii A este polinomul* (15). Gradul său este egal cu $n_1^{(1)} + \ldots + n_1^{(m)}$, suma dimensiunilor celulelor jordaniene maximale, corespunzînd fiecărei rădăcini a polinomului caracteristic. Observăm că acest număr nu depășește dimensiunea întregii matrici A (adică numărul n egal cu dimensiunea spațiului în care acționează operatorul $\mathcal{A}$). Polinomul caracteristic $\det(A - \lambda E)$ al operatorului $\mathcal{A}$ (6.42) conține polinomul $Q(\lambda)$ ca divizor și de aceea *este de asemenea anulator* (această proprietate se numește *teorema Hamilton-Cayley*). În general, polinomul caracteristic $\det(A - \lambda E)$ nu este polinomul anulator minimal al operatorului $\mathcal{A}$. Dacă se întîmplă acest lucru, atunci fiecare rădăcină a ecuației caracteristice este folosită numai într-o singură celulă Jordan de dimensiune cît multiplicitatea rădăcinii.

§ 6.6. Forma Jordan reală

6.61. Considerăm un operator $\mathcal{A}$ într-un spațiu n-dimensional real $\mathcal{R}_n$. În general, baza canonică în care matricea operatorului $\mathcal{A}$ s-ar scrie în forma Jordan (8) poate să nu existe, deoarece polinomul caracteristic al operatorului $\mathcal{A}$ poate avea rădăcini nereale. Totuși și în cazul real se poate găsi o formă Jordan (8) a matricii.

Fie $A = \|a_k^{(j)}\|$ matricea operatorului $\mathcal{A}$ într-o bază oarecare $e_1, \ldots, e_n$ a spațiului $\mathcal{R}_n$. Considerăm spațiul n-dimensional complex $\mathcal{C}_n$, constînd din vectorii $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sînt numere complexe oarecare. Matricea A definește în spațiul $\mathcal{C}_n$ un operator liniar $\hat{\mathcal{A}}$ prin formulele

$$\hat{\mathcal{A}}x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathcal{A} e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{(j)} e_k \right);$$

pentru vectorii x cu componentele reale α_j aceste formule determină operatorul $\mathcal{A}$ însuși.

6.62. Începem cu un operator $\mathcal{A}$ pentru care un polinom anulator are forma specială

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + \tau^2)^p,$$

cu τ real pozitiv.

Pentru operatorul $\hat{\mathcal{A}}$ sînt definite polinoamele de operatori $Q(\hat{\mathcal{A}})$ cu coeficienți complecși. În particular, au sens polinoamele $(\hat{\mathcal{A}} + i\tau\mathcal{E})^p$ și $(\hat{\mathcal{A}} - i\tau\mathcal{E})^p$. Polinomul $P(\lambda) = (\lambda^2 + \tau^2)^p$ rămîne anulator și pentru operatorul $\hat{\mathcal{A}}$. Descompunerii $(\lambda^2 + \tau^2)^p = (\lambda - i\tau)^p (\lambda + i\tau)^p$ îi corespunde conform 6.34 o descompunere a spațiului $\mathcal{C}_n$ în sumă directă de subspații $\mathcal{C}_n^1$ și $\mathcal{C}_n^2$ invariante relativ la operatorul $\hat{\mathcal{A}}$, în care el admite polinoamele anulatoare $(\lambda - i\tau)^p$ și $(\lambda + i\tau)^p$ respectiv. Mai mult, dacă vectorii subspațiului $\mathcal{C}_n^1$ sînt de forma

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$$

cu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oarecare, atunci subspațiul $\mathcal{C}_n^2$ constă din vectorii

$$\overline{x} = \overline{\alpha}_1 e_1 + \ldots + \overline{\alpha}_n e_n,$$

unde numerele $\overline{\alpha}_j$ sînt conjugatele complexe ale numerelor α_j. Într-adevăr, dacă $(\hat{\mathcal{A}} - i\tau\mathcal{E})^p x = 0$, atunci trecînd la numere complex conjugate în toți termenii membrului stîng, se obține $(\hat{\mathcal{A}} + i\tau\mathcal{E})^p x = 0$ și invers; ultima egalitate determină subspațiul $\mathcal{C}_n^2$ (conform 6.35). Rezultă de aici, printre altele, că n este par, adică $n = 2m$, unde m este dimensiunea fiecăruia din subspațiile $\mathcal{C}_n^1$ și $\mathcal{C}_n^2$.

Fie f_j^k baza jordaniană a operatorului $\hat{\mathcal{A}}$ în spațiul $\mathcal{C}_n^1$ (6.37). Deoarece în această bază matricea operatorului $\hat{\mathcal{A}}$ are forma (6.37(7))

$$\begin{matrix} n_1 \\ \\ \\ \\ \\ n_q \end{matrix} \left\| \begin{matrix} i\tau & 1 & & & & & & \\ & i\tau & 1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & i\tau & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & i\tau & 1 & \\ & & & & & & i\tau & 1 \\ & & & & & & & i\tau \end{matrix} \right\|,$$

operatorul $\hat{\mathcal{A}}$ acționează pe vectorii din bază după formulele

$$\hat{\mathcal{A}} f_1^1 = i\tau f_1^1, \ldots, \hat{\mathcal{A}} f_1^q = i\tau f_1^q,$$

$$\hat{\mathcal{A}} f_2^1 = f_1^1 + i\tau f_2^1, \ldots, \hat{\mathcal{A}} f_2^q = f_1^q + i\tau f_2^q,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\hat{\mathcal{A}} f_{n_1}^1 = f_{n_1-1}^1 + i\tau f_{n_1}^1, \ldots, \hat{\mathcal{A}} f_{n_q}^q = f_{n_q-1}^q + i\tau f_{n_q}^q.$$

Pentru mulțimea vectorilor conjugați $\overline{f_j^k} \in \mathcal{C}_n^2$ au loc formulele conjugate

$$\hat{\mathcal{A}} \overline{f_1^1} = -i\tau \overline{f_1^1}, \ldots, \hat{\mathcal{A}} \overline{f_1^q} = -i\tau \overline{f_1^q},$$

$$\hat{\mathcal{A}} \overline{f_2^1} = \overline{f_1^1} - i\tau \overline{f_2^1}, \ldots, \hat{\mathcal{A}} \overline{f_2^q} = \overline{f_1^q} - i\tau \overline{f_2^q},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\hat{\mathcal{A}} \overline{f_{n_1}^1} = \overline{f_{n_1-1}^1} - i\tau \overline{f_{n_1}^1}, \ldots, \hat{\mathcal{A}} \overline{f_{n_q}^q} = \overline{f_{n_q-1}^q} - i\tau \overline{f_{n_q}^q}.$$

Se observă că vectorii $\overline{f_j^k}$ formează bază Jordan pentru operatorul $\hat{\mathcal{A}}$ în spațiul $\mathcal{C}_n^2$. Astfel, vectorii f_j^k și $\overline{f_j^k}$ formează împreună o bază Jordan pentru operatorul $\hat{\mathcal{A}}$ în întreg spațiul $\mathcal{C}_n$. Construim acum o bază în spațiul real $\mathcal{R}_n$, înlocuind fiecare pereche de vectori complecși f_j^k și $\overline{f_j^k}$ prin perechea de vector reali $g_j^k = \frac{1}{2}(f_j^k + \overline{f_j^k})$ și $h_j^k = \frac{1}{2i}(f_j^k - \overline{f_j^k})$. Din formulele

$$\hat{\mathcal{A}} f_j^k = f_{j-1}^k + i\tau f_j^k \quad (f_0^k = \overline{f_0^k} = 0),$$

$$\hat{\mathcal{A}} \overline{f_j^k} = \overline{f_{j-1}^k} - i\tau \overline{f_j^k}$$

obținem

$$\hat{\mathcal{A}} \left\{ \frac{1}{2}(f_j^k + \overline{f_j^k}) \right\} = \mathcal{A} g_j^k = g_{j-1}^k - \tau h_j^k \quad (g_0^k = h_0^k = 0),$$

$$\hat{\mathcal{A}} \left\{ \frac{1}{2i}(f_j^k - \overline{f_j^k}) \right\} = \mathcal{A} h_j^k = h_{j-1}^k + \tau g_j^k.$$

De aceea pentru vectorii g_j^k, h_j^k se obțin formulele

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{A}g_1^k &= -\tau h_1^k,\\
\mathcal{A}h_1^k &= \tau g_1^k,\\
\mathcal{A}g_2^k &= g_1^k - \tau h_2^k,\\
\mathcal{A}h_2^k &= h_1^k + \tau g_2^k,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathcal{A}g_{n_k}^k &= g_{n_k-1}^k - \tau h_{n_k}^k,\\
\mathcal{A}h_{n_k}^k &= h_{n_k-1}^k + \tau g_{n_k}^k.
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Invers, au loc formulele

$$f_j^k = g_j^k + \mathrm{i}h_j^k,\ \overline{f_j^k} = g_j^k - \mathrm{i}h_j^k.$$

Așadar, acoperirea liniară (complexă) a tuturor vectorilor g_j^k și h_j^k este aceeași cu acoperirea liniară a tuturor vectorilor f_j^k și $\overline{f_j^k}$. Și cum numărul vectorilor generatori este același, rezultă că vectorii g_j^k și h_j^k sînt liniar independenți peste corpul $\mathbb{C}$ odată cu vectorii f_j^k și $\overline{f_j^k}$. Cu atît mai mult vectorii g_j^k și h_j^k sînt liniar independenți peste corpul $\mathbb{R}$, adică în spațiul vectorial real $\mathcal{R}_n$.

Din formulele (16) rezultă că matricea operatorului $\mathcal{A}$ în baza g_j^k, h_j^k constă din celule diagonale de forma

$$\left\|\begin{array}{cccc}
0 & \tau & 1 & 0\\
-\tau & 0 & 0 & 1\\
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \

polinoamele $D_p(\lambda)$ și $E_p(\lambda)$ se obțin din minorii matricii $A - \lambda E$ prin operații raționale, polinoamele $E_p(\lambda)$ au coeficienți reali și deci au forma

$$E_{n-q}(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \lambda_k)^{n_q^{(k)}} \prod_{j=1}^{s} [(\lambda - \sigma_j)^2 + \tau_j^2]^{p_q^{(j)}}$$

$$(q = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Fiecărui exponent $n_q^{(k)}$ îi corespunde o celulă Jordan de forma (10) de dimensiune $n_q^{(k)}$. Fiecărui exponent $p_q^{(j)}$ îi corespunde o celulă de forma (18) de dimensiune $2p_q^{(j)}$.

6.65. Formulăm rezultatul în formă definitivă în termenii teoremei următoare:

TEOREMĂ. *Pentru orice operator $\mathcal{A}$ într-un spațiu n-dimensional real $\mathcal{R}_n$ există o bază în care matricea $J_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$ a operatorului $\mathcal{A}$ este cvasidiagonală și constă din celule diagonale de forma* (10) *și* (18). *Aici λ_k sînt valorile proprii reale ale operatorului $\mathcal{A}$, iar $\sigma_j + i\tau_j$ și $\sigma_j - i\lambda_j$ sînt valorile proprii complex-conjugate. Dimensiunile celulelor sînt bine determinate prin divizorii elementari ai operatorului, așa cum s-a indicat la* 6.64.

§ 6.7. Spectre, jeturi și polinoame

În diverse probleme din analiză și algebră se întîlnește necesitatea calculării unor funcții, în particular polinoame, de operatori liniari dați într-un spațiu finit-dimensional. Funcțiile de operatori au o serie de proprietăți specifice. În paragrafele următoare se construiește un calcul pentru astfel de funcții. Modelul aritmetic natural pentru funcțiile de un operator îl constituie algebra jeturilor, cu care începem prezentarea teoretică.

6.71. Vom numi *spectru* și îl vom nota prin simbolul S o mulțime finită de puncte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Vom presupune aici că fiecare punct λ_k este considerat odată cu indicarea unui număr natural r_k ($k = 1, \ldots, m$) numit „multiplicitate". Vom folosi notația

$$S = \{\lambda_1^{r_1}, \ldots, \lambda_m^{r_m}\}.$$

Presupunem că fiecărui punct λ_k îi este pusă în corespondență o colecție de r_k numere din K pe care le notăm $f(\lambda_k), f'(\lambda_k), \ldots, f^{(r_k-1)}(\lambda_k)$; o astfel de colecție va fi numită *jet f definit pe S*. Fie $Q(S)$ mulțimea tuturor jeturilor pe mulțimea S.

Definim în $Q(S)$ următoarele operații:

a. *Adunarea.* Prin *sumă* a două jeturi $f = \{f^{(j)}(\lambda_k)\}$ și $g = \{g^{(j)}(\lambda_k)\}$ vom înțelege jetul $f + g$ definit prin colecția de numere

$$(f+g)^{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k) + g^{(j)}(\lambda_k),\ k = 1, \ldots, m,$$
$$j = 1, \ldots, r_k - 1.$$

b. *Înmulțirea cu un număr.* Fie $\alpha \in K$; *produsul* αf al jetului $f = \{f^{(j)}(\lambda_k)\}$ prin numărul α este prin definiție jetul definit prin colecția de numere

$$(\alpha f)^{(j)}(\lambda_k) = \alpha f^{(j)}(\lambda_k).$$

Este evident că operațiile **a** și **b** determină în mulțimea $Q(S)$ o structură de spațiu vectorial. Elementul nul al acestui spațiu este jetul 0 cu toate componentele nule.

c. Definim acum operația de *înmulțire*. *Produsul fg* al jeturilor $f = \{f^{(j)}(\lambda_k)\}$ și $g = \{g^{(j)}(\lambda_k)\}$ este prin definiție jetul definit prin formulele

$$\left.\begin{aligned} &fg(\lambda_k) = f(\lambda_k)\, g(\lambda_k), \\ &(fg)'(\lambda_k) = f(\lambda_k)\, g'(\lambda_k) + f'(\lambda_k)\, g(\lambda_k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(fg)^{(p)}(\lambda_k) = \sum_{j=0}^{p} C_p^j f^{(j)}(\lambda_k)\, g^{(p-j)}(\lambda_k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &k = 1, \ldots, m, \\ &p = 0, 1, \ldots, r_k - 1, \\ &C_p^j = \frac{p!}{j!(p-j)!}. \end{aligned}$$

Se arată ușor că operația de înmulțire este comutativă și satisface condițiile 6.21 1)—3). În acest mod, $Q(S)$ este o *algebră comutativă peste corpul K*. În această algebră elementul neutru la înmulțire este jetul e care are proprietatea că $ef = f$ pentru orice $f \in Q(S)$. Se consideră colecția de numere

$$e^{(j)}(\lambda_k) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = 0,\ k = 1, \ldots, m, \\ 0 \text{ pentru } 0 < j \leqslant r_k,\ k = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

În cazul cînd $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ aparţin corpului K, vom stabili în acest paragraf o legătură între algebra $Q(S)$ şi algebra tuturor polinoamelor $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k$ cu coeficienţi în corpul K.

6.72. Vom presupune corpul K infinit, adică are o infinitate de elemente distincte. În aceste condiţii vom stabili la început cîteva teoreme privind legătura între coeficienţii polinoamelor şi valorile polinoamelor.

a. Fie $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k$ un polinom cu coeficienţi din corpul K, al cărui argument λ poate lua valori în corpul K (de fapt P este aici o funcţie polinomială $K \to K$). Arătăm că valorile $P(\lambda)$ permit determinarea coeficienţilor $a_0, \ldots, a_p$. Anume, fie $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ elemente distincte din corpul K; considerăm egalităţile

$$a_0 + a_1\lambda_0 + \ldots + a_p\lambda_0^p = P(\lambda_0),$$
$$a_0 + a_1\lambda_1 + \ldots + a_p\lambda_1^p = P(\lambda_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0 + a_1\lambda_p + \ldots + a_p\lambda_p^p = P(\lambda_p).$$

Aceste egalităţi se pot considera ca un sistem liniar de ecuaţii relativ la mărimile $a_0, a_1, \ldots, a_p$; determinantul sistemului este evident nenul şi conform teoremei 1.73, sistemul va avea soluţie unică, ceea ce trebuia dovedit.

b. Rezultă de aici că dacă două polinoame $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k$ şi $Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} b_k \lambda^k$ coincid pentru fiecare valoare $\lambda \in K$, atunci $a_k = b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, p)$.

6.73. Vom avea nevoie în continuare de noţiunea de derivată a unui polinom $P(\lambda)$, de derivate de ordin superior şi de formula lui Taylor. În analiză aceste noţiuni se introduc pentru cazul funcţiilor polinomiale $P(\lambda)$ de argument real sau complex. Aici vom considera polinoame de argument λ variind într-un corp oarecare K; de aceea trebuie să introducem definiţiile corespunzătoare, independent de noţiunea de limită (care poate să nu fie definită în corpul K).

a. Fixăm un punct $\mu \in K$ şi scriem egalitatea

$$\sum_{k=0}^{p} a_k\lambda^k = \sum_{k=0}^{p} a_k[\mu + (\lambda - \mu)]^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{b_k(\mu)}{k!}(\lambda - \mu)^k, \quad (19)$$

unde $\frac{b_k(\mu)}{k!}$ $(k = 0, 1, \ldots, p)$ sînt polinoame în μ care se obţin după dezvoltarea $[\mu + (\lambda - \mu)]^k$ după puterile lui μ şi $\lambda - \mu$ şi reducînd termenii asemenea. Astfel

$b_0(\mu) \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k\mu^k = P(\mu)$ reprezintă polinomul $P(\mu)$ însuşi;

$b_1(\mu) \equiv \sum_{k=1}^{p} k a_k \mu^{k-1} = P'(\mu)$ — prima derivată a polinomului $P(\mu)$;

$b_2(\mu) \equiv \sum_{k=2}^{p} k(k-1)\, a_k \mu^{k-2} = P''(\mu)$ — derivata secundă a polinomului $P(\mu)$;

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$b_p(\mu) \equiv p(p-1)\ldots 1 \cdot a_p = P^{(p)}(\mu)$ — derivata de ordin p a polinomulni $P(\mu)$.

Pentru polinoame de grad p punem $P^{(q)}(\mu) = 0$ pentru $q > p$. Egalitatea (19) cu notaţiile introduse capătă forma

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} P^{(k)}(\mu)\,(\lambda - \mu)^k \quad (20)$$

şi se numeşte *formula Taylor pentru polinomul* $P(\lambda)$.

b. În particular, pentru polinomul $P(\lambda) = (\lambda - a)^p$ $(a \in K)$ avem $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(p-1)}(a) = 0$, $P^{(p)}(\lambda) = p!$, $P^{(q)}(\lambda) = 0$ pentru $q > p$.

c. Mai general, dacă $P(\lambda) = (\lambda - a)^p Q(\lambda)$, atunci avem

$$Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{r} b_k(\lambda - a)^k, \quad P(\lambda) = \sum_{k=0}^{r} b_k(\lambda - a)^{k+p},$$

deci

$$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(p-1)}(a) = 0. \quad (21)$$

d. Invers, dacă se știe că sînt îndeplinite condițiile (21), atunci

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a)\,(\lambda - a)^k = (\lambda - a)^p \sum_{k=p}^{s} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a)\,(\lambda - a)^{k-p} = (\lambda - a)^p\, Q(\lambda),$$

unde $Q(\lambda)$ este un nou polinom.

6.74. Notăm că reprezentarea unui polinom $P(\lambda)$ sub forma

$$\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k = P(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} b_k(\mu)\,(\lambda - \mu)^k,$$

unde $b_k(\mu)$ sînt anumite polinoame de μ, este în mod necesar unică. Într-adevăr, fixăm $\mu = \mu_0$ și dăm mărimii λ succesiv valorile distincte $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$. Atunci $\tau = \lambda - \mu$ va avea succesiv valorile distincte $\lambda_0 - \mu_0, \lambda_1 - \mu_0, \ldots, \lambda_p - \mu_0$, și pentru aceste valori ale lui τ se cunosc valorile polinomului $\sum_{k=0}^{p} b_k(\mu_0)\tau^k$ (care sînt egale cu $P(\lambda_0), \ldots, P(\lambda_p)$); conform **6.72 a** mărimile $b_k(\mu_0)$ se determină unic. Deoarece acest fapt este adevărat pentru orice $\mu = \mu_0 \in \boldsymbol{K}$, atunci polinoamele $b_k(\mu)$ $(k = 0, 1, \ldots, p)$ însele sînt definite în mod bine determinat.

6.75 a. Fie date două polinoame $P(\lambda)$ și $Q(\lambda)$. Arătăm că au loc formulele

$$(P + Q)^{(k)}(\mu) = P^{(k)}(\mu) + Q^{(k)}(\mu), \tag{22}$$

$$(PQ)^{(k)}(\mu) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j\, P^{(j)}(\mu)\, Q^{(k-j)}(\mu), \tag{23}$$

unde $C_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Într-adevăr, conform definiției, avem

$$(P + Q)(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} (P + Q)^{(k)}(\mu)\,(\lambda - \mu)^k,$$

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} P^{(k)}(\mu)\,(\lambda - \mu)^k,$$

$$Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} Q^{(k)}(\mu)\,(\lambda - \mu)^k,$$

$$P(\lambda) + Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} [P^{(k)}(\mu) + Q^{(k)}(\mu)]\,(\lambda - \mu)^k.$$

Conform teoremei de unicitate **6.74** se obțin formulele (22). Apoi, în mod similar

$$(PQ)(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} (PQ)^{(k)}(\mu)\,(\lambda - \mu)^k;$$

pe de altă parte,

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\mu)\,(\lambda - \mu)^j,\quad Q(\lambda) = \sum_{s=0}^{p} \frac{1}{s!} Q^{(s)}(\mu)\,(\lambda - \mu)^s,$$

$$P(\lambda)\,Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{s!\,j!} P^{(j)}(\mu)\, Q^{(s)}(\mu)\,(\lambda - \mu)^{s+j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2p} \left\{ \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-1)!} P^{(j)}(\mu)\, Q^{(k-j)}(\mu) \right\} (\lambda - \mu)^k;$$

în virtutea teoremei de unicitate **6.74** avem

$$\frac{1}{k!} (PQ)^{(k)}(\mu) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} P^{(j)}(\mu)\, Q^{(k-j)}(\mu),$$

de unde rezultă (23).

b. În particular, din formulele (23) rezultă următoarea propoziție importantă:

Dacă $P^{(k)}(\mu) = 0$ *pentru* $k = 0, 1, \ldots, m$, *atunci pentru orice polinom* $Q(\lambda)$ *avem* $(PQ)^{(k)}(\mu) = 0$ *pentru* $k = 0, 1, \ldots, m$.

6.76. Fie acum date un spectru $S = \{\lambda_1^{r_1}, \ldots, \lambda_m^{r_m}\}$, $\lambda_j \in K$ și algebra $Q(S)$ a jeturilor corespunzătoare (6.71).

Fiecărui polinom $P(\lambda)$ îi corespunde următorul jet P din $Q(S)$: punctului λ_k i se asociază numerele $P(\lambda_k)$, $P'(\lambda_k), \ldots, P^{(r_k-1)}(\lambda_k)$, unde $P^{(j)}(\lambda)$ sînt derivatele polinomului $P(\lambda)$, definite în **6.73 a**. Formulele (22) și (23) arată că adunării și înmulțirii de polinoame le corespund operațiile de adunare și înmulțire pentru jeturi definite în **6.71**. Astfel reprezentarea $P(\lambda) \to P$ este un morfism (6.24) al algebrei

polinoamelor Π în algebra jeturilor $Q(S)$. Arătăm că acest morfism este epimorfism; cu alte cuvinte, pentru orice jet f se poate determina un polinom $P(\lambda)$ astfel încît

$$f(\lambda_k) = P(\lambda_k), f'(\lambda_k) = P'(\lambda_k), \ldots, f^{(r_k-1)}(\lambda_k) = P^{(r_k-1)}(\lambda_k)$$

$$(k = 1, \ldots, m).$$

Este suficient de considerat cazul cînd numerele $f^{(j)}(\lambda_k)$ sînt diferite de zero doar pentru o valoare $k = k_1$, iar celelalte valori sînt nule; dacă am rezolvat problema pusă în acest caz, adică pentru fiecare $k = 1, \ldots, m$, am construit polinomul $P_k(\lambda)$ satisfăcînd condițiile

$$P_k(\lambda_k) = f(\lambda_k), \ldots, P_k^{(r_k-1)}(\lambda_k) = f^{(r_k-1)}(\lambda_k), \tag{24}$$

$$P_k^{(j)}(\lambda_s) = 0, \; s \neq k, \; j = 1, \ldots, r_s - 1, \tag{25}$$

atunci soluția căutată va putea fi obținută prin formula

$$P(\lambda) = P_1(\lambda) + \ldots + P_m(\lambda).$$

Astfel, avem de determinat un polinom $P_k(\lambda)$ care satisface condițiile (24) — (25). Îl vom căuta sub forma

$$P_k(\lambda) = Q_k(\lambda) \, R_k(\lambda), \tag{26}$$

unde $Q_k(\lambda)$ este un polinom care trebuie determinat, iar

$$R_k(\lambda) = \prod_{s \neq k} (\lambda - \lambda_s)^{r_s}. \tag{27}$$

Conform 6.72 b și 6.75 b avem

$$R_k^{(j)}(\lambda_s) = 0 \quad (s \neq k, \; j = 0, 1, \ldots, r_s - 1);$$

de unde, oricare ar fi polinomul $Q_k(\lambda)$ obținem, aplicînd din nou 6.75 b, că

$$P_k^{(j)}(\lambda_s) = 0 \quad (s \neq k, j = 0, 1, \ldots, r_s - 1),$$

și condiția (25) este îndeplinită.

Polinomul $P_k(\lambda)$ trebuie să verifice condițiile (24).

Remarcăm că

$$R_k(\lambda_k) = \prod (\lambda_k - \lambda_s)^{r_s} \neq 0.$$

De aceea din condițiile

$$f(\lambda_k) = P_k(\lambda_k) = Q_k(\lambda_k) \, R_k(\lambda_k)$$

mărimea $Q_k(\lambda_k)$ este bine determinată. Apoi din condițiile

$$f'(\lambda_k) = P_k'(\lambda_k) = Q_k'(\lambda_k) \, R_k(\lambda_k) + Q_k(\lambda_k) \, R_k'(\lambda_k)$$

pentru $Q_k(\lambda_k)$ deja cunoscut, se determină $Q_k'(\lambda_k)$; continuînd astfel, se calculează în mod bine determinat toate numerele $Q_k(\lambda_k), Q_k'(\lambda_k), \ldots, Q_k^{(r_k-1)}(\lambda_k)$. Cunoscînd aceste numere, putem determina polinomul căutat $Q_k(\lambda)$ folosind formula lui Taylor

$$Q_k(\lambda) = \sum \frac{1}{j!} Q_k^{(j)}(\lambda_k) \, (\lambda - \lambda_k)^j. \tag{28}$$

Urmărind șirul raționamentelor, vedem că polinomul $P_k(\lambda)$ definit prin formulele (26) — (28), satisface condițiile cerute (24) — (25).

6.77. Aplicînd 6.25 d, obținem că algebra $Q(S)$ a tuturor jeturilor pe un spectru dat este izomorfă cu algebra-cît Π/I, unde I este idealul în Π al tuturor polinoamelor D pentru care

$$P^{(j)}(\lambda_k) = 0, \; k = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, r_k.$$

Din 6.73 d rezultă că orice polinom $P(\lambda) \in I$ este divizibil prin polinomul

$$T(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \lambda_k)^{r_k}; \tag{29}$$

din 6.73 c rezultă că orice polinom $P(\lambda)$ care este divizibil prin $T(\lambda)$, aparține lui I. Idealul I, ca orice ideal din algebra Π este generat de polinomul de grad minim care îi aparține (6.26). Un astfel de polinom este polinomul $T(\lambda)$ însuși. Așadar, *algebra* $Q(S)$ *este izomorfă cu algebra-cît* Π/I unde I este idealul generat de polinomul $T(\lambda)$.

6.78. Aplicăm rezultatul 6.77 pentru rezolvarea problemei *descrierii tuturor elementelor inversabile* (6.21) *ale algebrei* $Q(S)$.

Este evident că un jet f pentru care există k astfel încît $f(\lambda_k) = 0$ nu poate fi inversabil, deoarece în acest caz pentru orice jet g avem

$$(fg)(\lambda_k) = f(\lambda_k) \, g(\lambda_k) = 0 \neq 1 = e(\lambda_k).$$

Considerăm un jet f astfel încît $f(\lambda_k) \neq 0$ $(k = 1, ..., m)$. Fie $P(\lambda)$ polinomul pentru care (6.76)

$$f(\lambda_k) = P(\lambda_k), ..., f^{(r_k-1)}(\lambda_k) = P^{(r_k-1)}(\lambda_k) \ (k = 1, ..., m).$$

Acest polinom nu are factori comuni cu polinomul $T(\lambda)$ (29); de aceea conform 6.28, există polinoame $Q(\lambda)$ și $S(\lambda)$ astfel încît

$$P(\lambda)\,Q(\lambda) + T(\lambda)\,S(\lambda) = 1. \tag{30}$$

Fie q jetul corespunzînd polinomului $Q(\lambda)$. Aplicînd egalității (30) epimorfismul $\Pi \to Q(S)$, construit în 6.76, și folosind faptul că prin acest epimorfism polinomul $T(\lambda)$ este transformat în 0, obținem $fq = 1$, adică jetul f are invers în algebra $Q(S)$. Așadar, *jetul* $f \in Q(S)$ *este inversabil.*

Așa cum știm din 6.21, pentru orice jet inversabil u, orice ecuație de forma $ux = v$ are soluție și aceasta este unică, pentru orice jet cunoscut v (jetul necunoscut fiind x). Pentru cîtul $x = \frac{v}{u}$ se poate indica o aproximare explicită, rezolvînd succesiv sistemul de ecuații

$$u(\lambda_k)\,x(\lambda_k) = v(\lambda_k),$$

$$u(\lambda_k)\,x'(\lambda_k) + u'(\lambda_k)\,x(\lambda_k) = v'(\lambda_k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{j=0}^{r} C_r^j u^{(j)}(\lambda_k)\,x^{(r-j)}(\lambda_k) = v^{(r)}(\lambda_k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k = 1, ..., m, \ r = 0, 1, ..., r_k.$$

6.79 a Un spectru $S = \{\lambda_1^{r_1}, ..., \lambda_m^{r_m}\}$ cu numere complexe $\lambda_1, ..., \lambda_m$ se numește *simetric* dacă pentru orice $\lambda_k = \sigma_k + i\tau_k$ nereal din S, aparține lui S și conjugatul complex $\bar{\lambda}_k = \sigma_k - i\tau_k$ al acestuia cu aceeași multiplicitate r_k. Un jet $f = \{f^{(j)}(\lambda_k)\}$ pe un spectru simetric S se numește *simetric* dacă numerele $f^{(j)}(\lambda_k)$ sînt complex conjugate numerelor $f^{(j)}(\bar{\lambda}_k)$ $(j = 0, 1, ..., r_k)$. Dacă $P(\lambda)$ este un polinom cu coeficienți reali, atunci pe un spectru simetric jetul format de numerele $P^{(j)}(\lambda_k)$ $(k = 1, ..., m, \ j = 1, ..., r_k)$ este simetric,

deoarece derivatele $P^{(j)}(\lambda)$ au de asemenea coeficienți reali și de aceea

$$P^{(j)}(\bar{\lambda}_k) = \overline{P^{(j)}(\lambda_k)}. \tag{31}$$

Invers, pentru un jet simetric $f = \{f^{(j)}(\lambda_k)\}$ pe un spectru simetric $S = \{\lambda_1^{r_1}, ..., \lambda_{m3}^{r_m}\}$ se poate întotdeauna găsi un polinom $P_0(\lambda)$ cu coeficienți reali, pentru care $P_0^{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k)$ $(k = 1, ..., m, \ j = 1, ..., r_k)$. Într-adevăr, conform 6.76, se poate determina un polinom $P(\lambda)$ cu coeficienți complecși, satisfăcînd condițiile cerute. Notăm cu $\bar{P}(\lambda)$ polinomul cu coeficienți complecși-conjugați. Atunci

$$\frac{1}{2}[P^{(j)}(\lambda_k) + \bar{P}^{(j)}(\lambda_k)] = \frac{1}{2}[P^{(j)}(\lambda_k) + \overline{P^{(j)}(\bar{\lambda}_k)}] =$$

$$= \frac{1}{2}[f^{(j)}(\lambda_k) + \overline{f^{(j)}(\bar{\lambda}_k)}] = f^{(j)}(\lambda_k),$$

adică polinomul $P_0(\lambda) = \frac{1}{2}[P(\lambda) + \bar{P}(\lambda)]$, care are coeficienți reali, satisface condiția cerută.

b. Jeturile simetrice f pe un spectru simetric S formează în mod evident o algebră peste corpul numerelor reale. Conform **6.25 d** această algebră *este izomorfă cu algebra-cît* Π/I *unde* Π *este algebra tuturor polinoamelor cu coeficienți reali, iar* $I \subset \Pi$ *este idealul format din acele polinoame* $P(\lambda) \in \Pi$ *pentru care*

$$P^{(j)}(\lambda_k) = 0, \ k = 1, ..., m, \ j = 1, ..., r_k.$$

adică idealul generat de polinomul real

$$T(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \lambda_k)^{r_k}.$$

§ 6.8. Funcții de operatori și scrierea lor matricială

În acest paragraf se construiește calculul funcțiilor de operatori: pentru orice operator liniar $\mathcal{A}$ care acționează într-un spațiu n-dimensional $\mathcal{C}_n$ (sau $\mathcal{R}_n$) se vor considera polinoame de matricea A, notate $P(A)$ sau funcții raționale

de matricea A, $\frac{P(A)}{Q(A)}$, împreună cu operații asupra acestora. La ultimul punct se va da extinderea calculului operațional la funcții analitice.

6.81. Se consideră un operator $\mathcal{A}$ într-un spațiu $\mathcal{H}_n$. Algebra $\Pi_{\mathcal{A}}$ a tuturor polinoamelor $P(\mathcal{A})$ unde $P(\lambda)$ este un polinom oarecare este izomorfă (așa cum am văzut în 6.31—6.33) cu algebra-cît $\Pi/I_{\mathcal{A}}$ idealul generat de polinomul anulator minimal $T(\lambda)$ al operatorului $\mathcal{A}$. Presupunem că polinomul $T(\lambda)$ admite în corpul K o descompunere în factori liniari

$$T(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda - \lambda_k)^{r_k}, \tag{32}$$

Conform 6.77 algebra-cît $\Pi/I_{\mathcal{A}}$ este izomorfă cu algebra $Q(S)$ a tuturor jeturilor definite pe spectrul $S = S_{\mathcal{A}} = \{\lambda_1^{r_1}, \ldots, \lambda_m^{r_m}\}$ (spectrul operatorului $\mathcal{A}$).

Așadar, *algebra* $\Pi_{\mathcal{A}}$ *este de asemenea izomorfă cu algebra* $Q(S_{\mathcal{A}})$. Forma explicită a acestui izomorfism se poate obține în modul următor: fiecărui jet $f \in Q(S_{\mathcal{A}})$ îi corespunde clasa polinoamelor $P(\lambda) \in \Pi$ astfel încît

$$P^{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k) \tag{33}$$

$$(k = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, \ldots, r_k - 1),$$

și fiecăruia din aceste polinoame îi corespunde unul și același operator bine determinat $P(\mathcal{A}) \in \Pi_{\mathcal{A}}$ pe care îl notăm cu $f(\mathcal{A})$.

Indicăm apoi forma explicită a matricii operatorului $P(\mathcal{A})$ pentru valorile (33) date, în ipoteza că matricea A este dată în forma Jordan.

6.82. Presupunem că într-o anumită bază a spațiului $\mathcal{H}_n$, operatorului $\mathcal{A}$ îi corespunde o matrice de ordin n de tipul

$$\begin{Vmatrix} \lambda_0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 \end{Vmatrix}, \tag{34}$$

adică de forma $\lambda_0 \mathcal{E} + \mathcal{B}$, unde $\mathcal{B}$ are matricea corespunzătoare

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Din 4.74 b se știe că matricea B^k are forma

$$B^k = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & \overset{k+1}{1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \; k+1$$

(diagonala principală avînd toate elementele egale cu 1 este deplasată cu k pași spre dreapta).

Fie $P(\lambda)$ un polinom oarecare de grad p; aplicînd formula lui Taylor (20), se poate scrie

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} P^{(k)}(\lambda_0)\ (\lambda - \lambda_0)^k.$$

Înlocuind λ cu simbolul operatorului $\mathcal{A}$, se obține egalitatea

$$P(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} P^{(k)}(\lambda)\ (\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{E})^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} P^{(k)}(\lambda_0)\ \mathcal{B}^k.$$

Ținînd cont de expresia matricii B^k, rezultă că

$$P(A) = \begin{Vmatrix} P(\lambda_0) & P'(\lambda_0) & \frac{1}{2!}P''(\lambda_0) & \ldots & \frac{1}{(n-1)!}P^{(n-1)}(\lambda_0) \\ 0 & P(\lambda_0) & P'(\lambda_0) & \ldots & \frac{1}{(n-2)!}P^{(n-2)}(\lambda_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & P(\lambda_0) \end{Vmatrix}. \tag{35}$$

Observăm că pentru construirea matricii $P(A)$ asociată polinomului $P(\lambda)$ sînt suficiente numai valorile $P(\lambda_0)$, $P'(\lambda_0)$, ..., $P^{(n-1)}(\lambda_0)$, unde n este ordinul matricii A.

6.83. Presupunem acum că matricea lui $\mathcal{A}$ este o matrice cvasidiagonală de ordin n, constînd din m celule diagonale de forma (34), unde λ_0 parcurge valorile $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, cu dimensiunile $n_1, \ldots, n_m$ respectiv. În virtutea regulilor de calcul cu matrici cvasidiagonale (4.52), calculul lui $P(A)$ se poate face în mod independent pentru fiecare celulă diagonală în parte. Aplicînd 6.82, obține: *matricea $P(A)$ se obține prin înlocuirea fiecărei celule diagonale* (34) *a matricii A cu celula* (35). Astfel, pentru a construi matricea $P(A)$ este suficient să fie cunoscute valorile $P^{(j)}(\lambda_k)$, $k = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n_m$.

6.84. Fie $K = \mathbf{C}$, corpul numerelor complexe. Atunci pentru orice operator $\mathcal{A}$ acționînd în spațiul $\mathfrak{X}_n = \mathcal{C}_n$, polinomul anulator minimal are o descompunere de forma (32) și există o bază în care matricea operatorului $\mathcal{A}$ se scrie sub formă cvasidiagonală cu celule de forma

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{matrix} \right\| \tag{36}$$

de dimensiuni $n_k^{(j)} \leqslant r_k$ (6.37).

Așadar, operatorul $\mathcal{A}$ determină spectrul

$$S_{\mathcal{A}} = \{\lambda_1^{r_1}, \ldots, \lambda_m^{r_m}\}.$$

Dacă f este un jet oarecare pe spectrul $S_{\mathcal{A}}$,

$$f = \{f^{(j)}(\lambda_k),\ k = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, r_k\},$$

atunci operatorul corespunzător $f(\mathcal{A})$ are, în virtutea raționamentului 6.81—6.83, o matrice de formă cvasidiagonală, în care fiecare celulă de forma (36) este înlocuită prin celula

$$\left\| \begin{matrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \frac{1}{2!} f''(\lambda_k) & \ldots & \frac{1}{(n_k^{(j)} - 1)!} f^{(n_k^j - 1)}(\lambda_k) \\ 0 & f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \ldots & \frac{1}{(n_k^j - 2)!} f^{(n_k^j - 2)}(\lambda_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_k) \end{matrix} \right\| \tag{37}$$

cu aceasta, problema izomorfismului dintre algebrele $\Pi_{\mathcal{A}}$ și $Q(S_{\mathcal{A}})$ este rezolvată în mod explicit.

6.85 a. Ne ocupăm acum de funcții de operatori, avînd (6.62), într-o anumită bază, o matrice de forma

$$\left\| \begin{matrix} \sigma & \tau & 1 & 0 & & & \\ -\tau & \sigma & 0 & 1 & & & \\ & & \sigma & \tau & & & \\ & & -\tau & \sigma & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \sigma & \tau \\ & & & & & -\tau & \sigma \end{matrix} \right\|, \tag{38}$$

unde σ și τ sînt elemente din corpul K.

Notăm

$$E = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \Lambda = \left\| \begin{matrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{matrix} \right\|.$$

Matricea A poate fi scrisă ca o matrice-bloc cu blocuri pătratice de cîte două linii.

$$A = \left\| \begin{matrix} \Lambda & E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & E & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \Lambda & E \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \Lambda \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \Lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \Lambda \end{matrix} \right\| +$$

$$+ \left\| \begin{matrix} 0 & E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

De aceea, raționînd ca mai sus pe baza regulii de înmulțire a matricilor-bloc (4.51), matricea $P(A)$ se poate scrie sub forma unei matrici-bloc cu blocuri de aceeași dimensiune

$$P(A) = \left\| \begin{matrix} P(\Lambda) & P'(\Lambda) & \frac{1}{2} P''(\Lambda) & \ldots & \frac{1}{(m-1)!} P^{(m-1)}(\Lambda) \\ 0 & P(\Lambda) & P'(\Lambda) & \ldots & \frac{1}{(m-2)!} P^{(m-2)}(\Lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & P(\Lambda) \end{matrix} \right\|. \tag{39}$$

b. Dacă matricea A este cvasidiagonală și constă din celule diagonale de forma (34) și (38), atunci raționînd ca în 6.83, rezultă că matricea $P(A)$ se obține prin înlocuirea oricărei celule diagonale a matricii A cu celula corespunzătoare de forma (35) sau (39).

c. Considerăm cazul cînd $K = \mathbb{R}$ și numerele σ și τ de la pct. a sînt reale. În acest caz pentru polinomul real $P(\lambda)$ se poate indica explicit forma matricii $P^{(k)}(\Lambda)$ care figurează în formula (39). Într-adevăr, dacă introducem matricea

$$I = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

atunci evident $I^2 = -E$ și algebra matricilor reale de forma

$$\Lambda = \sigma E + \tau I = \begin{Vmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathrm{Re}\lambda & \mathrm{Im}\lambda \\ -\mathrm{Im}\lambda & \mathrm{Re}\lambda \end{Vmatrix}, \quad \lambda = \sigma + i\tau,$$

este izomorfă cu algebra uzuală a numerelor complexe λ (vezi 4.74 **a**). De aceea pentru orice polinom $P(\lambda)$ cu coeficienți reali,

$$P(\Lambda) = P(\sigma E + \tau I) = \begin{Vmatrix} \mathrm{Re}P(\lambda) & \mathrm{Im}P(\lambda) \\ -\mathrm{Im}P(\lambda) & \mathrm{Re}P(\lambda) \end{Vmatrix}, \quad \lambda = \sigma + i\tau,$$

și în mod similar,

$$P^{(k)}(\Lambda) = P^{(k)}(\sigma E + \tau I) = \begin{Vmatrix} \mathrm{Re}P^{(k)}(\lambda) & \mathrm{Im}P^{(k)}(\lambda) \\ -\mathrm{Im}P^{(k)}(\lambda) & \mathrm{Re}P^{(k)}(\lambda) \end{Vmatrix}.$$

6.86. Presupunem $K = \mathbb{R}$; atunci pentru orice operator $\mathcal{A}$ acționînd în spațiul $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n$, polinomul anulator minimal $T(\lambda)$ are coeficienți reali, deci definește un spectru simetric $S_{\mathcal{A}}$. Algebra operatorilor $P(\mathcal{A})$ este izomorfă cu algebra-cît Π/I_T, unde Π este algebra tuturor polinoamelor cu coeficienți reali iar I_T este idealul generat de polinomul $T(\lambda)$. Această algebră-cît este izomorfă cu algebra jeturilor simetrice pe spectrul S_T (6.79). Pe de altă parte, pentru operatorul $\mathcal{A}$ există o bază în care matricea A a operatorului $\mathcal{A}$ este cvasidiagonală cu celule diagonale de forma (34) sau (38). Dacă f este orice jet simetric pe spectrul $S_{\mathcal{A}}$, atunci matricea lui corespunzătoare $f(A)$, se obține, așa cum am arătat, prin

înlocuirea fiecărei celule (34) prin (37) și a fiecărei celule (38) de dimensiune $2m$, prin matricea-bloc

$$\begin{Vmatrix} f(\Lambda) & f'(\Lambda) & \dots & \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\Lambda) \\ 0 & f(\Lambda) & \dots & \frac{1}{(m-2)!} f^{(m-2)}(\Lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(\Lambda) \end{Vmatrix}$$

unde blocurile pătratice de ordin doi $f^{(k)}(\Lambda)$ au forma

$$f^{(k)}(\Lambda) = \begin{Vmatrix} \mathrm{Re}f^{(k)}(\lambda) & \mathrm{Im}f^{(k)}(\lambda) \\ -\mathrm{Im}f^{(k)}(\lambda) & \mathrm{Re}f^{(k)}(\lambda) \end{Vmatrix}.$$

6.87. Fie $\mathcal{A}$ un operator liniar în spațiul $\mathcal{C}_n$; ce operatori $P(\mathcal{A})$ (unde $P(\lambda)$ este un polinom) sînt inversabili?

Din expresia matricii operatorului $P(\mathcal{A})$ într-o bază Jordan (36) se vede că

$$\det P(A) = \prod_{k=1}^{m} [P(\lambda_k)]^{n_k}, \quad \sum_{n=1}^{k} n_k = n.$$

De aceea operatorul $P(\mathcal{A})$ este inversabil în algebra $\mathfrak{B}(\mathcal{C}_n)$ a tuturor operatorilor liniari acționînd în spațiul $\mathcal{C}_n$ dacă și numai dacă $P(\lambda_k) \neq 0$, $k = 1, \dots, m$. Arătăm că în condițiile îndeplinirii acestei condiții, există operatorul invers $P(\mathcal{A})^{-1}$ în algebra $\Pi_{\mathcal{A}}$. Într-adevăr, în cazul indicat jetul p, corespunzînd polinomului $P(\lambda)$ în algebra $Q(S_{\mathcal{A}})$ a jeturilor, adică jetul compus din numerele

$$P^{(j)}(\lambda_k) \quad (k = 1, \dots, m;\ j = 0, \dots, r_k - 1),$$

este inversabil în algebra $Q(S_{\mathcal{A}})$ (6.78); deoarece algebra $Q(S_{\mathcal{A}})$ este izomorfă cu algebra $\Pi_{\mathcal{A}}$ (6.81), operatorul $P(\mathcal{A})$ este inversabil în algebra $\Pi_{\mathcal{A}}$.

Conform celor de mai sus, izomorfismul între algebrele $Q(S_{\mathcal{A}})$ și $\Pi_{\mathcal{A}}$ arată în acest caz că pentru orice polinom $Q(\lambda)$ ecuația

$$P(\mathcal{A}) \cdot z(\mathcal{A}) = Q(\mathcal{A})$$

este rezolvabilă în algebra $\Pi_{\mathcal{A}}$, cu polinomul necunoscut $z(\lambda)$. Conform 6.78 și 6.84 matricea operatorului $z(\mathcal{A})$ într-o bază Jordan a operatorului $\mathcal{A}$ se obține înlocuind fiecare celulă (36) printr-o celulă de forma

$$\left\| \begin{matrix} \frac{Q(\lambda_k)}{P(\lambda_k)} & \left(\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}\right)'_{\lambda=\lambda_k} & \frac{1}{2}\left(\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}\right)''_{\lambda=\lambda_k} & \dots \\ 0 & \frac{Q(\lambda_k)}{P(\lambda_k)} & \left(\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}\right)_{\lambda=\lambda_k} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{Q(\lambda_k)}{P(\lambda_k)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\|. \qquad (40)$$

6.88. Rezultatul obținut poate fi interpretat în modul următor. Fie $S = \{\lambda_1^{r_1}, \dots, \lambda_m^{r_m}\}$ un spectru oarecare în planul complex. Notăm prin $T(S)$ mulțimea tuturor funcțiilor complexe raționale $f(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}$ unde $Q(\lambda)$ și $P(\lambda)$ sînt polinoame, iar $P(\lambda)$ nu are rădăcini printre punctele mulțimii S. În mulțimea $T(S)$ introducem, prin regulile uzuale, operațiile de adunare, înmulțire cu numere complexe și de înmulțire a funcțiilor între ele, iar mulțimea $T(S)$ va fi atunci o algebră peste corpul $\mathbb{C}$. Observăm apoi că fiecare funcție $f(\lambda) \in T(S)$ are derivate $f'(\lambda)$, $f''(\lambda)$, ... în sensul clasic din analiză. Dacă asociem fiecărei funcții $f(\lambda) \in T(S)$ jetul

$$f = \{f^{(j)}(\lambda_k),\ k = 1, \dots, m;\ j = 0, 1, \dots, r_k - 1\},$$

unde $f^{(j)}(\lambda)$ este derivata în sens clasic a funcției $f(\lambda)$, atunci această corespondență va fi un morfism al algebrei $T(S)$ de funcții raționale în algebra $Q(S)$ a jeturilor de spectru S și chiar un epimorfism, deoarece jeturile care corespund polinoamelor $Q(\lambda)$ constituie întreaga algebră $Q(S)$ (6.76). Presupunem că spectrul $S = S_{\mathcal{A}}$ este spectrul unui operator $\mathcal{A}$ acționînd în spațiul $\mathcal{C}_n$. Atunci algebra $\Pi_{\mathcal{A}}$ a operatorilor $P(\mathcal{A})$ este izomorfă cu algebra jeturilor $Q(S_{\mathcal{A}})$ și putem prelungi epimorfismul $T(S_{\mathcal{A}}) \to Q(S_{\mathcal{A}})$ la un epimorfism $T(S_{\mathcal{A}}) \to \Pi_{\mathcal{A}}$. Cu alte cuvinte, putem asocia fiecărei funcții raționale $f(\lambda) \in T(S)$ operatorul liniar $f(\mathcal{A}) \in \Pi_{\mathcal{A}}$ astfel încît corespondența $f(\lambda) \to f(\mathcal{A})$ să fie din nou un epimorfism. Matricea operatorului $f(\mathcal{A})$ se construiește conform regulii (40) indicate mai sus.

6.89. În locul algebrei funcțiilor raționale se poate considera algebra funcțiilor analitice. Anume, fie $W(S)$ mulțimea tuturor funcțiilor $f(\lambda)$ analitice în punctele $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (adică analitice în fiecare vecinătate a punctelor indicate). Mulțimea $W(S)$ cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire este din nou algebră peste $\mathbb{C}$ (conținînd algebra $T(S)$). Funcțiile analitice au derivate de orice ordin (în sensul uzual din analiză); folosind aceste fapte, se poate extinde epimorfismul $T(S_{\mathcal{A}}) \to \Pi_{\mathcal{A}}$ construit la 6.88 la un epimorfism $W(S_{\mathcal{A}}) \to \Pi_{\mathcal{A}}$. Este esențial faptul că în sfera de acțiune a acestui epimorfism intră multe funcții transcendente care se întîlnesc în analiză, de exemplu $e^{t\lambda}$, $\sin \omega\lambda$, $\cos \omega\lambda$ etc. Dacă se notează prin $f(\mathcal{A})$ operatorul corespunzînd unei funcții $f(\lambda) \in W(S_{\mathcal{A}})$ atunci matricea lui într-o bază Jordan a operatorului $\mathcal{A}$ se calculează tot după regula (37). Notăm de exemplu formula

$$e^{(t_1+t_2)\mathcal{A}} = e^{t_1\mathcal{A}}\, e^{t_2\mathcal{A}},$$

care rezultă direct din identitatea $e^{(t_1+t_2)\lambda} = e^{t_1\lambda} e^{t_2\lambda}$ și din faptul că aplicația $W(S_{\mathcal{A}}) \to \Pi_{\mathcal{A}}$ este un epimorfism.

Rezultatele 6.87—6.89 referitoare la operatori liniari în spațiul complex pot fi date și pentru operatori liniari în spații reale, utilizînd forma jordaniană reală și metodele 6.85—6.86. Acest transfer nu necesită idei noi iar cititorul îl poate face singur.

PROBLEME

1. Presupunem că matricea unui operator $\mathcal{A}$ într-o anumită bază $e_1, \dots, e_n$ are forma

$$\left\| \begin{matrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda \end{matrix} \right\|.$$

În ce bază ea va avea forma jordaniană normală?

2. Să se arate că o matrice pătratică A și matricea transpusă A' sînt totdeauna echivalente.

3. Să se determine forma Jordan a matricii

$$\left\| \begin{matrix} -2 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

4. Sînt sau nu echivalenți operatorii dați prin matricile

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

5. Să se determine divizorii elementari ai matricilor de ordin n

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{Vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{Vmatrix}, \quad A_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{Vmatrix}.$$

6. Să se arate că toate matricile

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \alpha & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{Vmatrix}$$

cu orice elemente $a_{12}, a_{13}, \dots$ sînt echivalente dacă toate elementele $a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-1,n}$ sînt nenule.

7. Să se determine forma Jordan a unei matrici A satisfăcînd ecuația $P(A) = 0$ unde polinomul $P(\lambda)$ nu admite rădăcini multiple.

8. Să se determine forma Jordan a unei matrici A satisfăcînd ecuația $P(A) = 0$ cu P polinom oarecare.

9. Dacă un polinom anulator al unui operator $\mathcal{A}$ este polinom de grad doi atunci orice vector x din spațiul $\mathcal{R}$ aparține unui plan sau unei drepte, care sînt invariante la operatorul $\mathcal{A}$.

10. Să se afle toate matricile care comută cu matricea

$$A_m(a) = \left.\begin{Vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{Vmatrix}\right\} m \text{ linii.}$$

11. Să se afle toate $m \times n$-matricile B astfel încît

$$BA_n(a) = A_m(a)\,B.$$

12. Să se determine matricile care comută cu matricile cvasidiagonale de forma

$$\begin{Vmatrix} A_{m_1}(a) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{m_2}(a) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{m_k}(a) \end{Vmatrix}.$$

13. Să se afle toate matricile care comută cu matricile cvasidiagonale de forma

$$\begin{Vmatrix} A_{m_1}(a_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{m_2}(a_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{m_k}(a_k) \end{Vmatrix},$$

unde numerele $a_1, a_2, \dots, a_k$ sînt distincte două cîte două.

14. Să se afle toate matricile care comută cu o matrice Jordan generală (8).

15. În ce condiții orice matrice care comută cu o matrice A este polinom de A?

16. Să se arate că într-un spațiu real $\mathcal{R}_n$ de dimensiune $n \geqslant 2$ orice operator liniar are un plan invariant.

Capitolul 7

FORME BILINIARE ȘI FORME PĂTRATICE

În acest capitol vom studia funcții liniare numerice de două argumente vectoriale. Spre deosebire de cazul funcțiilor liniare numerice de o variabilă, teoria funcțiilor numerice de două variabile și în special teoria formelor biliniare au un bogat conținut geometric. Luînd în expresia unei forme biliniare al doilea argument egal cu primul, se obține o nouă clasă importantă de funcții de o variabilă, neliniare — formele pătratice.

Considerațiile din §§ 7.1—7.8 se fac într-un spațiu vectorial $\mathcal{K}$ peste un corp arbitrar de numere K iar în § 7.9 se consideră spații vectoriale reale.

§ 7.1. Forme biliniare

7.11. O funcție numerică $A(x, y)$ de două argumente vectoriale x, y dintr-un spațiu vectorial $\mathcal{K}$, $A : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ se numește *funcție biliniară* sau *formă biliniară* dacă ea este funcție liniară de x pentru fiecare y fixat și funcție liniară de y pentru fiecare x fixat.

Cu alte cuvinte, $A(x, y)$ este o formă biliniară de x și y dacă pentru orice x, y, z din $\mathcal{K}$ și pentru orice $\alpha \in K$ au loc relațiile

$$\left.\begin{aligned} &A(x+z, y) = A(x, y) + A(z, y),\\ &A(\alpha x, y) = \alpha A(x, y),\\ &A(x, y+z) = A(x, y) + A(x, z),\\ &A(x, \alpha y) = \alpha A(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Primele două din aceste egalități exprimă liniaritatea funcției $A(x, y)$ în primul argument, iar ultimele două — liniaritatea în cel de al doilea argument.

Din definiția formei biliniare, folosind relațiile (1), se obține imediat formula generală

$$A\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j A(x_i, y_j), \tag{2}$$

în care $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m$ sînt vectori arbitrari din spațiul $\mathcal{K}$ iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ sînt orice numere din K.

Formele biliniare date în spații infinit-dimensionale se numesc de obicei *funcționale biliniare*.

7.12. *Exemple*

a. Dacă $L_1(x)$ și $L_2(x)$ sînt forme liniare, atunci $A(x, y) = L_1(x) \cdot L_2(y)$ este evident o formă biliniară de x și y.

b. Într-un spațiu vectorial n-dimensional cu o bază fixată $e_1, e_2, \ldots, e_n$ un exemplu de formă biliniară îl constituie funcția definită prin

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k,$$

unde $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k$ — sînt valori oarecare și a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ — numere fixate.

7.13. *Forma generală a unei forme biliniare într-un spațiu vectorial n-dimensional.* Presupunem că într-un spațiu vectorial n-dimensional $\mathcal{K}_n$ este dată forma biliniară $A(x, y)$. Alegem în $\mathcal{K}_n$ o bază oarecare $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Notăm $A(e_i, e_k) = a_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. Atunci pentru orice

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k$$

conform formulei (2), avem

$$A(x, y) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_i \eta_k A(e_i, e_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \eta_k. \tag{3}$$

Așadar, în exemplul **b** a fost indicată reprezentarea cea mai generală a unei funcții biliniare într-un spațiu vectorial n-dimensional.

Coeficienții a_{ik} formează o matrice pătratică

$$A = A_{(e)} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} = \| a_{ik} \|.$$

pe care o vom numi *matricea formei biliniare* $A(x, y)$ *în baza* $\{e\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

7.14. *Forme biliniare simetrice.* O formă biliniară se numește simetrică dacă pentru orice vectori x și y

$$A(x, y) = A(y, x).$$

Dacă forma biliniară $A(x, y)$ în spațiul n-dimensional $\mathcal{R}_n$ este *simetrică* atunci

$$a_{ik} = A(e_i, e_k) = A(e_k, e_i) = a_{ki};$$

așadar, matricea $A_{(e)}$ a unei forme biliniare simetrice în orice bază $e_1, e_2, \dots, e_n$ a spațiului $\mathcal{R}_n$ coincide cu matricea transpusă $A'_{(e)}$. Se arată ușor că are loc și afirmația inversă: dacă într-o anumită bază $\{e\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ avem $A'_{(e)} = A_{(e)}$, atunci forma $A(x, y)$ este simetrică; într-adevăr, în acest caz

$$A(y, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\eta_i \xi_k = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki}\eta_i \xi_k =$$

$$= \sum_{k,i=1}^{n} a_{ik}\xi_i \eta_k = A(x, y),$$

ceea ce trebuia dovedit.

În particular, se obține următorul fapt: dacă matricea unei forme biliniare $A(x, y)$, calculată într-o anumită bază, coincide cu transpusa ei, atunci în orice altă bază a spațiului $\mathcal{R}_n$ matricea acestei forme coincide de asemenea cu transpusa.

Reamintim că o matrice pătratică care coincide cu transpusa sa se numește matrice simetrică.

7.15. *Transformarea matricii unei forme biliniare prin trecere la o nouă bază.*

a. Prin trecere la o nouă bază, matricea unei forme biliniare se modifică și vom indica în ce mod. Fie $A_{(e)} = \|a_{ji}\|$

matricea unei forme biliniare $A(x, y)$ într-o bază $\{e\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și $A_{(f)} = \|b_{ik}\|$ matricea aceleiași forme în baza $\{f\} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ $(i, j, k, l = 1, 2, \dots, n)$, și presupunem că formulele de trecere de la o bază la alta au forma

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(i)} e_j \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

cu matricea de trecere $P = \|p_j^{(i)}\|$. În acest caz

$$b_{ik} = A(f_i, f_k) = A\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^{(i)} e_j, \sum_{l=1}^{n} p_l^{(k)} e_l\right) =$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n} p_j^{(i)} p_l^{(k)} A(e_j, e_l) = \sum_{j,l=1}^{n} p_j^{(i)} p_l^{(k)} a_{jl}.$$

Formula obținută se scrie

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_j^{(j)\prime} a_{jl} p_l^{(k)}, \tag{4}$$

unde $p_i^{(j)\prime} = p_j^{(i)}$ este elementul matricii P', transpusa lui P. Formula (4) se scrie matricial (4.43) astfel

$$A_{(f)} = P' A_{(e)} P. \tag{5}$$

b. Deoarece matricile P și P' sînt nesingulare, atunci conform 4.67 rangul matricii $A_{(f)}$ este egal cu rangul matricii $A_{(e)}$; așadar, *rangul matricii unei forme biliniare nu depinde de alegerea bazei.*

De aceea are sens noțiunea de *rang al unei forme biliniare*, definit ca rangul matricii acestei forme în oricare din bazele spațiului $\mathcal{R}$.

Dacă forma biliniară $A(x, y)$ are rangul n, egal cu dimensiunea spațiului $\mathcal{R}_n$, atunci acea formă se numește *nesingulară* sau *nedegenerată*.

c. Fie $A(x, y)$ o formă nesingulară; arătăm că pentru orice vector $x_0 \neq 0$ există un vector $y_0 \in \mathcal{R}_n$ pentru care $A(x_0, y_0) \neq 0$. Presupunem contrariul, adică $A(x_0, y) = 0$ pentru orice $y \in \mathcal{R}_n$. Construim o bază $e_1, \dots, e_n$ în spațiul $\mathcal{R}_n$ astfel încît $e_1 = x_0$. Atunci în matricea formei $A(x, y)$ în această bază vom avea

$$a_{1m} = A(e_1, e_m) = A(x_0, e_m) = 0, \text{ pentru orice } m = 1, \dots, n,$$

adică prima linie a matricii respective are toate elementele nule. În acest caz, rangul acestei matrici este $<n$, ceea ce contrazice presupunerea că forma este nedegenerată. Afirmația este astfel dovedită.

d. Observăm că forma $A(x, y)$ nesingulară pentru întreg spațiul $\mathcal{R}$ poate să devină singulară pe un subspațiu $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$. Astfel, în spațiul $\mathcal{R}_2$ unde $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$, forma

$$A(x, y) = \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2$$

este nesingulară; totuși pe subspațiul $\mathcal{R}_2' \subset \mathcal{R}_2$ definit de prima bisectoare unde $\xi_1 = \xi_2$ (și $\eta_1 = \eta_2$) ea este identic nulă.

e. Pentru determinanții matricilor considerate se obține, aplicînd teorema relativ la determinantul unui produs de matrici (4.75), relația

$$\det A_{(\mathfrak{f})} = \det A_{(\mathfrak{e})} \cdot (\det P)^2. \tag{6}$$

§ 7.2. Forme pătratice

În geometria analitică plană una din problemele de bază este cea a reducerii ecuației generale a unei curbe de gradul doi la forma canonică prin trecere la un nou sistem de coordonate. Ecuația unei curbe de gradul doi simetrică față de originea $x = 0$, $y = 0$ a axelor de coordonate alese este de forma

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D. \tag{7}$$

Transformarea de coordonate revine la formule de tipul

$$x = a_{11}x' + a_{12}y',$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y',$$

unde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sînt numere convenabile (sinuși, cosinuși ai unghiului de rotație ai axei) și ca rezultat al acestei transformări, ecuația (7) capătă o formă mai simplă

$$A'x'^2 + B'y'^2 = D.$$

O problemă similară se poate pune în spații de orice dimensiune. Teoria formelor pătratice, expusă în continuare, are ca scop principal rezolvarea acestei probleme și a unor probleme conexe cu ea.

7.21. Introducem următoarea definiție

Prin *formă pătratică* într-un spațiu vectorial $\mathcal{R}$ se înțelege orice funcție $A(x, y)$ de un argument vectorial $x \in \mathcal{R}$, care se obține dintr-o formă biliniară oarecare $A(x, y)$, înlocuind y cu x.

Într-un spațiu vectorial n-dimensional $\mathcal{R}_n$ cu bază fixată $\{\mathbf{e}\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ orice formă pătratică se scrie, conform (2), în modul următor

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k, \tag{8}$$

unde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt coordonatele vectorului x relativ la baza $\{\mathbf{e}\}$. Invers, *dacă este dată o funcție* $A(x, x)$ *de vectorul* x, *definită în baza* $\{\mathbf{e}\}$ *prin formula* (8), *atunci această funcție reprezintă o formă pătratică de vectorul* x.

Într-adevăr, se poate introduce forma biliniară

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k,$$

unde $\eta_1, \ldots, \eta_n$ sînt coordonatele vectorului y relativ la baza $\{\mathbf{e}\}$; atunci este evident că forma pătratică $B(x, x)$ coincide cu funcția $A(x, x)$.

7.22. Observăm că în suma dublă (8) se pot reduce unii termeni asemenea; pentru $i \neq k$ avem

$$a_{ik}\xi_i\xi_k + a_{ki}\xi_k\xi_i = (a_{ik} + a_{ki})\xi_i\xi_k = b_{ik}\xi_i\xi_k,$$

unde

$$b_{ik} = a_{ik} + a_{ki}.$$

Pentru $i = k$ punem

$$b_{ii} = a_{ii}.$$

Atunci suma dublă se poate scrie cu mai puțini termeni

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i \leqslant k} b_{ik}\xi_i\xi_k.$$

De aici rezultă că două forme biliniare distincte

$$A(x, y) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\eta_k \quad \text{și} \quad C(x, y) = \sum_{i,\,k=1}^{n} c_{ik}\xi_i\eta_k$$

pot conduce, prin înlocuirea lui y cu x, la una și aceeași formă pătratică; este suficient, pentru aceasta, să aibă loc relațiile $a_{ik} + a_{ki} = c_{ik} + c_{ki}$ pentru orice i și k.

Așadar, în general, pentru o formă pătratică dată, pot exista mai multe forme biliniare generînd forma pătratică considerată. Există un caz important în care forma biliniară poate fi determinată cunoscînd forma pătratică asociată: anume, cazul cînd forma biliniară este simetrică. Într-adevăr, dacă $a_{ik} = a_{ki}$, atunci din relațiile $a_{ik} + a_{ki} = b_{ik}$ (pentru $i \neq k$) coeficienții a_{ik} sînt bine determinați

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{b_{ik}}{2} \tag{9}$$

și pentru $i = k$

$$a_{ii} = b_{ii},$$

și odată cu coeficienții a_{ik}, este bine determinată întreaga formă biliniară. Această afirmație poate fi demonstrată și fără a utiliza coordonate; anume, prin definiția unei forme biliniare, avem

$$A(x + y, x + y) = A(x, x) + A(x, y) + A(y, x) + A(y, y)$$

și în ipoteza de simetrie

$$A(x, y) = \frac{1}{2}[A(x,y) + A(y,x)] =$$

$$= \frac{1}{2}[A(x + y, x + y) - A(x, x) - A(y, y)];$$

așadar, valoarea unei forme biliniare $A(x, y)$ este bine determinată, pentru orice pereche de vectori x, y, cunoscînd valorile formei pătratice asociate ei pe vectorii x, y și $x + y$.

Pe de altă parte, pentru a obține din formele biliniare toate formele pătratice posibile, este suficient să ne restrîngem la forme biliniare simetrice. Într-adevăr, dacă $A(x, y)$ este o formă biliniară oarecare, atunci

$$A_1(x, y) = \frac{1}{2}[A(x, y) + A(y, x)]$$

este o formă biliniară simetrică și

$$A_1(x, x) = \frac{1}{2}[A(x, x) + A(x, x)] = A(x, x),$$

adică formele pătratice $A_1(x, x)$ și $A(x, x)$, definite de A_1 și A, coincid.

7.23. Conform acestor considerații, în utilizarea formelor biliniare pentru studiul formelor pătratice este suficient să ne mărginim la forme biliniare simetrice și la matrici simetrice corespunzătoare $||a_{jk}||$, $a_{jk} = a_{kj}$.

O matrice simetrică $A = ||a_{jk}||$ a unei forme biliniare simetrice $A(x, y)$ corespunzînd unei forme pătratice $A(x, x)$, se numește *matricea acelei forme pătratice.*

La schimbarea bazei, matricea A a unei forme pătratice $A(x, x)$ coincide cu matricea formei biliniare simetrice corespunzătoare $A(x, y)$ și se schimbă ca aceasta din urmă:

$$A_{(\mathbf{f})} = P' A_{(\mathbf{e})} P,$$

unde P este matricea de trecere de la baza $\{\mathbf{e}\}$ la baza $\{\mathbf{f}\}$. În particular, *rangul matricii unei forme pătratice nu depinde de alegerea bazei.* De aceea se poate vorbi despre rangul formei pătratice $A(x, x)$ subînțelegînd prin aceasta rangul matricii acestei forme în orice bază a spațiului $\mathcal{R}_n$. Orice formă pătratică de rang n, egal cu dimensiunea spațiului, se numește *nesingulară.*

§ 7.3. Reducerea unei forme pătratice la forma canonică

7.31. Fixăm o formă pătratică oarecare $A(x, x)$ într-un spațiu vectorial n-dimensional $\mathcal{R}_n$. Arătăm că *în spațiul* $\mathcal{R}_n$ *există o bază* $\{\mathbf{f}\} = \{f_1, ..., f_n\}$ *în care pentru orice vector* $x = \sum_{k=1}^{n} \eta_k f_k$ *valoarea formei pătratice* $A(x, x)$ *se calculează după formula*

$$A(x, x) = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + ... + \lambda_n \eta_n^2 \tag{10}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *sînt numere fixate.*

Orice bază care are această proprietate se va numi *bază canonică a formei* $A(x, x)$, iar expresia (10) *forma canonică a lui* $A(x, x)$; în particular, numerele $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ vor fi numite *coeficienți canonici ai formei* $A(x, x)$.

Fie $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază oarecare a spațiului $\mathfrak{R}_n$; dacă $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, atunci după cum se știe forma $A(x, x)$ se reprezintă astfel

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant k} b_{ik} \xi_i \xi_k. \tag{11}$$

Conform 5.32 afirmația făcută va fi demonstrată dacă se pot scrie formulele

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= p_{11}\xi_1 + p_{12}\xi_2 + \ldots + p_{1n}\xi_n, \\ \eta_2 &= p_{21}\xi_1 + p_{22}\xi_2 + \ldots + p_{2n}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n &= p_{n1}\xi_1 + p_{n2}\xi_2 + \ldots + p_{nn}\xi_n \end{aligned}\right\} \tag{11'}$$

cu matricea $P = \|p_{ik}\|$ nesingulară și astfel încît exprimînd coordonatele $\{\xi\}$ în formula (11) prin mărimile $\{\eta\}$, formula (11) se transformă în (10).

Vom face demonstrația prin inducție după numărul coordonatelor care intră efectiv în formula (11) (adică cu coeficienți diferiți de zero).

Presupunem că orice formă care conține $m-1$ coordonate (de exemplu, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{m-1}$) poate fi redusă la forma canonică (10) (cu $n = m-1$) printr-o transformare (11'), de asemenea pentru $n = m-1$. Dacă în formula (11) intră efectiv numai o coordonată, de exemplu ξ_1, adică formula (11) se scrie $A(x, x) = b_{11}\xi_1^2$, atunci această presupunere se îndeplinește evident (căci se poate lua $p_{11} \neq 0$ arbitrar).

Considerăm acum o formă (11), conținînd efectiv m coordonate $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$. Admitem mai întîi că printre numerele $b_{11}, b_{22}, ..., b_{mm}$ există un număr diferit de zero; presupunem de exemplu că $b_{mm} \neq 0$. Separăm în forma (11) grupul de termeni care conțin coordonata ξ_m; acest grup se scrie

$$b_{1m}\xi_1\xi_m + b_{2m}\xi_2\xi_m + \ldots + b_{m-1,\,m}\xi_{m-1}\xi_m + b_{mm}\xi_m^2 =$$

$$= b_{mm}\left(\frac{b_{1m}}{2b_{mm}}\xi_1 + \frac{b_{2m}}{2b_{mm}}\xi_2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{b_{m-1,\,m}}{2b_{mm}}\xi_{m-1} + \xi_m\right)^2 + A_1(x, x), \tag{12}$$

unde prin $A_1(x, x)$ se notează forma pătratică depinzînd numai de mărimile $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{m-1}$. Considerăm următoarea transformare de coordonate:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \xi_1, \\ \tau_2 &= \xi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau_{m-1} &= \xi_{m-1}, \\ \tau_m &= \frac{b_{1m}}{2b_{mm}}\xi_1 + \frac{b_{2m}}{2b_{mm}}\xi_2 + \ldots + \frac{b_{m-1,\,m}}{2b_{mm}}\xi_{m-1} + \xi_m. \end{aligned}$$

Matricea acestei transformări este nesingulară (determinantul ei fiind egal cu 1). În noile coordonate forma $A(x, x)$ se scrie în mod evident astfel

$$A(x, x) = B(x, x) + b_{mm}\tau_m^2,$$

unde forma pătratică $B(x, x)$ depinde numai de mărimile $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{m-1}$. În virtutea ipotezei de inducție există o nouă transformare

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= p_{11}\tau_1 + p_{12}\tau_2 + \ldots + p_{1,\,m-1}\tau_{m-1}, \\ \eta_2 &= p_{21}\tau_1 + p_{22}\tau_2 + \ldots + p_{2,\,m-1}\tau_{m-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{m-1} &= p_{m-1,1}\tau_1 + p_{m-1,2}\tau_2 + \ldots + p_{m-1,\,m-1}\tau_{m-1} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

cu matricea nesingulară $P = \|p_{ij}\|$ care reduce forma $B(x, x)$ la forma canonică

$$B(x, x) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_{m-1}\eta_{m-1}^2.$$

Dacă adăugăm la egalitățile (13) egalitatea $\eta_m = \tau_m$, atunci se obține o transformare nesingulară a coordonatelor $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m$ în coordonatele $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m$, după care forma $A(x, x)$ se scrie astfel

$$A(x, x) = B(x, x) + b_{mm}\tau_m^2 = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots +$$

$$+ \lambda_{m-1}\eta_{m-1}^2 + b_{mm}\eta_m^2.$$

Trecerea directă de la coordonatele $\{\xi\}$ la coordonatele $\{\eta\}$ se realizează conform 5.33 cu ajutorul matricii egală cu produsul matricilor de trecere de la coordonatele $\{\tau\}$ la coordonatele $\{\eta\}$ cu matricea de trecere de la coordonatele

$\{\xi\}$ la coordonatele $\{\tau\}$. Deoarece ambele aceste matrici sînt $m \times m$-matrici nesingulare, atunci și $m \times m$-matricea produs este de asemenea nesingulară.

Rămîne de considerat cazul cînd în forma $A(x, x)$ cu m coordonate $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ toate numerele $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ sînt egale cu zero. Considerăm unul din termenii $a_{ij}\xi_i\xi_j$ cu coeficientul a_{ij} diferit de zero; de exemplu, presupunem că $a_{12} \neq 0$. Efectuăm următoarea transformare de coordonate (pentru comoditate scriem trecerea de la noile coordonate la cele vechi):

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1' + \xi_2', \\ \xi_2 &= \xi_1' - \xi_2', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_j &= \xi_j' \ (j = 3, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Determinantul matricii transformării (14) este egal cu -2, deci această transformare este din nou nesingulară. Termenul $a_{12}\xi_1\xi_2$ se transformă în modul următor:

$$a_{12}\xi_1\xi_2 = a_{12}\xi_1'^2 - a_{12}\xi_2'^2;$$

de aceea în forma transformată apar din nou două pătrate ale coordonatelor cu coeficienți nenuli (este evident că aceste pătrate nu pot fi asemenea cu ceilalți termeni, deoarece aceștia conțin coordonate ξ_i' cu $i > 2$). Astfel, în coordonatele ξ_i' formei (11) i se poate aplica metoda inductivă anterioară.

Așadar, forma (11) cu orice număr $m \leqslant n$ de coordonate efective ξ_j, se reduce la forma (10) prin transformarea (11'), înlocuind n cu m. Adăugînd eventual egalitățile $\eta_{m+1} = \xi_{m+1}, \ldots, \eta_n = \xi_n$, putem completa sistemul (11') pînă la sistemul cerut din n ecuații cu matricea nesingulară $P = \|p_{ij}\|$, $i, j = 1, \ldots, n$ și demonstrația se încheie.

Ideea demonstrației — separarea succesivă de pătrate — poate fi aplicată și pentru reducerea efectivă a unei forme pătratice dată la forma canonică. În § 7.5 va fi descrisă o altă metodă care permite în mod direct să se obțină vectorii bazei canonice căutate și forma canonică respectivă.

7.32. *Exemplu.* Reducem la forma canonică următoarea formă pătratică

$$A(x, x) = \xi_1^2 + 6\xi_1\xi_2 + 5\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_3 - 12\xi_2\xi_3 + 4\xi_3^2 - 4\xi_2\xi_4 - 8\xi_3\xi_4 - \xi_4^2.$$

Completăm grupul termenilor care conțin ξ_1 pînă la un pătrat perfect și notăm

$$\eta_1 = \xi_1 + 3\xi_2 - 2\xi_3.$$

Atunci forma se scrie astfel

$$A(x, x) = \eta_1^2 - 4\xi_2^2 - 4\xi_2\xi_4 - 8\xi_3\xi_4 - \xi_4^2.$$

Apoi completăm grupul termenilor care conțin ξ_2 pînă la un pătrat perfect și punînd

$$\eta_2 = 2\xi_2 + \xi_4,$$

se obține

$$A(x, x) = \eta_1^2 - \eta_2^2 - 8\xi_3\xi_4.$$

Pătratele coordonatelor ξ_3 și ξ_4 lipsesc și de aceea notăm $\xi_3 = \eta_3 - \eta_4$, $\xi_4 = \eta_3 + \eta_4$, deci $\xi_3\xi_4 = \eta_3^2 - \eta_4^2$.

În acest mod, forma pătratică $A(x, x)$ este redusă la forma canonică

$$A(x, x) = \eta_1^2 - \eta_2^2 - 8\eta_3^2 + 8\eta_4^2$$

prin transformarea

$$\eta_1 = \xi_1 + 3\xi_2 - 2\xi_3, \quad \eta_2 = 2\xi_2 + \xi_4, \quad \eta_3 = \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_4,$$

$$\eta_4 = -\frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_4,$$

care, după cum reiese din construcție, este nedegenerată (nesingulară).

7.33 a. Nici baza canonică, nici forma canonică a unei forme pătratice nu sînt unic determinate. De exemplu, orice permutare de vectori ai bazei canonice conduce la o altă bază canonică. În § 7.5 vom arăta între altele că pentru o formă pătratică dată se poate construi o bază canonică luînd primul vector al acestei baze în mod arbitrar (cu unele excepții). Apoi dacă forma $A(x, x)$ este scrisă canonic

$$A(x, x) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_n\eta_n^2$$

($\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ fiind coordonatele vectorului x), atunci transformarea coordonatelor

$$\eta_1 = \alpha_1\tau_1, \quad \eta_2 = \alpha_2\tau_2, \ldots, \eta_n = \alpha_n\tau_n$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ fiind numere fixate, toate nenule, iar $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ noile coordonate) reduce forma $A(x, x)$ la o nouă formă, de asemenea canonică, dar cu alți coeficienți

$$A(x, x) = (\lambda_1\alpha_1^2)\tau_1^2 + (\lambda_2\alpha_2^2)\tau_2^2 + \ldots + (\lambda_n\alpha_n^2)\tau_n^2.$$

De aceea se pune problema descrierii tuturor formelor canonice care pot fi reduse la o formă pătratică dată. Această

problemă va fi precizată restrîngînd definiția formei canonice (de exemplu, așa cum se va face în spațiile reale, conform 7.93) sau restrîngînd clasa transformărilor admisibile de coordonate (așa cum va fi făcut în spațiile euclidiene, conform 10.12).

b. Notăm că în exemplul dat numărul coeficienților diferiți de zero a rămas neschimbat.

În general, numărul coeficienților canonici nenuli este evident egal cu rangul matricii formei pătratice în baza canonică corespunzătoare. Deoarece rangul matricii unei forme pătratice nu depinde de alegerea bazei (7.23), *numărul coeficienților canonici nenuli ai unei forme pătratice nu depinde de alegerea bazei canonice.* Acest număr coincide evident cu *rangul formei pătratice* (7.23). Cunoscînd matricea unei forme pătratice $A(x, x)$ într-o bază $\{e\}$, putem prevedea numărul coeficienților canonici nenuli ai acelei forme; acest număr este chiar rangul formei $A(x, x)$, care se poate calcula ca rangul matricii formei $A(x, x)$ în baza $\{e\}$. În particular, pentru o formă pătratică nedegenerată (nesingulară) în orice bază canonică (7.23) toți coeficienții ei canonici sînt diferiți de zero.

§ 7.4. Bază canonică a unei forme biliniare

7.41 a. Un vector x_1 se numește *conjugat* cu vectorul y_1 relativ la o formă biliniară $A(x, y)$ dacă $A(x_1, y_1) = 0$.

b. Fie $\|a_{jk}\|$ matricea formei $A(x, y)$ într-o bază $e_1, \ldots, e_n$. Dacă $x_1 = \sum \xi_k e_k$, $y_1 = \sum \eta_j e_j$, atunci condiția de conjugare a vectorilor x_1 și y_1 se scrie

$$A(x_1, y_1) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \xi_j \eta_k = 0.$$

c. *Dacă vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt conjugați cu vectorul y_1, atunci orice vector al subspațiului $\mathfrak{L}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — acoperirea liniară a vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_k$, este de asemenea conjugat cu y_1.*

Într-adevăr, conform proprietăților unei forme biliniare,

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k, y_1) =$$
$$= \alpha_1 A(x_1, y_1) + \alpha_2 A(x_2, y_1) + \ldots \alpha_k A(x_k, y_1) = 0.$$

Dacă un vector y_1 este conjugat cu orice vector al unui subspațiu $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$, atunci vom numi acest vector *conjugat subspațiului $\mathfrak{K}'$.*

d. Mulțimea $\mathfrak{K}''$ a tuturor vectorilor $y_1 \in \mathfrak{K}$ conjugați subspațiului $\mathfrak{K}'$ este evident un subspațiu al lui $\mathfrak{K}$. Acest subspațiu $\mathfrak{K}''$ va fi numit *conjugatul* lui $\mathfrak{K}'$.

7.42. O bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a spațiului $\mathfrak{K}$ se numește *bază canonică pentru forma biliniară* $A(x, y)$ dacă vectorii bazei sînt conjugați doi cîte doi: $A(e_i, e_k) = 0$ pentru $i \neq k$.

Exemplu. În spațiul $\mathfrak{V}_3$ considerăm produsul scalar al vectorilor x, y ca formă biliniară $A(x, y)$. Conjugarea vectorilor relativ la această formă biliniară revine la ortogonalitatea lor. Prin bază canonică în acest caz se înțelege orice bază ortogonală a spațiului $\mathfrak{V}_3$.

7.43. Matricea unei forme biliniare într-o bază canonică are forma diagonală, deoarece $a_{ik} = A(e_i, e_k) = 0$ pentru $i \neq k$. O matrice diagonală coincide cu transpusa ei, de aceea orice formă biliniară avînd bază canonică trebuie să fie simetrică (conform 7.14 simetria sau nesimetria unei forme biliniare nu depind de alegerea bazei). Arătăm că *orice formă biliniară simetrică* $A(x, y)$ *admite bază canonică.*

Considerăm forma pătratică $A(x, x)$ corespunzătoare unei forme biliniare $A(x, y)$. Știm că în spațiul $\mathfrak{K}$ există o bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$ relativ la care forma pătratică $A(x, x)$ se scrie sub formă canonică

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2.$$

Forma biliniară simetrică corespunzătoare $A(x, y)$ are conform formulei (9) forma canonică

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \eta_i, \qquad (15)$$

$\left(\text{unde } y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i\right)$; matricea ei este așadar diagonală. Dar aceasta înseamnă că baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$ este canonică pentru forma $A(x, y)$.

7.44. În geometria analitică se demonstrează că locul geometric al mijloacelor coardelor unei curbe de gradul doi, paralele cu un vector dat, este o dreaptă. Dăm o demonstra-

ție a acestui fapt. În planul coordonatelor x_1, x_2 ecuația unei curbe de gradul doi are forma

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0,$$

sau

$$\mathrm{A}(x, x) + L(x) + c = 0,$$

unde

$$\mathrm{A}(x, x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

este o formă pătratică, iar

$$L(x) = b_1x_1 + b_2x_2$$

o formă liniară de vectorul $x = (x_1, x_2)$.

Fie x vectorul care definește mijlocul coardei paralele cu un vector fixat e. Aceasta înseamnă că există $t \neq 0$ astfel încît să aibă loc relațiile

$$\begin{gathered}\mathrm{A}(x + te, x + te) + L(x + te) + c = 0,\\ \mathrm{A}(x - te, x - te) + L(x - te) + c = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Fie $\mathrm{A}(x, y)$ forma biliniară simetrică corespunzînd formei pătratice $\mathrm{A}(x, x)$; atunci egalitățile (16) se scriu astfel:

$$\mathrm{A}(x, x) + 2t\,\mathrm{A}(x, e) + t^2\,\mathrm{A}(e, e) + L(x) + tL(e) + c = 0,$$

$$\mathrm{A}(x, x) - 2t\,\mathrm{A}(x, e) + t^2\,\mathrm{A}(e, e) + L(x) - tL(e) + c = 0.$$

Prin scădere și apoi împărțire cu $2t$, rezultă

$$2\,\mathrm{A}(x, e) + L(e) = 0, \tag{17}$$

Ecuația obținută este liniară relativ la x, deci definește o dreaptă în planul (x_1, x_2), ceea ce demonstrează teorema. Dacă x' este un alt punct al acestei drepte astfel încît

$$2\,\mathrm{A}(x', e) + L(e) = 0, \tag{18}$$

atunci scăzînd (17) din (18) se obține

$$\mathrm{A}(x - x', e) = 0,$$

adică vectorul e și vectorul $x - x'$ care determină direcția dreptei obținute sînt conjugate în sensul 7.41 relativ la forma biliniară $\mathrm{A}(x, y)$.

7.45. Fie $e_1, \ldots, e_k$ baza canonică a formei $\mathrm{A}(x, y)$ într-un subspațiu k-dimensional $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$. Fie $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ coeficienții canonici corespunzători. Exprimăm numerele $\mathrm{A}(x, e_i)$ prin coordonatele vectorului $x \in \mathfrak{K}'$. Avem

$$\mathrm{A}(x, e_{\Delta i}) = \mathrm{A}\left(\sum_{j=1}^{k} \xi_j e_j,\ e_i\right) = \sum_{j=1}^{k} \xi_j\,\mathrm{A}(e_j, e_i) =$$

$$= \xi_i\,\mathrm{A}(e_i, e_i) = \varepsilon_i\xi_i,$$

astfel că numerele $\mathrm{A}(x, e_i)$ determină în mod univoc coordonatele vectorului x. Dacă forma $\mathrm{A}(x, y)$ este nesingulară în subspațiul $\mathfrak{K}'$, atunci numerele ε_i sînt diferite de zero; în acest caz, are loc și afirmația inversă, anume valorile formei $\mathrm{A}(x, e_i)$ determină univoc coordonatele vectorului x.

§ 7.5. Construirea unei baze canonice prin metoda Jacobi

7.51. Metoda de construire a unei baze canonice din 7.31 prezintă inconvenientul că nu oferă posibilitatea exprimării directe, în funcție de elementele matricii $A_{(f)}$ a unei forme biliniare simetrice $\mathrm{A}(x, y)$ într-o bază dată $\{\mathbf{f}\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, a coeficienților λ_i și coordonatelor vectorilor bazei canonice. Metoda Jacobi expusă mai jos ne permite să determinăm acești coeficienți și coordonatele vectorilor bazei canonice căutate. Pentru aceasta impunem matricii $A_{(f)}$ următoarea condiție suplimentară: toți minorii din colțurile din stînga sus ai matricii $A_{(f)}$ pînă la ordinul $n-1$ inclusiv.

$$\delta_1 = a_{11},\ \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots,\ \delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,\,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix}$$

să fie diferiți de zero.

7.52. Vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$ sînt construiți după formulele

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= f_1,\\
e_2 &= \alpha_1^{(1)} f_1 + f_2,\\
e_3 &= \alpha_{11}^{(2)} f_1 + \alpha_2^{(2)} f_2 + f_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
e_{k+1} &= \alpha_1^{(k)} f_1 + \alpha_2^{(k)} f_2 + \alpha_3^{(k)} f_3 + \ldots + \alpha_k^{(k)} f_k + f_{k+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
e_n &= \alpha_1^{(n-1)} f_1 + \alpha_2^{(n-1)} f_2 + \alpha_3^{(n-1)} f_3 + \ldots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} f_{n-1} + f_n,
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

unde coeficienții $\alpha_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, ..., k;\ k = 1, 2, ..., n-1)$ sînt deocamdată nedeterminați.

Observăm mai întîi că trecerea de la vectorii $f_1, f_2, ..., f_k$ la vectorii $e_1, e_2, ..., e_k$ se efectuează cu ajutorul matricii

$$\begin{Vmatrix}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
\alpha_1^{(1)} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\alpha_1^{(k-1)} & \alpha_2^{(k-1)} & \alpha_3^{(k-1)} & \ldots & \alpha_{k-1}^{(k-1)} & 1
\end{Vmatrix}$$

avînd determinantul egal cu 1; de aceea pentru $k = 1, 2, ..., n$ vectorii $f_1, f_2, ..., f_k$ pot fi exprimați liniar prin $e_1, e_2, ..., e_k$ și prin urmare acoperirea liniară $\mathfrak{L}(f_1, f_2, ..., f_k)$ coincide cu acoperirea liniară $\mathfrak{L}(e_1, e_2, ..., e_k)$.

Impunem coeficienților $\alpha_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, ..., k)$ condiția ca vectorul e_{k+1} să fie conjugat subspațiului $\mathfrak{L}(e_1, e_2, ..., e_k)$. Pentru aceasta *este necesar și suficient* să aibă loc egalitățile

$$A(e_{k+1}, f_1) = 0,\ A(e_{k+1}, f_2) = 0,\ ...,\ A(e_{k+1}, f_k) = 0. \quad (20)$$

Într-adevăr, din condițiile (20) rezultă că vectorul e_{k+1} este conjugat cu acoperirea liniară a vectorilor $f_1, f_2, ..., f_k$ care coincide conform celor arătate cu acoperirea liniară a vectorilor $e_1, e_2, ..., e_k$. Invers, dacă vectorul e_{k+1} este conjugat subspațiului $\mathfrak{L}(e_1, e_2, ..., e_k)$, atunci el este conjugat fiecărui vector al acestui subspațiu și în particular cu vectorii $f_1, f_2, ..., f_k$; de aceea se îndeplinesc egalitățile (20).

Înlocuind în (20) expresia (19) a lui e_{k+1} și folosind definiția formei biliniare, se obține sistemul liniar de ecuații relativ la mărimile $\alpha_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, ..., k)$:

$$\begin{aligned}
A(e_{k+1}, f_1) &= \alpha_1^{(k)} A(f_1, f_1) + \alpha_2^{(k)} A(f_2, f_1) + \ldots +\\
&+ \alpha_k^{(k)} A(f_k, f_1) + A(f_{k+1}, f_1) = 0,\\
A(e_{k+1}, f_2) &= \alpha_1^{(k)} A(f_1, f_2) + \alpha_2^{(k)} A(f_2, f_2) + \ldots +\\
&+ \alpha_k^{(k)} A(f_k, f_2) + A(f_{k+1}, f_2) = 0, \quad (21)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A(e_{k+1}, f_k) &= \alpha_1^{(k)} A(f_1, f_k) + \alpha_2^{(k)} A(f_2, f_k) + \ldots +\\
&+ \alpha_k^{(k)} A(f_k, f_k) + A(f_{k+1}, f_k) = 0.
\end{aligned}$$

Acest sistem neomogen de ecuații cu coeficienții $A(f_i, f_j) = a_{ij}$ $(i, j = 1, 2, ..., k)$ are prin ipoteză determinantul diferit de zero și prin urmare este compatibil și determinat; așadar, se pot determina mărimile $\alpha_i^{(k)}$ și totodată se poate construi vectorul căutat e_{k+1}.

Pentru determinarea tuturor coeficienților $\alpha_i^{(k)}$ și a tuturor vectorilor e_k este necesar ca pentru fiecare k să fie rezolvat sistemul corespunzător (21), adică un sistem de $n-1$ ecuații liniare.

7.53. Notăm coordonatele vectorului x în baza construită $e_1, e_2, ..., e_n$ prin $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ și coordonatele lui y în aceeași bază prin $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$. Forma biliniară $A(x, y)$ se scrie în această bază

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \eta_i. \quad (22)$$

Pentru a calcula coeficienții λ_i vom raționa în modul următor. Considerăm forma biliniară $A(x, y)$ restrînsă la subspațiul $\mathfrak{L}_m = \mathfrak{L}(e_1, e_2, ..., e_m)$, unde $m \leqslant n$. Forma $A(x, y)$ admite relativ la baza $f_1, f_2, ..., f_m$ a subspațiului $\mathfrak{L}_m$, matricea

$$\begin{Vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm}
\end{Vmatrix},$$

iar în baza $e_1, e_2, \ldots, e_m$, matricea

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{Vmatrix}.$$

Matricea de trecere de la baza $f_1, f_2, \ldots, f_m$ la baza $e_1, e_2, \ldots, e_m$, corespunzînd formulelor de trecere (19) are determinantul egal cu 1. În virtutea formulei 7.15 (6) trebuie să avem

$$\det \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{Vmatrix},$$

sau utilizînd notațiile 7.51 pentru minorii din colțul din stînga sus

$$\delta_m = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Din formulele (23) rezultă direct că

$$\lambda_1 = \delta_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad \lambda_3 = \frac{\delta_3}{\delta_2}, \ldots, \lambda_n = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}. \tag{24}$$

Formulele (24) permit determinarea coeficienților unei forme biliniare într-o bază canonică, fără a calcula baza însăși.

7.54. Considerăm cea de a k-a formulă din sistemul (19), pe care o scriem astfel:

$$f_{k+1} = -\alpha_1^{(k)} f_1 - \ldots - \alpha_k^{(k)} f_k + e_{k+1} = g_k + e_{k+1}.$$

În această formulă vectorul g_k aparține subspațiului $\mathfrak{L}(f_1, \ldots, f_k)$ iar e_{k+1} este conjugat acestui subspațiu. Coeficienții $\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}$ se determină unic din sistemul (21) în ipoteza că $\det \| A(f_i, f_j) \| \neq 0$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ sau, echivalent, că forma $A(x, y)$ este nesingulară pe subspațiul $\mathfrak{L}(f_1, \ldots, f_k)$. Deoarece vectorul f_{k+1} a fost ales arbitrar, atunci notînd $f = f_{k+1}$, $g = g_k$, $h = e_{k+1}$, $\mathfrak{L}(f_1, \ldots, f_k) = \mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$, am demonstrat de fapt următoarea teoremă.

TEOREMĂ. *Dacă un vector f nu aparține unui subspațiu $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ pe care forma $A(x, y)$ este nesingulară, atunci există o descompunere unică*

$$f = g + h, \tag{25}$$

unde $g \in \mathfrak{K}'$ iar h este conjugat spațiului $\mathfrak{K}'$.

7.55. Notăm prin $\mathfrak{K}''$ subspațiul conjugat subspațiului $\mathfrak{K}'$ relativ la forma $A(x, y)$.

Descompunerea unică de tipul (25) arată că întreg spațiul $\mathfrak{K}$ este suma directă a subspațiilor $\mathfrak{K}'$ și $\mathfrak{K}''$ (2.45). Așadar avînd un subspațiu $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ pe care forma $A(x, y)$, definită pe întreg spațiul $\mathfrak{K}$, este nesingulară, are loc o descompunere directă $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$, unde subspațiul $\mathfrak{K}''$ este conjugat cu $\mathfrak{K}'$ relativ la forma $A(x, y)$.

7.6. Operatori liniari adjuncți (conjugați)

7.61. Fixăm în spațiul $\mathfrak{K}_n$ o formă biliniară simetrică nesingulară pe care o vom nota în acest paragraf prin (x, y). Fie $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ operatori liniari acționînd în spațiul $\mathfrak{K}_n$. Considerăm funcțiile $A(x, y)$ și $B(x, y)$ de două variabile x, y prin formulele.

$$A(x, y) = (\mathcal{A}x, y), \quad B(x, y) = (x, \mathcal{B}y).$$

Arătăm că funcțiile obținute $A(x, y)$ și $B(x, y)$ sînt forme biliniare. Într-adevăr, pe baza definiției unui operator liniar (4.21) și a unei forme biliniare (7.11) au loc egalitățile

$$A(x_1 + x_2, y) = (\mathcal{A}(x_1 + x_2), y) = (\mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2, y) =$$

$$= (\mathcal{A}x_1, y) + (\mathcal{A}x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y),$$

$$A(\alpha x, y) = (\mathcal{A}(\alpha x), y) = (\alpha \mathcal{A}(x, y) = \alpha(\mathcal{A}x, y) = \alpha A(x, y),$$

care arată că $A(x, y)$ este funcție liniară în primul argument. Liniaritatea ei în argumentul al doilea rezultă din faptul că funcția (x, y) este liniară în y. Astfel, $A(x, y)$ este o formă biliniară. În mod analog, $B(x, y)$ este o formă biliniară. Fie $e_1, \ldots, e_n$ baza canonică pentru forma (x, y):

$$(e_j, e_k) = 0 \text{ pentru } j \neq k, (e_m, e_m) = \varepsilon_m \in K, \varepsilon_m \neq 0.$$

Comparăm în această bază matricea operatorului $\mathcal{A}$ și matricea formei $A(x, y)$. Matricea $\|a_k^{(j)}\|$ a operatorului $\mathcal{A}$ este definită prin formulele

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(j)} e_k, \qquad j = 1, \ldots, n$$

(aici indicele superior arată numărul liniei, iar cel inferior numărul coloanei). Matricea $\|a_{jk}\|$ a formei $A(x, y)$ (primul indice arată numărul liniei, iar cel de al doilea — numărul coloanei) se definește din formulele

$$a_{jm} = A(e_j, e_m) = (\mathcal{A}e_j, e_m) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{(j)} e_k, e_m\right) =$$

$$= a_m^{(j)}(e_m, e_m) = \varepsilon_m a_m^{(j)}. \tag{26}$$

Așadar, cea de a m-a coloană a matricii $\|a_{jm}\|$ se obține prin înmulțirea coloanei m a matricii $\|a_m^{(j)}\|$, pentru fiecare $m = 1, \ldots, n$ cu coeficientul canonic ε_m al formei (x, y). Pentru matricea $\|b_k^{(j)}\|$ a operatorului $\mathcal{B}$ (în aceeași bază $e_1, \ldots, e_n$) și pentru matricea $\|b_{jk}\|$ a formei $B(x, y)$ rezultă în mod similar

$$b_{jm} = B(e_j, e_m) = (e_j, \mathcal{B}e_m) = \left(e_j, \sum_{k=1}^{n} b_k^{(m)} e_k\right) =$$

$$= b_j^{(m)}(e_j, e_j) = \varepsilon_j b_j^{(m)}, \tag{27}$$

adică linia j a matricei $\|b_{jm}\|$ se obține prin înmulțirea coloanei j a matricii operatorului $\mathcal{B}$ pentru fiecare $j = 1, \ldots, n$, cu coeficientul canonic corespunzător ε_j.

7.62. Invers, presupunem că în spațiul $\mathfrak{R}_n$ sînt date formele biliniare $A(x, y)$ și $B(x, y)$; afirmăm că există operatori liniari $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ astfel încît

$$A(x, y) = (\mathcal{A}x, y), \quad B(x, y) = (x, \mathcal{B}y),$$

unic determinați cu această proprietate.

Pentru demonstrație, considerăm operatorii $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ care într-o bază oarecare $e_1, \ldots, e_n$ au matricile formate din numerele

$$a_j^{(m)} = \frac{1}{\varepsilon_m} A(e_j, e_m), \quad b_j^{(m)} = \frac{1}{\varepsilon_j} B(e_j, e_m).$$

Pentru acești operatori construim formele biliniare $A_1(x, y) = (\mathcal{A}x, y)$ și $B_1(x, y) = (x, \mathcal{B}y)$. Conform celor probate, în baza $e_1, \ldots, e_n$ matricea formei $A_1(x, y)$ coincide cu matricea formei $A(x, y)$ iar matricea formei $B_1(x, y)$ coincide cu matricea formei $B(x, y)$. Dar atunci pentru orice x, y din $\mathfrak{R}_n$

$$(\mathcal{A}x, y) = A_1(x, y) = A(x, y), \quad (x, \mathcal{B}y) = B_1(x, y)\ B(x, y),$$

astfel că operatorii $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ satisfac condițiile necesare. Pentru demonstrarea unicității, este suficient să arătăm că dacă un anumit operator $\mathcal{A}$ satisface condiția

$$(\mathcal{A}x, y) = 0 \text{ (pentru orice } x, y \text{ din } \mathfrak{R}_n), \tag{28}$$

atunci

$$\mathcal{A}x = 0 \tag{29}$$

pentru orice $x \in \mathfrak{R}_n$, adică $\mathcal{A}$ este operatorul nul. Dacă ar exista $x_0 \in \mathfrak{R}_n$ astfel încît $\mathcal{A}x_0 \neq 0$, atunci cum forma (x, y) este nesingulară, ar exista (conform 7.15 c) un vector $y_0 \in \mathfrak{R}_n$ astfel încît $(\mathcal{A}x_0, y_0) \neq 0$; aceasta contravine relației (28), de unde rezultă unicitatea afirmată.

7.63. Stabilim acum următoarea teoremă importantă.

TEOREMĂ. *Dacă într-un spațiu $\mathfrak{R}_n$ este dată o formă biliniară simetrică nesingulară (x, y), atunci pentru orice operator liniar $\mathcal{A}$ există și este unic un operator liniar $\mathcal{A}'$ satisfăcînd egalitatea*

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}'y)$$

pentru orice x și y din $\mathfrak{R}_n$. Matricea operatorului $\mathcal{A}'$ în orice bază canonică a formei (x, y) se obține din matricea operatorului $\mathcal{A}$ prin transpunere, înmulțirea liniei m cu ε_m și împărțirea coloanei j cu ε_j $(j, m = 1, \ldots, n)$.

Demonstrație. Pentru operatorul $\mathcal{A}$ dat construim forma $A(x, y) = (\mathcal{A}x, y)$ și apoi definim operatorul $\mathcal{A}'$ prin egalitățile

$$(\mathcal{A}x, y) = A(x, y) = (x, \mathcal{A}'y).$$

Existența și unicitatea operatorului $\mathcal{A}$, rezultă din 7.62. Matricea $\|a_m^{(j)}\|$ a operatorului $\mathcal{A}$, matricea $\|a_{jm}\|$ a formei

$A(x, y)$ și matricea $\|a_j'^{(m)}\|$ a operatorului $\mathcal{A}'$ sînt legate, în orice bază canonică a formei (x, y), prin formulele (26)—(27)

$$a_m^{(j)} = \frac{a_{jm}}{\varepsilon_m}, \quad a_j'^{(m)} = \frac{a_{jm}}{\varepsilon_j},$$

de unde

$$a_j'^{(m)} = \frac{a_{jm}}{\varepsilon_j} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_j} a_m'^{(j)}, \tag{30}$$

și teorema este complet demonstrată.

Operatorul $\mathcal{A}'$ se numește *adjunct (sau conjugat) al operatorului $\mathcal{A}$ relativ la forma (x, y)*.

7.64. Operația de trecere la operatorul adjunct $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ are următoarele proprietăți:

a) $(\mathcal{A}')' = \mathcal{A}$ pentru orice operator $\mathcal{A}$;

b) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$ pentru orice $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$;

c) $(\lambda\mathcal{A})' = \lambda\mathcal{A}'$ pentru orice operator $\mathcal{A}$ și pentru orice $\lambda \in K$;

d) $(\mathcal{A}\mathcal{B})' = \mathcal{B}'\mathcal{A}'$ pentru orice $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$.

Egalitatea a) rezultă din definiția lui $(\mathcal{A}')'$:

$$(x, (\mathcal{A}')'y) = (\mathcal{A}'x, y) = (x, \mathcal{A}y)$$

și din unicitatea operatorului definit printr-o formă biliniară (7.62). În mod analog se obțin și celelalte afirmații; astfel, b) rezultă din relațiile

$$(x, (\mathcal{A} + \mathcal{B})'y) = ((\mathcal{A} + \mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}x, y) + (\mathcal{B}x, y) =$$
$$= (x, \mathcal{A}'y) + (x, \mathcal{B}'y) = (x, (\mathcal{A}' + \mathcal{B}')y);$$

c) rezultă din relațiile

$$(x, (\lambda\mathcal{A})'y) = (\lambda\mathcal{A}x, y) = \lambda(\mathcal{A}x, y) = \lambda(x, \mathcal{A}'y) =$$
$$= (x, \lambda\mathcal{A}'y),$$

și, în sfîrșit, d) rezultă din relațiile

$$(x, (\mathcal{A}\mathcal{B})'y) = (\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}'y) = (x, \mathcal{B}'\mathcal{A}'y).$$

7.65. Notăm încă o legătură între operatorii $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}'$. Fie un subspațiu $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}_n$ invariant relativ la operatorul $\mathcal{A}$; aceasta înseamnă (4.81) că fiecare vector $x \in \mathcal{K}'$ este transformat prin operatorul $\mathcal{A}$ într-un vector din același subspațiu $\mathcal{K}'$.

Fie $\mathcal{K}''$ subspațiul conjugat lui $\mathcal{K}'$ (7.41 **d**). Arătăm că operatorul $\mathcal{A}'$ este invariant relativ la subspațiul $\mathcal{K}''$. Fie $y \in \mathcal{K}''$ astfel încît $(y, x) = 0$ pentru orice $x \in \mathcal{K}'$. Avem $(\mathcal{A}'y, x) = (y, \mathcal{A}x) = 0$, deoarece $\mathcal{A}x$ (ca și x) aparțin lui $\mathcal{K}'$; dar aceasta înseamnă că vectorul $\mathcal{A}'y$ este conjugat tuturor vectorilor $x \in \mathcal{K}'$ și deci aparține lui $\mathcal{K}''$, ceea ce trebuia dovedit.

§ 7.7. Izomorfism între spații cu formă biliniară fixată

7.71. *Definiție.* Două spații vectoriale $\mathcal{K}'$ și $\mathcal{K}''$ peste același corp de numere K avînd respectiv forme biliniare simetrice fixate $A(x', y')$ și $A(x'', y'')$ se numesc A-*izomorfisme* dacă ele sînt izomorfe ca spații vectoriale peste K (2. 71), adică există un morfism bijectiv $\omega x' = x''$ păstrînd operațiile liniare și, în plus, pentru orice perechi corespunzătoare de elemente $\omega x' = x''$, $\omega y' = y''$ valorile formelor $A(x', y')$ și $A(x'', y'')$ coincid:

$$A(\omega x', \omega y') = A(x', y').$$

7.72. Are loc următoarea teoremă:

TEOREMĂ. *Spațiile vectoriale finit-dimensionale $\mathcal{K}'$ și $\mathcal{K}''$ înzestrate cu forme $A(x', y')$ și $A(x'', y'')$ sînt A-izomorfe dacă și numai dacă $\mathcal{K}'$ și $\mathcal{K}''$ au aceeași dimensiune (notată n) și în $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$ există baze canonice ale formelor $A(x', y')$ și $A(x'', y'')$ cu un același sistem de coeficienți canonici $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.*

Demonstrație. Presupunem că spațiile $\mathcal{K}'$ și $\mathcal{K}''$ înzestrate cu formele $A(x', y')$ și $A(x'', y'')$ sînt A-izomorfe. Atunci ele sînt izomorfe ca spații vectoriale și prin urmare au aceeași dimensiune (2.71). Alegem o bază canonică oarecare $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a formei $A(x', y')$ în spațiul $\mathcal{K}'$. Avem

$$A(e_i', e_j') = \begin{cases} 0 \text{ pentru } i \neq j, \\ \varepsilon_i \text{ pentru } i = j. \end{cases}$$

Fie $e_1'', \ldots, e_n''$ vectorii din $\mathcal{K}''$ care corespund vectorilor $e_1', \ldots, e_n'$ din $\mathcal{K}'$ prin A-izomorfismul considerat. Așadar,

$$A(e_i'', e_j'') = \begin{cases} 0 \text{ dacă } i \neq j, \\ \varepsilon_i \text{ dacă } i = j. \end{cases}$$

Rezultă că pentru forma $A(x'', y'')$ există o bază canonică în spațiul $\mathcal{K}''$ cu același sistem de coeficienți canonici $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$

ca ai formei $A(x', y')$. Cu aceasta, prima parte a teoremei este demonstrată.

Pentru demonstrarea afirmației inverse, considerăm baze canonice $e'_1, .., e'_n$ (în $\mathcal{H}'$) și $e''_1, ..., e''_n$ (în $\mathcal{H}''$) cu aceeași coeficienți canonici, astfel încît

$$A(e'_i, e'_j) = A(e''_i, e''_j) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } i \neq j, \\ \varepsilon_i \text{ pentru } i = j. \end{cases}$$

Pentru orice $x' = \sum \xi_j e'_j \in \mathcal{H}'$ punem

$$x'' = \omega(x') = \sum \xi_j e''_j \in \mathcal{H}''$$

cu aceleași coordonate ξ_j. O astfel de corespondență definește un izomorfism între spațiile $\mathcal{H}'$ și $\mathcal{H}''$ (2.74). Pe de altă parte, pentru $y' = \sum \eta_k e'_k$, $y'' = \omega(y') = \sum \eta_k e''_k$

$$A(x', x'') = \sum \varepsilon_i \xi_k \eta_k = A(y', y''),$$

deci izomorfismul ω este un A-izomorfism. Teorema este demonstrată.

7.73. Presupunem că în spațiul n-dimensional $\mathcal{H}_n$ este fixată o formă biliniară nedegenerată $A(x, y)$. Considerăm un A-*izomorfism al spațiului* $\mathcal{H}_n$, adică o aplicație liniară inversabilă $\mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$, $x \to \mathcal{Q}x$, care invariază forma $A(x, y)$:

$$A(\mathcal{Q}x, \mathcal{Q}y) = A(x, y). \tag{31}$$

Vom nota forma $A(x, y)$ pe scurt prin (x, y).

Notînd prin $\mathcal{Q}'$ operatorul adjunct operatorului $\mathcal{Q}$ relativ la forma (x, y) (7.63), rezultă

$$(\mathcal{Q}x, \mathcal{Q}y) = (\mathcal{Q}'\mathcal{Q}x, y). \tag{32}$$

Deoarece operatorul $\mathcal{Q}'$ este nesingular ca și $\mathcal{Q}$, atunci din relația (32) rezultă că

$$\mathcal{Q}'\mathcal{Q} = \mathcal{E}, \tag{33}$$

adică $\mathcal{Q}'$ este operator invers al lui $\mathcal{Q}$.

Invers, din (33) rezultă (32) și apoi (31), deci relația (33) definește în mod complet clasa operatorilor care lasă neschimbată forma (x, y). Acești operatori se numesc *invarianți relativ la forma* (x, y).

7.74. Odată cu operatorul $\mathcal{Q}$ operatorul invers $\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}'$ este de asemenea invariant, deoarece pentru orice x și y,

$$(\mathcal{Q}'x, \mathcal{Q}'y) = (\mathcal{Q}\mathcal{Q}'x, y) = (x, y).$$

Produsul a doi operatori invarianți $\mathcal{Q}$ și $\mathcal{T}$ este de asemenea invariant, deoarece pentru orice x și y

$$(\mathcal{Q}\mathcal{T}x, \mathcal{Q}\mathcal{T}y) = (\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) = (x, y).$$

7.75. Aplicînd un operator invariant $\mathcal{Q}$ vectorilor $e_1, ..., e_n$ ai bazei canonice a unei forme (x, y) cu coeficienți $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$, se obțin vectorii

$$f_1 = \mathcal{Q}e_1, ..., f_n = \mathcal{Q}e_n. \tag{34}$$

Atunci

$$(f_j, f_k) = (\mathcal{Q}e_j, \mathcal{Q}e_k) = (e_j, e_k) = \begin{cases} \varepsilon_j \text{ pentru } k = j, \\ 0 \text{ pentru } k \neq j. \end{cases}$$

Astfel, $f_1, ..., f_n$ *formează de asemenea o bază canonică a formei* (x, y) *cu aceeași coeficienți* $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$.

Invers, dacă $f_1, ..., f_n$ este baza canonică a formei (x, y) cu aceeași coeficienți canonici $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ ca și baza $e_1, ..., e_n$, atunci operatorul $\mathcal{Q}$ definit prin formulele (34) este invariant. Într-adevăr, avem

$$(\mathcal{Q}e_j, \mathcal{Q}e_k) = (f_j, f_k) = (e_j, e_k) = \begin{cases} \varepsilon_j \text{ pentru } k = j, \\ 0 \text{ pentru } k \neq j. \end{cases}$$

Așadar, egalitatea (31) are loc pentru orice pereche de vectori ai bazei. De aici, pe baza liniarității, ea are loc pentru *orice* pereche de vectori x, y din $\mathcal{H}_n$, ceea ce trebuia arătat.

Așadar, un operator invariant $\mathcal{Q}$ se caracterizează prin aceea că *el transformă orice bază canonică a spațiului* $\mathcal{H}_n$ *relativ la forma* (x, y) *într-o bază canonică cu aceeași coeficienți canonici.*

7.76. Căutăm condițiile care determină matricea oricărui operator invariant într-o bază canonică a formei (x, y). Fie $e_1, ..., e_n$ o astfel de bază și $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ coeficienții canonici corespunzători. Fie apoi $Q = \| q_i^{(j)} \|$ matricea operatorului $\mathcal{Q}$ în această bază. Matricea operatorului adjunct are forma (7.63)

$$Q' = \| q_i'^{(j)} \|, \quad q_i'^{(j)} = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} q_j^{(i)}.$$

Egalitatea (33) se poate scrie sub forma

$$\sum_{i=1}^{n} q_i'^{(j)} q_k'^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} q_j^{(i)} q_k^{(i)} = \delta_j^{(k)} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = k, \\ 0 \text{ pentru } j \neq k. \end{cases}$$

Altfel spus,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_i} q_j^{(i)} q_k^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_j} & \text{pentru } j = k, \\ 0 & \text{pentru } j \neq k. \end{cases} \tag{35}$$

Egalitatea (35) este echivalentă cu (33) și de aceea ea poate fi considerată ca definiție a operatorului invariant $\mathcal{Q}$.

Astfel, matricea unui operator invariant în orice bază canonică a formei (x, y), numită și *matrice invariantă*, se caracterizează prin aceea că suma pătratelor elementelor coloanei j cu coeficienții $\varepsilon_1^{-1}, \ldots, \varepsilon_n^{-1}$ este egală cu numărul $\varepsilon_j^{-1} (j = 1, \ldots, n)$, iar suma produselor elementelor corespunzătoare a două coloane distincte cu coeficienții $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ este egală cu 0. Deoarece din (33) rezultă de asemenea relația $\mathcal{Q}\mathcal{Q}' = \mathcal{E}$, atunci au loc și egalitățile

$$\sum_{k=1}^{m} q_k^{(j)} q_m^{(k)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_m} q_k^{(j)} q_k^{(m)} = \delta_m^{(j)},$$

unde

$$\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k q_k^{(j)} q_k^{(m)} = \begin{cases} \varepsilon_m \text{ pentru } j = m, \\ 0 \text{ pentru } j \neq m. \end{cases} \tag{35'}$$

Obținem astfel o altă caracterizare a matricilor invariante: suma pătratelor elementelor liniei j cu coeficienții $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ este egală cu ε_j, iar suma produselor elementelor corespunzătoare a două linii distincte, tot cu coeficienții $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ este egală cu 0.

§ 7.8. Forme multiliniare

7.81. În analogie cu formele biliniare se pot considera funcții de mai multe argumente vectoriale (trei, patru și mai multe), liniare în fiecare argument, numite forme multiliniare.

Definiție. O funcție $A(x_1, \ldots, x_k)$ de k argumente vectoriale $x_1, \ldots, x_k$ variind într-un spațiu vectorial $\mathcal{X}$ se numește

multiliniară (mai exact *k-liniară*) dacă ea este liniară în fiecare argument x_j $(j = 1, \ldots, k)$ pentru valori fixate ale celorlalte argumente $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$.

Forma multiliniară $A(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ se numește *simetrică* dacă ea nu se schimbă pentru orice permutare a locurilor oricăror două argumente și *antisimetrică* dacă prin schimbarea locurilor oricăror două argumente ea își schimbă semnul.

Un exemplu de formă antisimetrică multiliniară de trei argumente x, y, z (formă triliniară) în spațiul $\mathcal{V}_3$ este produsul mixt al acestor vectori.

Un exemplu de formă antisimetrică multiliniară de n vectori în spațiul $\mathcal{R}_n$

$$x_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\},$$
$$x_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}\}$$

este determinantul

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{2n} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{36}$$

Un exemplu puțin mai general îl constituie produsul determinantului (36) printr-un număr fixat $\alpha \in K$.

7.82. Arătăm că *orice formă antisimetrică multiliniară* $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de n vectori* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *într-un spațiu vectorial n-dimensional* $\mathcal{R}_n$ *cu baza fixată* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *este egală cu determinantul* (36) *înmulțit cu un anumit factor constant* $\alpha \in K$.

Notăm prin α mărimea $A(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Atunci este ușor de evaluat mărimea $A(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$ unde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sînt orice numere întregi cuprinse între 1 și n. Dacă printre aceste numere există două egale, atunci mărimea $A(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$ este nulă deoarece prin permutarea argumentelor corespunzătoare, ea, de fapt, nu se schimbă și în același timp conform proprietății de antisimetrie, ea își schimbă semnul. Dacă toate numerele $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sînt distincte, atunci efectuînd atîtea permutări ale argumentelor vecine

cît este numărul N de inversiuni în şirul de indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (vezi demonstraţia teoremei 4.54) se poate obţine o aşezare normală a argumentelor; atunci

$$A(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = (-1)^N \cdot \alpha.$$

Fie acum

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

un sistem oarecare de n vectori din spaţiul $\mathcal{R}_n$. Considerăm forma multiliniară $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; avem

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{2i_2} e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{ni_n} e_{i_n}\right) =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_2, i_n=1}^{n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} A(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) =$$

$$= \alpha \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{n} (-1)^N a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}.$$

Deoarece în fiecare termen al sumei obţinute N este numărul inversiunilor în aşezarea indicilor secunzi ai elementelor, în ordinea normală a primilor indici, atunci fiecare termen este unul din termenii determinantului (36) cu semnul afectat. Suma tuturor acestor termeni este atunci egală cu însuşi determinantul (36). Astfel afirmaţia făcută este dovedită.

În particular, am arătat că produsul mixt a trei vectori x, y, z din spaţiul $\mathcal{V}_3$ în orice bază se reprezintă prin determinantul de ordin 3 format din coordonatele acestor vectori cu coeficientul egal cu produsul mixt al vectorilor bazei considerate.

§ 7.9. Forme biliniare şi forme pătratice în spaţiul real

7.91. Faptul că în mulţimea numerelor reale există numere pozitive şi numere negative face ca teoria formelor biliniare şi a formelor pătratice în spaţii reale să aibă unele aspecte specifice, care nu se întîlnesc în cazul unui corp oarecare de scalari.

Conform teoremei generale 7.31 orice formă pătratică $A(x, x)$ se reduce într-o anumită bază la forma canonică

$$A(x, x) = \lambda_1 \eta_1^2 + \ldots + \lambda_n \eta_n^2.$$

Printre numerele reale $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ există atîtea numere nenule cît este rangul matricii formei $A(x, x)$ (7.33 b). Ele sînt pozitive sau negative. Numărul coeficienţilor canonici pozitivi şi numărul coeficienţilor canonici negativi nu se modifică prin schimbarea bazei canonice aşa cum rezultă din teorema următoare

TEOREMĂ *(legea inerţiei pentru forme pătratice). Numărul coeficienţilor pozitivi şi numărul coeficienţilor negativi în forma canonică a unei forme pătratice $A(x, x)$ sînt invarianţi ai formei (adică nu depind de alegerea bazei canonice).*

Demonstraţie. Fie $A(x, x)$ o formă pătratică dată. Într-o anumită bază $\{e\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ea are forma

$$A(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi_k,$$

unde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt coordonatele vectorului x relativ la baza $\{e\}$. Admitem că alegem două baze canonice $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ şi $\{g\} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Notăm prin $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ coordonatele vectorului x în baza $\{f\}$ şi prin $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ coordonatele lui x în baza $\{g\}$. Formulele corespunzătoare de transformare a coordonatelor vor fi de forma

$$\left.\begin{aligned}
\eta_1 &= b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + \ldots + b_{1n}\xi_n, \\
\tau_1 &= c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + \ldots + c_{1n}\xi_n, \\
\eta_2 &= b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + \ldots + b_{2n}\xi_n, \\
\tau_2 &= c_{21}\xi_1 + c_{22}\xi_2 + \ldots + c_{2n}\xi_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_n &= b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2 + \ldots + b_{nn}\xi_n, \\
\tau_n &= c_{n1}\xi_1 + c_{n2}\xi_2 + \ldots + c_{nn}\xi_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

În baza $\{f\}$ forma $A(x, x)$ se scrie

$$A(x, x) = \alpha_1 \eta_1^2 + \ldots + \alpha_k \eta_k^2 - \alpha_{k+1} \eta_{k+1}^2 - \ldots - \alpha_m \eta_m^2, \qquad (38)$$

iar în baza $\{g\}$

$$A(x, x) = \beta_1\tau_1^2 + \beta_2\tau_2^2 + \ldots + \beta_p\tau_p^2 - \beta_{p+1}\tau_{p+1}^2 - \\ - \ldots - \beta_q\tau_q^2. \qquad (39)$$

Numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ se presupun *pozitive*. Vom arăta că $k = p$, $m = q$. Egalînd membrii din dreapta ai egalităților (38) și (39) și trecînd termenii negativi în ceilalți membri, rezultă

$$\alpha_1\eta_1^2 + \alpha_2\eta_2^2 + \ldots + \alpha_k\eta_k^2 + \beta_{p+1}\tau_{p+1}^2 + \ldots + \beta_p\tau_p^2 = \\ = \alpha_{k+1}\eta_{k+1}^2 + \ldots + \alpha_m\eta_m^2 + \beta_1\tau_1^2 + \ldots + \beta_p\tau_p^2. \qquad (40)$$

Presupunem $k < p$. Considerăm atunci vectorii x satisfăcînd condițiile

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 = 0,\ \eta_2 = 0, \ldots, \eta_k = 0, \\ \tau_{p+1} = 0, \ldots, \tau_q = 0,\ \tau_{q+1} = 0, \ldots, \tau_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (41)$$

Aceste condiții sînt în număr mai mic decît n (deoarece $k<p$). Înlocuind expresiile lui $\eta_1, \ldots, \eta_k, \tau_{p+1}, \ldots, \tau_n$ prin coordonatele $\{\xi\}$ după formulele (37), obținem un sistem de ecuații liniare omogene cu numărul de ecuații mai mic decît numărul necunoscutelor și, prin urmare, acest sistem omogen admite o soluție nenulă $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Pe de altă parte, orice vector x satisfăcînd condițiile (41) satisface conform egalității (40) condițiile

$$\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_p = 0.$$

Vectorul pentru care $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_p = \tau_{p+1} = \ldots = \tau_n = 0$, este în mod necesar vectorul nul și pentru el toate coordonatele $\{\xi\}$ trebuie de asemenea să fie egale cu zero. Contradicția obținută arată că ipoteza $k < p$ nu poate fi îndeplinită.

Din rolul simetric al numerelor k și p rezultă că nici ipoteza $p < k$ nu poate avea loc. Așadar, $k = p$. Mai departe, considerînd condițiile

$$\tau_1 = 0,\ \tau_2 = 0, \ldots, \tau_p = 0,$$

$$\eta_{k+1} = 0, \ldots, \eta_m = 0,\ \tau_{m+1} = 0, \ldots, \tau_n = 0,$$

prin aceeași metodă ipotezele $m < q$ și $q < m$ conduc la contradicție și se obține în final $k = p$, $m = q$, ceea ce trebuia dovedit.

7.92. Numărul total de termeni intrînd în forma canonică a unei forme pătratice $A(x, x)$, adică rangul ei (7.33 b) se numește *indicele ei de inerție;* numărul termenilor pozitivi se numește *indice pozitiv de inerție*, iar numărul termenilor negativi — *indice negativ de inerție*. Dacă indicele pozitiv de inerție este egal cu dimensiunea spațiului, atunci forma se numește *pozitiv definită*; cu alte cuvinte, forma pătratică este pozitiv definită dacă toți cei n coeficienți canonici sînt pozitivi. Așadar, *o formă pozitiv definită ia valori pozitive în orice punct din spațiu, cu excepția originii unde se anulează*. Invers, dacă o anumită formă pătratică într-un spațiu n-dimensional are peste tot, cu excepția originii, valori pozitive, atunci rangul ei este egal cu n și indicele pozitiv de inerție este egal de asemenea cu n, adică forma este pozitiv definită. Într-adevăr, pentru o formă de rang mai mic decît n sau avînd numărul coeficienților canonici pozitivi mai mic decît n, atunci se pot indica cu ușurință puncte în spațiu, distincte de originea coordonatelor, unde această formă ia valori negative sau nule.

De exemplu, forma de rang doi în spațiul tridimensional

$$A(x, x) = \xi_1^2 + \xi_3^2$$

ia valori nule pentru orice vector cu coordonatele $\xi_1 = 0$, $\xi_2 \neq 0$, $\xi_3 = 0$. Forma de rang trei în spațiul tridimensional

$$A(x, x) = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2$$

ia valori negative pentru aceeași vectori. Cele două forme nu sînt pozitiv definite.

7.93. Teorema inerției demonstrată anterior pentru forme pătratice se formulează în mod direct și pentru formele biliniare simetrice: anume, *numărul coeficienților canonici pozitivi și al celor negativi în expresia* (22) *a unei forme biliniare* $A(x, y)$ *nu depinde de alegerea bazei canonice*. De aceea pentru o formă biliniară simetrică au sens noțiunile de indici de inerție pozitivi și negativi. Valorile indicilor de inerție pozitivi și negativi ai unei forme biliniare $A(x, y)$, deci și ai formei pătratice $A(x, x)$ pot fi definite după semnele minorilor din colțul din stînga sus din matricea formei într-o bază oarecare (dacă acești minori sînt nenuli) aplicînd formulele (24).

Notăm că *într-un spațiu real* $\mathcal{R}_n$ *se poate găsi pentru orice formă pătratică* $A(x, x)$ *o bază canonică astfel încît toți coefi-*

cienții canonici să fie egali cu $+1$ *sau* -1. Pentru aceasta, reducînd forma $A(x, x)$ astfel: $A(x, x) = \lambda_1\tau_1^2 + \ldots + \lambda_p\tau_p^2 - \mu_1\tau_{p+1}^2 - \ldots - \mu_q\tau_{p+q}^2$, unde numerele $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ sînt pozitive, este suficient apoi de efectuat transformarea de coordonate

$$\xi_1 = \sqrt{\lambda_1}\tau_1, \ldots, \xi_p = \sqrt{\lambda_p}\tau_p, \quad \xi_{p+1} = \sqrt{\mu_1}\tau_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q} = \sqrt{\mu_q}\tau_{p+q}.$$

După această transformare forma se scrie

$$A(x, x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \ldots - \xi_{p+q}^2.$$

TEOREMĂ. *Două spații* $\mathcal{R}'$ *și* $\mathcal{R}''$ *avînd forme biliniare simetrice fixate* $A(x', y')$ *și respectiv* $A(x'', y'')$ *sînt* A*-izomorfe dacă și numai dacă spațiile* $\mathcal{R}'$ *și* $\mathcal{R}''$ *au aceeași dimensiune, iar indicii de inerție* p', q' *ai formei* $A(x', y')$ *coincid respectiv cu indicii de inerție* p'', q'' *ai formei* $A(x'', y'')$.

Demonstrația rezultă direct din considerațiile anterioare și din teorema 7.72.

7.94. Definițiile următoare corespund definițiilor date în 7.92 pentru forme pătratice.

O formă biliniară $A(x, y)$ se numește *nesingulară* dacă rangul ei este egal cu dimensiunea spațiului, adică în scrierea canonică a formei $A(x, y)$

$$A(x, y) = \lambda_1\xi_1\eta_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n\eta_n$$

toți coeficienții $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt diferiți de zero. Dacă toți acești coeficienți sînt în plus pozitivi, forma $A(x, y)$ se numește *pozitiv definită*. O formă biliniară pozitiv definită $A(x, y)$ se caracterizează prin aceea că forma pătratică corespunzătoare $A(x, x)$ ia pentru orice $x \neq 0$ valori *pozitive* (conform 7.92).

Prin însăși definiția ei o formă pozitiv definită în spațiul $\mathcal{R}_n$ este nesingulară. Deoarece $A(x, x) > 0$ ea rămîne pozitiv definită pe orice subspațiu $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}_n$ și spre deosebire de formele biliniare generale (7.15 **d**) o formă pozitiv definită rămîne nesingulară pe orice subspațiu $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}_n$. Dacă $f_1, \ldots, f_k$ sînt orice k vectori liniar independenți, determinantul

$$D = \begin{vmatrix} A(f_1, f_1) & \ldots & A(f_1, f_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ A(f_k, f_1) & \ldots & A(f_k, f_k) \end{vmatrix}$$

este diferit de zero. Vom vedea mai jos că numărul D este întotdeauna pozitiv.

7.95. Un exemplu important de formă biliniară simetrică pozitiv definită în spațiul $\mathcal{V}_3$ îl constituie produsul scalar a doi vectori. Într-adevăr, din definiția acestuia rezultă că dacă $x, y \in \mathcal{V}_3$, atunci

$$(x, y) = (y, x),$$

$$(x, x) = |x|^2 > 0 \text{ pentru } x \neq 0;$$

prima relație arată că forma biliniară (x, y) este simetrică; cealaltă relație arată că forma pătratică corespunzătoare ia valori pozitive pentru orice $x \neq 0$, deci forma biliniară (x, y) este pozitiv definită.

În cele ce urmează, forme biliniare simetrice pozitiv definite vor juca un rol important; anume, folosind astfel de forme vom obține în spații vectoriale generale posibilitatea să introducem noțiunile de lungime a vectorilor și de unghi între vectori nenuli (capitolul 8).

7.96. Apare problema de a recunoaște dacă o formă biliniară simetrică $A(x, y)$ este pozitiv definită, cunoscînd matricea ei. Un răspuns la această problemă este dat în teorema următoare.

TEOREMĂ. *Pentru ca o matrice simetrică* $A = \|a_{ik}\|$ *să determine o formă biliniară pozitiv definită* $A(x, y)$ *este necesar și suficient ca toți minorii diagonali, din colțul din stînga sus ai matricii* $\|a_{ik}\|$, *adică*

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \det \|a_{ik}\|$$

să fie pozitivi.

Demonstrație. Dacă toți minorii indicați ai matricii A sînt pozitivi, atunci conform formulei (24) vor fi pozitivi și toți coeficienții canonici λ_k ai formei $A(x, y)$ într-o anumită bază canonică; astfel, forma $A(x, y)$ este pozitiv definită.

Invers, presupunem că forma $A(x, y)$ este pozitiv definită și arătăm că toți minorii din colțul din stînga sus ai matricii $\|a_{ik}\|$ sînt pozitivi. Într-adevăr, minorul

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \tag{42}$$

determină matricea $\|a_{ik}\|$, $(i, k = 1, 2, ..., m)$ a formei $A(x, y)$ pe subspațiul $\mathfrak{L}_m$ generat de primii m vectori ai bazei. Deoarece pe subspațiul $\mathfrak{L}_m$ forma $A(x, y)$ este pozitiv definită ($A(x, x) > 0$ pentru $x \neq 0$), atunci în subspațiul $\mathfrak{L}_m$ există o bază canonică în care forma $A(x, y)$ se scrie sub formă canonică cu coeficienții canonici pozitivi. În particular, determinantul formei $A(x, y)$ în această bază, egal cu produsul coeficienților canonici este de asemenea pozitiv. Ținînd cont de legătura între determinanții matricilor unei forme biliniare în diverse baze (7.15 (6)), rezultă că determinantul formei $A(x, y)$ în baza considerată a subspațiului $\mathfrak{L}_m$ este de asemenea pozitiv. Dar determinantul formei $A(x, y)$ în baza de plecare a subspațiului $\mathfrak{L}_m$ este tocmai minorul M. Așadar, $M > 0$ și teorema este complet demonstrată.

Observație. În locul minorilor din colțul din stînga sus, în partea a doua a demonstrației poate fi luat orice minor diagonal (5.53), fără modificarea esențială a raționamentului. Astfel, *într-o matrice a unei forme pozitiv definită orice minor diagonal este pozitiv.*

7.97. Pentru o formă pozitiv definită $A(x, y)$ există întotdeauna o bază canonică în care toți coeficienții canonici să fie egali cu $+1$ (7.93). De aceea *două spații reale n-dimensionale $\mathfrak{R}'_n$ și $\mathfrak{R}''_n$ înzestrate cu forme biliniare pozitiv definite $A(x', y')$ și $A(x'', y'')$ sînt întotdeauna A-izomorfe, conform teoremei* 7.72.

7.98. În aplicațiile algebrei liniare în analiză (de exemplu în teoria extremelor condiționate) apare următoarea problemă: cunoscînd matricea $A = \|a_{ij}\|$ a unei forme biliniare simetrice $A(x, y)$, să se indice dacă această formă este pozitiv definită pe subspațiul dat printr-un sistem de k ecuații liniare independente

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\xi_j = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., k;\ k < n).$$

O condiție necesară și suficientă pentru aceasta este ca minorii din colțul din stînga sus de ordin $2k + 1, 2k + 2, ..., k + n$ ai matricii

$$\Delta = (-1)^k \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ b_{11} & b_{21} & \dots & b_{k1} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{k2} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{kn} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

să fie pozitivi.

PROBLEME

1. Formează elementele matricii unei forme biliniare un tensor (5.61); în caz afirmativ, care este tipul acelui tensor?

2. Reduceți forma pătratică $\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_1$ la forma canonică.

3. Fie p indicele pozitiv de inerție al unei forme pătratice $A(x, x)$ dată în spațiul $\mathfrak{R}_n$ și q indicele ei negativ de inerție. Presupunem date p numere pozitive $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ și q numere negative $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_q$. Să se arate că există o bază în care forma $A(x, x)$ se scrie

$$A(x, x) = \lambda_1\tau_1^2 + \lambda_2\tau_2^2 + ... + \lambda_p\tau_p^2 + \mu_1\tau_{p+1}^2 + ... + \mu_q\tau_{p+q}^2.$$

4. Să se arate că pentru orice formă pătratică de rang r există cel puțin un minor diagonal de rang r, diferit de zero.

5. Să se reducă forma biliniară

$$A(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 + 2\xi_2\eta_2 + 2\xi_2\eta_3 + 2\xi_3\eta_2 + 5\xi_3\eta_3$$

la forma canonică.

6. Aplicînd metoda lui Jacobi, să se aducă forma biliniară

$$A(x, y) = \xi_1\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 + \xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1 + 2\xi_2\eta_3 + 2\xi_3\eta_2 + \\ + \xi_3\eta_3 + \xi_2\eta_2$$

la forma canonică.

7. Să se formuleze condiții în care o matrice simetrică $\|a_{ik}\|$ definește o formă biliniară negativ definită.

8. Fiind dată o matrice simetrică $A = \|a_{ik}\|$ având proprietățile

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad ..., \quad \det \|a_{ik}\| > 0.$$

Să se arate că $a_{nn} > 0$.

9. Să se demonstreze teorema: orice formă multiliniară antisimetrică de $n + 1$ vectori într-un spațiu n-dimensional $\mathfrak{R}_n$ este identic nulă.

10. Să se demonstreze teorema: orice formă multiliniară antisimetrică $A(x_1, ..., x_{n-1})$ de $n - 1$ vectori într-un spațiu n-dimensional se scrie în orice bază ca un determinant în care primele $n-1$ linii sînt formate cu coordonatele vectorilor-argumente iar ultima, a n—a este formată cu numere fixate.

11. Să se arate că orice formă biliniară antisimetrică $A(x, y) \neq 0$ poate fi întotdeauna redusă la „forma canonică"

$$A(x, y) = \sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1 + \sigma_3\tau_4 - \sigma_4\tau_3 + ... + \sigma_{2k-1}\tau_{2k} + \sigma_{2k}\tau_{2k-1}.$$

12. Să se demonstreze teorema: forma pătratică reală $A(x, x) = \Sigma a_{jk}x_jx_k$ este nenegativă pentru orice $x \in \mathfrak{R}_n$ dacă și numai dacă toți minorii diagonali ai matricii $A = \|a_{jk}\|$ sînt nenegativi.

Observație. Pentru matricea $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$ minorii din colțul din stînga sus δ_1, δ_2 sînt egali cu zero, iar forma corespunzătoare nu este negativă. Astfel, condițiile $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0$ *nu sînt suficiente* pentru nenegativitatea formei.

13. Presupunem că în spațiul $\mathcal{R}_n$ este dată o formă simetrică biliniară nesingulară $A(x, y)$. Fie $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ un subspațiu de dimensiune r. Să se arate că subspațiul conjugat $\mathcal{R}'' \subset \mathcal{R}$ are dimensiunea $n - r$.

14. În spațiul $\mathcal{R}_2$ este dată forma biliniară simetrică $(x, y) = \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2$. Să se determine operatorul adjunct (relativ la această formă) al operatorului de rotație avînd matricea

$$A = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

15. Presupunem în spațiul $\mathcal{R}_n$ fixată o formă nesingulară (x, y). Pentru un sistem liniar de n ecuații și n necunoscute

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{43}$$

să se demonstreze „teorema lui Fredholm": sistemul (43) are soluție pentru acei și numai pentru acei vectori $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$ care sînt conjugați cu toate soluțiile sistemului omogen

$$\sum_{k=1}^{n} a'_{jk}\eta_k = 0, \tag{44}$$

unde $\| a'_{jk} \|$ este matricea conjugată cu $\| a_{jk} \|$ relativ la forma (x, y).

Deduceți că numărul condițiilor liniar independente pentru vectorul b care sînt necesare și suficiente pentru rezolvabilitatea sistemului (43) este egal cu numărul de dimensiuni al spațiului soluțiilor sistemului omogen

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{45}$$

Observație. Pentru sistemul general

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k = b_j \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{46}$$

cele două caracteristici indicate nu coincid: diferența lor se numește *indicele* sistemului (46), egal cu $m-n$.

16. Să se arate că orice formă biliniară nenegativă de rang r în spațiul $\mathcal{R}_n$ poate fi reprezentată ca suma a r forme biliniare nenegative de rang 1.

17. Să se arate că orice formă biliniară de rang 1 în spațiul $\mathcal{R}_n$ se scrie $A(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ unde $f(x)$ și $g(x)$ sînt forme liniare.

18. Dacă $A(x, y) = \sum a_{jk}\xi_j\eta_k$ și $B(x, y) = \sum b_{jk}\xi_j\eta_k$ sînt forme biliniare nenegative în spațiul $\mathcal{R}_n$, atunci forma $C(x, y) = \sum a_{jk}b_{jk}\xi_j\eta_k$ este de asemenea nenegativă.

Capitolul 8

SPAȚII EUCLIDIENE

§ 8.1. Introducere

O mare varietate de fapte din geometrie decurg din posibilitatea diverselor măsurări, în esență posibilitatea măsurării lungimilor segmentelor și unghiurilor între drepte. Într-un spațiu vectorial oarecare nu există mijloace pentru descrierea unor astfel de măsurări, ceea ce restrînge domeniul de studiu.

Pentru a extinde în mod natural metodele legate de existența măsurilor uzuale din geometrie la spații vectoriale generale, apelăm la noțiunea de produs scalar a doi vectori, acceptată în geometria analitică, pe care am folosit-o deja pentru vectorii spațiului $\mathcal{V}_3$. Definiția din geometria analitică este următoarea: produsul scalar a doi vectori este produsul lungimilor acestor vectori prin cosinusul unghiului dintre ei. Așadar, această definiție se bazează pe posibilitatea măsurării lungimii vectorilor și a unghiului dintre vectori. Pe de altă parte, dacă este cunoscut produsul scalar al oricărei perechi de vectori, putem determina lungimea lor și unghiul dintre ei; anume, pătratul lungimii unui vector este egal cu produsul scalar al acestui vector cu el însuși, iar cosinusul unghiului a doi vectori este raportul dintre produsul lor scalar și produsul lungimilor lor. Așadar, în noțiunea de produs scalar sînt potențial incluse posibilitatea măsurării lungimilor și unghiurilor și odată cu aceasta, poate fi studiat întreg domeniul geometriei legat de măsurări („geometria metrică").

Într-un spațiu vectorial general va fi mai ușor să introducem mai întîi noțiunea de produs scalar a doi vectori și apoi să definim lungimile vectorilor și unghiul dintre vectori pe baza acestei noțiuni.

Este util să vedem ce proprietăți ale produsului scalar uzual pot fi utilizate pentru construirea unei mărimi similare într-un spațiu vectorial general. La început ne limităm la cazul spațiilor reale.

În 7.95 am văzut că în spațiul $\mathcal{V}_3$ (2.15 a) produsul scalar (x, y) este o formă biliniară de vectori x și y, simetrică și pozitiv definită. Forme cu aceste proprietăți există în general și în alte spații vectoriale. Considerăm într-un spațiu vectorial real o formă biliniară fixată $A(x, y)$, simetrică și pozitiv definită, pe care o numim „produsul scalar" al perechii de vectori x, y, pentru orice x, y din spațiul fixat. Putem apoi defini lungimea oricărui vector și unghiul dintre orice doi vectori după aceleași reguli după care lungimea unui vector și unghiul dintre vectori se calculează prin produse scalare în spații $\mathcal{V}_3$. Se înțelege, numai cercetarea ulterioară poate arăta justețea unei astfel de definiții și vom vedea în acest capitol și în cele care urmează că definiția dată permite într-adevăr atît extinderea la spații vectoriale mai generale a metodelor geometriei metrice cît și obți-

nerea unor mijloace puternice de cercetare a obiectelor matematice care se întîlnesc în algebră și în analiză.

Notăm aici o particularitate esențială. O formă biliniară pozitiv definită poate fi aleasă într-un spațiu vectorial dat în mai multe moduri. Lungimea unui vector x, calculată cu ajutorul uneia din forme va fi diferită de lungimea aceluiași vector x calculată cu ajutorul altei forme; la fel pentru unghiul a doi vectori. Astfel, lungimea unui vector și unghiul a doi vectori nu se definesc în mod univoc. Dar această situație nu trebuie să ne mire, pentru că nu este nimic ciudat în faptul că unul și același segment de dreaptă, măsurat cu unități de măsură diferite, are lungimile exprimate în numere reale diferite. Se poate spune că alegerea formei biliniare simetrice pozitive fixate este analoagă alegerii „scării" de măsurare a lungimii vectorilor și a unghiurilor dintre ei.

Un spațiu vectorial real înzestrat cu o formă biliniară simetrică pozitiv definită fixată pe acel spațiu se va numi *spațiu euclidian*. Un spațiu vectorial fără o astfel de formă se numește *afin*. Cazul spațiilor complexe va fi considerat în capitolul 9.

§ 8.2. Definiția unui spațiu euclidian

8.21. Un spațiu vectorial real $\mathcal{R}$ se numește *euclidian* dacă: 1) există o regulă care permite să asociem oricărei perechi ordonate de vectori x, y din $\mathcal{R}$ un număr real numit *produsul scalar* al vectorilor x, y, notat (x, y); 2) sînt în plus satisfăcute următoarele condiții:

a) $(x, y) = (y, x)$ (*comutativitate*);

b) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ (*distributivitate*);

c) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ pentru orice număr real λ;

d) $(x, x) > 0$ pentru $x \neq 0$ și $(x, x) = 0$ pentru $x = 0$.

Axiomele a)—d) se pot formula spunînd că *produsul scalar este o formă biliniară* b)—c), *simetrică* a) *și pozitiv definită* d). Invers, *orice formă satisfăcînd aceste proprietăți poate fi luată ca produs scalar în* $\mathcal{R}$.

Deoarece produsul scalar al vectorilor x, y este o formă biliniară, pentru el are loc formula 7.11 (2). În cazul dat această formulă capătă forma următoare:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i,\ \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (x_i, y_j). \qquad (1)$$

Aici $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_m$ sînt vectori arbitrari ai spațiului euclidian $\mathcal{R}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ sînt numere reale arbitrare.

8.22. *Exemple*

a. În spațiul $\mathcal{V}_3$ al vectorilor liberi (2.15 **a**) produsul scalar se introduce după regulile din geometria analitică. Condițiile a)—d) exprimă proprietățile de bază ale produsului scalar, care se demonstrează în algebra vectorială.

b. În spațiul $\mathcal{R}_n$ (2.15 **b**) introducem produsul scalar al vectorilor $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ astfel:

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n. \qquad (2)$$

Această definiție generalizează formula binecunoscută a expresiei produsului scalar al vectorilor din spațiul tridimensional prin coordonatele factorilor, într-un sistem ortogonal de coordonate. Se verifică imediat îndeplinirea condițiilor a)—d).

Trebuie observat că formula (2) nu reprezintă unicul mod de definire a unui produs scalar în $\mathcal{R}_n$. Toate modurile posibile de definire a unui produs scalar (adică a unei forme biliniare simetrice pozitiv definite) în spațiul $\mathcal{R}_n$ au fost descrise de fapt în 7.96.

c. În spațiul $\mathcal{R}(a, b)$ al funcțiilor reale continue pe segmentul $a \leqslant t \leqslant b$ (2.15 **c**) se poate introduce produsul scalar al funcțiilor $x(t)$, $y(t)$ după formule

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt. \qquad (3)$$

Este ușor de arătat, prin aplicarea regulilor de bază ale integrării că sînt îndeplinite condițiile a)—d).

În cele ce urmează, vom nota spațiul $\mathcal{R}(a, b)$ înzestrat cu produsul scalar (3), prin $\mathcal{R}_2(a, b)$.

§ 8.3. Noțiuni metrice fundamentale

Avînd definit un produs scalar, putem indica definiția altor noțiuni metrice de bază — lungimea vectorilor și unghiul a doi vectori.

8.31. *Lungimea vectorilor. Lungimea* unui vector x într-un spațiu euclidian $\mathcal{R}$ este prin definiție numărul real pozitiv

$$|x| = +\sqrt{(x, x)}. \qquad (4)$$

Exemple

a. În spațiul $\mathcal{V}_3$ definiția precedentă conduce la definiția uzuală, regăsindu-se valoarea lungimii unui vector.

b. În spațiul $\mathcal{R}_n$ pentru un vector $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ se obține expresia lungimii sub forma

$$|x| = + \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}.$$

c. În spațiul $\mathcal{R}_2(a, b)$ lungimea unui vector $x = x(t)$ este egală cu

$$|x| = + \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\, dt}.$$

Această mărime se notează uneori cu $||x(t)||$ și se numește *norma* funcției $x(t)$ (pentru a evita asociațiile false legate de cuvintele „lungimea unei funcții").

8.32. Din axioma d) rezultă că pentru orice vector x dintr-un spațiu euclidian $\mathcal{R}$ există o lungime; pentru orice vector $x \neq 0$ lungimea este pozitivă și vectorul nul are lungimea egală cu zero. Egalitatea

$$|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x, x)} = |\alpha| \sqrt{(x, x)} = |\alpha||x| \qquad (5)$$

arată că *mărimea absolută a unui multiplicator real poate fi scoasă factor din expresia lungimii unui vector.*

Orice vector x de lungime 1 se numește *normat*. Orice vector nenul y *poate fi normat,* adică înmulțit cu un număr λ astfel încît ca rezultat să se obțină un vector normat. Într-adevăr, ecuația $|\lambda y| = 1$ relativ la λ are de exemplu soluția $\lambda = \dfrac{1}{|y|}$.

O mulțime $F \subset \mathcal{R}$ se numește mărginită dacă lungimile tuturor vectorilor $x \in F$ sînt mărginite de o constantă fixată. Exemple de mulțimi mărginite sînt: *bila unitate* a spațiului $\mathcal{R}$, adică mulțimea tuturor vectorilor $x \in \mathcal{R}$ cu lungimea mai mică decît 1 și *sfera unitate* — mulțimea tuturor vectorilor $x \in \mathcal{R}$ avînd lungimea egală cu 1.

8.33. *Unghiul dintre vectori.* Se numește *unghi* între orice doi vectori nenuli x, y acel unghi cuprins între 0 și 180° al cărui cosinus este egal cu raportul $\dfrac{(x, y)}{|x|\,|y|}$.

Pentru vectori uzuali în spațiul $\mathcal{V}_3$, această definiție coincide cu cea care dă expresia cunoscută a unghiului între vectori cu ajutorul produsului scalar.

Pentru ca această definiție să poată fi aplicată într-un spațiu euclidian oarecare, este necesar de arătat că raportul indicat mai sus este cuprins între -1 și 1 pentru orice vectori nenuli x, y, adică valoarea absolută a raportului să fie cel mult egală cu 1.

Pentru a demonstra acest fapt, considerăm vectorul $\lambda x - y$, unde λ este un număr real arbitrar fixat. Conform axiomei d), pentru orice λ, avem

$$(\lambda x - y,\ \lambda x - y) \geqslant 0. \qquad (6)$$

Folosind formula (1) putem scrie această inegalitate astfel

$$\lambda^2 (x, x) - 2\lambda (x, y) + (y, y) \geqslant 0. \qquad (7)$$

În membrul stîng al inegalității (7) se află un trinom de gradul doi relativ la λ cu coeficienți constanți. Acest trinom nu poate avea rădăcini reale distincte, deoarece în acest caz nu ar putea avea semn constant pentru toate valorile lui λ. De aceea discriminantul $(x, y)^2 - (x, x)(y, y)$ al acestui trinom nu poate fi pozitiv, deci

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)\,(y, y).$$

De aici rezultă că

$$|(x, y)| \leqslant |x|\,|y|, \qquad (8)$$

ceea ce trebuia arătat.

Inegalitatea (8) se numește *inegalitatea Cauchy-Buniakovski(-Schwartz).*

8.34. Ne propunem să vedem în ce caz inegalitatea (8) se reduce la o egalitate. Dacă vectorii x, y sînt coliniari, atunci există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încît $y = \lambda x$ și, evident,

$$|(x, y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda|\,(x, x) = |\lambda||x|^2 = |x||y|.$$

Arătăm că și invers, *dacă inegalitatea* (8) *se reduce la o egalitate pentru o pereche de vectori nenuli* x, y, *atunci acești vectori* x, y *sînt coliniari.*

Dacă are loc egalitatea

$$|(x, y)| = |x||y|.$$

atunci discriminantul trinomului de gradul doi (7) este egal cu zero și, prin urmare, trinomul are o unică rădăcină reală λ_0. Obținem astfel:

$$\lambda_0^2(x, x) - 2\lambda_0(x, y) + (y, y) = (\lambda_0 x - y, \lambda_0 x - y) = 0,$$

de unde conform axiomei d) rezultă că $\lambda_0 x - y = 0$ sau $y = \lambda_0 x$. Așadar, *valoarea absolută a produsului scalar a doi vectori este egală cu produsul lungimilor lor dacă și numai dacă acești vectori sînt coliniari.*

Exemple

a) În spațiul $\mathcal{V}_3$ inegalitatea Cauchy-Buniakovski rezultă evident din însăși definiția produsului scalar ca produs al lungimilor vectorilor prin cosinusul unghiului dintre ei.

b) În spațiul $\mathcal{R}_n$ inegalitatea Cauchy-Buniakovski are forma

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \eta_j^2}; \qquad (9)$$

această inegalitate are loc pentru orice pereche de vectori $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ sau, ceea ce este același lucru, pentru orice două sisteme de numere reale $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ și $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$.

c) În spațiul $\mathcal{R}_2(a, b)$ inegalitatea Cauchy-Buniakovski are forma

$$\left|\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b x^2(t)\, dt} \sqrt{\int_a^b y^2(t)\, dt}. \qquad (10)$$

8.35. *Ortogonalitate.* Vectorii x și y se numesc *ortogonali* dacă $(x, y) = 0$. Astfel, noțiunea de ortogonalitate a vectorilor x și y coincide cu cea de conjugare (7.41 a) a acestor vectori relativ la forma biliniară (x, y). Dacă $x \neq 0$ și $y \neq 0$, atunci din această definiție, ținînd seama și de definiția generală a unghiului a doi vectori (8.33), rezultă că x și y formează un unghi de 90°. Vectorul nul este ortogonal la orice vector $x \in \mathcal{R}$.

Exemple

a) În spațiul $\mathcal{R}_n$ (8.22 b) condiția de ortogonalitate a vectorilor $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ și $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ are forma

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + ... + \xi_n\eta_n = 0.$$

De exemplu, vectorii $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$ sînt ortogonali doi cîte doi.

b) În spațiul $\mathcal{R}_2(a, b)$ condiția de ortogonalitate a vectorilor $x = x(t)$ și $y = y(t)$ are forma

$$\int_a^b x(t)y(t)dt = 0.$$

Cititorul poate verifica prin calculul direct al integralelor corespunzătoare, că în spațiul $\mathcal{R}_2$ $(-\pi, \pi)$ orice doi vectori distincți ai „sistemului trigonometric"

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, ..., \cos nt, \sin nt, ...,$$

sînt ortogonali.

8.36. Dăm mai jos cîteva proprietăți simple legate de noțiunea de ortogonalitate.

a. LEMĂ. *Vectorii nenuli ortogonali doi cîte doi $x_1, x_2, ..., x_k$ sînt liniar independenți.*

Demonstrație. Presupunem că acești vectori sînt liniar dependenți; atunci are loc egalitatea

$$C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_kx_k = 0,$$

unde, de exemplu, $C_1 \neq 0$. Înmulțim această egalitate scalar cu x_1; în virtutea ipotezei de ortogonalitate obținem $C_1(x_1, x_1) = 0$; de aici rezultă $(x_1, x_1) = 0$, adică $x_1 = 0$, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

Rezultatul acestei leme va fi folosit sub forma următoare: *dacă suma unor vectori ortogonali doi cîte doi este nulă, atunci fiecare din termeni este egal cu zero.*

b. LEMĂ. *Dacă vectorii $y_1, y_2, ..., y_k$ sînt ortogonali vectorului x, atunci orice combinație liniară $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + ... + \alpha_ky_k$ este de asemenea ortogonală lui x.*

Într-adevăr,

$$(\alpha_1y_1 + ... + \alpha_ky_k, x) = \alpha_1(y_1, x) + ... + \alpha_k(y_k, x) = 0;$$

prin urmare vectorul $\alpha_1y_1 + ... + \alpha_ky_k$ este ortogonal vectorului x, așa cum s-a afirmat (7.41 b).

Mulțimea tuturor combinațiilor liniare $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + ... + \alpha_ky_k$ formează un subspațiu $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(y_1, y_2, ..., y_k)$ — acoperirea liniară a vectorilor $y_1, y_2, ..., y_k$ (2.51). Așadar, vectorul x este ortogonal fiecărui vector al spațiului $\mathfrak{L}$. În astfel de cazuri vom spune că *vectorul x este ortogonal subspațiului $\mathfrak{L}$.* În general, dacă $F \subset \mathcal{R}$ este o mulțime oare-

care de vectori în spațiul euclidian $\mathcal{R}$, atunci vom spune că vectorul x este ortogonal mulțimii F dacă el este ortogonal oricărui vector din F.

Mulțimea G a tuturor vectorilor x ortogonali mulțimii F formează ea însăși (conform lemei **b**) un subspațiu al spațiului $\mathcal{R}$. Adeseori această situație se întîlnește în cazul cînd F însuși este un subspațiu și atunci subspațiul G se numește *complementul ortogonal al subspațiului* F.

8.37. *Teorema lui Pitagora și generalizarea ei.* Fie doi vectori ortogonali x, y; atunci prin analogie cu geometria elementară vectorul $x+y$ poate fi numit ipotenuza triunghiului dreptunghic construit pe vectorii x, y. Înmulțind scalar $x+y$ cu el însuși și folosind ortogonalitatea vectorilor x, y, obținem

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) =$$
$$= (x, x) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2.$$

Am demonstrat astfel că în orice spațiu euclidian are loc teorema lui Pitagora: *pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor*. Această teoremă se poate generaliza la cazul oricărei sume finite de vectori. Anume, fie vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$ doi cîte doi ortogonali și $z = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$; atunci

$$|z|^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_k, x_1 + x_2 + \ldots + x_k) =$$
$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_k|^2. \qquad (11)$$

8.38. *Inegalitățile triunghiului.* Dacă x și y sînt vectori oarecare, atunci prin analogie cu geometria elementară, vectorul $x+y$ poate fi numit cea de a treia latură a triunghiului construit pe vectorii x și y. Folosind inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski obținem

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y),$$
$$\leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$
$$|x+y|^2 \geqslant |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2,$$

sau

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \qquad (12)$$
$$|x+y| \geqslant |x| - |y|. \qquad (13)$$

Inegalitățile (12), (13) se numesc *inegalitățile triunghiului*. Geometric, ele exprimă faptul că *lungimea oricărei laturi a unui triunghi nu este mai mare decît suma lungimilor celorlalte două laturi și nu mai mică decît valoarea absolută a diferenței lungimilor acestor laturi*.

8.39. Am putea mai departe să transferăm la spațiile euclidiene diverse alte teoreme ale geometriei elementare. Dar aceasta nu este necesar. Introducem noțiunea de izomorfism între spațiile euclidiene; două spații euclidiene $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$ se numesc *euclidian-izomorfe* dacă ele sînt izomorfe ca spații vectoriale liniare (2.71) și, în plus, pentru orice pereche de vectori (x', y') în $\mathcal{R}'$ și (x'', y'') în $\mathcal{R}''$ care se corespund, are loc egalitatea

$$(x', y') = (x'', y'').$$

Evident, orice teoremă geometrică (așa vom numi orice teoremă bazată pe noțiunile de spațiu vectorial și produs scalar) demonstrată pentru spațiul $\mathcal{R}'$ va fi adevărată și pentru spațiul $\mathcal{R}''$, izomorf cu el. Notăm acum că în virtutea teoremei 7.97, orice două spații euclidiene de aceeași dimensiune n sînt euclidian-izomorfe. Așadar, orice teoremă geometrică adevărată într-un spațiu euclidian n-dimensional $\mathcal{R}'_n$ va fi adevărată și în orice alt spațiu euclidian n-dimensional $\mathcal{R}''_n$. Teoremele geometrice ale geometriei elementare, adică teoremele geometrice în spațiul $\mathcal{R}_3$ rămîn prin urmare adevărate în orice subspațiu tridimensional al oricărui spațiu euclidian. Astfel, toate teoremele geometrice ale geometriei elementare sînt adevărate în orice spațiu euclidian.

§ 8.4. Baza ortogonală

8.41. TEOREMĂ. *Într-un spațiu euclidian n-dimensional $\mathcal{R}_n$ există o bază formată din n vectori nenuli ortogonali doi cîte doi.*

Demonstrație. Pentru forma biliniară (x, y), ca și pentru orice formă biliniară simetrică în spațiul n-dimensional există o bază canonică (7.43) $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Condiția $(y_i, y_k) = 0$ pentru $i \neq k$, satisfăcută de o bază canonică, revine în cazul considerat la ortogonalitatea vectorilor y_i și y_k; așadar, baza canonică $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este formată din n vectori ortogonali doi cîte doi. Teorema este astfel demonstrată.

În § 8.6 considerăm unele mijloace de construcție efectivă a unei baze ortogonale.

8.42. Vectorii $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ai unei baze ortogonale pot fi normați ușor, împărțind fiecare din ei prin lungimea lui. Se obține atunci în spațiul $\mathcal{R}$ o bază *ortogonală și normată* (care uneori se numește *„ortonormată"* sau *„ortonormală"*).

Fie $e_1, e_2, \ldots, e_n$ o bază ortogonală normată (ortonormală) în spațiul euclidian $\mathcal{R}_n$. Orice vector $x \in \mathcal{R}_n$ poate fi scris sub forma

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n, \tag{14}$$

unde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt coordonatele vectorului x. Vom numi aceste coordonate *coeficienții Fourier* ai vectorului x relativ la baza ortonormală $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Înmulțind scalar relația (14) cu e_i, găsim expresia coeficientului ξ_i:

$$\xi_n = (x, e_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Dacă $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n$ este orice alt vector al spațiului $\mathcal{R}_n$, atunci aplicînd formula (1) obținem

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n. \tag{16}$$

Așadar, *în orice bază ortonormală produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor coordonatelor lor corespunzătoare (adică suma produselor coeficienților Fourier).*

În particular, punînd $y = x$ se obține

$$|x|^2 = (x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2. \tag{17}$$

§ 8.5. Problema perpendicularei

8.51. Considerăm în spațiul euclidian $\mathcal{R}$ un subspațiu finit-dimensional $\mathcal{R}'$ și un vector f care în general să nu aparțină subspațiului $\mathcal{R}'$. Ne punem problema de a găsi o descompunere

$$f = g + h, \tag{18}$$

unde vectorul g aparține subspațiului $\mathcal{R}'$ iar vectorul h este ortogonal acestui subspațiu. Vectorul g din descompunerea (18) se numește *proiecția vectorului f pe subspațiul $\mathcal{R}'$*, iar

vectorul h *perpendiculara dusă din extremitatea vectorului f pe subspațiul $\mathcal{R}'$*. Astfel de denumiri sînt legate de asociații geometrice obișnuite destinate doar pentru a apela la astfel de asociații (de exemplu noțiunea de „extremitate a unui vector" nu figurează în axiomatica noastră și în această denumire nu trebuie căutat un sens logic general valabil).

Soluția acestei probleme a fost de fapt dată în 7.54 pentru orice formă biliniară simetrică nesingulară pe un subspațiu $\mathcal{R}'$. Deoarece forma pozitiv definită (x, y) este nesingulară pe orice subspațiu $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ (7.94), soluția problemei noastre împreună cu unicitatea rezultă din 7.54.

Așa cum am văzut în 7.55, prezența unei descompuneri de tip (18) arată că întreg spațiul $\mathcal{R}$ este suma directă a subspațiului $\mathcal{R}'$ și a complementului său ortogonal $\mathcal{R}''$.

O sumă directă ai cărei termeni sînt ortogonali se numește *sumă directă ortogonală*; am construit astfel descompunerea lui $\mathcal{R}$ în suma directă a lui $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$. Dacă dimensiunea spațiului $\mathcal{R}$ este egală cu n iar dimensiunea lui $\mathcal{R}'$ este egală cu k, atunci dimensiunea lui $\mathcal{R}''$ este egală cu $n-k$, deoarece dimensiunea sumei directe este suma dimensiunilor termenilor (2.47 a).

Observăm că problema se rezolvă și în cazul cînd vectorul f aparține subspațiului $\mathcal{R}'$. În acest caz soluția are forma

$$f = f + 0.$$

O altă soluție evident nu există: dacă am avea $f = g + h$, $g \in \mathcal{R}'$, $h \in \mathcal{R}''$, atunci am avea de asemenea $h = f - g \in \mathcal{R}'$, de unde $h = 0$, $g = f$.

8.52. Aplicînd descompunerii (18) teorema lui Pitagora (8.37), obținem

$$|f|^2 = |g|^2 + |h|^2, \tag{19}$$

de unde rezultă că are loc inegalitatea

$$0 \leqslant |h| \leqslant |f|, \tag{20}$$

care geometric exprimă faptul că *lungimea perpendicularei nu depășește lungimea oricărei oblice.*

Subliniem cazurile cînd în vreuna din inegalitățile (20) are loc semnul de egalitate. Condiția $0 = |h|$ este echivalentă condiției $f = g + 0 = g$, care înseamnă că f aparține subspa-

țiului $\mathcal{R}'$. Condiția $|h| = |f|$, arată că $g = 0$, conform teoremei lui Pitagora și, prin urmare,

$$f = 0 + h = h;$$

așadar, f este ortogonal la subspațiul $\mathcal{R}'$. Astfel, *egalitatea* $|h| = 0$ *înseamnă că vectorul* f *aparține subspațiului* $\mathcal{R}'$; *egalitatea* $|h| = |f|$ *revine la aceea că vectorul* f *este ortogonal acestui subspațiu.* Pentru orice altă așezare a vectorului f lungimea vectorului h va fi o mărime pozitivă mai mică decît lungimea vectorului f.

Fie acum $e_1, ..., e_k$ o bază ortonormală în subspațiul $\mathcal{R}'$ și fie $g = \sum_{j=1}^{k} a_j g_j$. Atunci conform 8.42 (17)

$$|g|^2 = \sum_{j=1}^{k} a_j^2.$$

Înlocuind această valoare $|g|^2$ în egalitatea (19), obținem

$$|f|^2 = |h|^2 + \sum_{j=1}^{k} a_j^2.$$

În particular, pentru orice sistem ortonormal finit e_1, e_2, ..., e_k și pentru orice vector f obținem inegalitatea

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^2 \leqslant |f|^2,$$

care se numește *inegalitatea lui Bessel.* Sensul ei geometric este evident: *pătratul lungimii vectorului* f *nu este mai mic decît suma pătratelor proiecțiilor sale pe orice* k *direcții ortogonale două cîte două.*

8.53. În aplicații este necesară soluția efectivă a problemei perpendicularei cînd în subspațiul $\mathcal{R}'$ este dată o anumită bază $\{b_1, b_2, ..., b_k\} = \{\mathbf{b}\}$, nu neapărat ortogonală sau normată.

Pentru a obține această soluție, descompunem vectorul căutat g astfel

$$g = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + ... + \beta_k b_k,$$

și aflăm $\beta_1, ..., \beta_k$ din condiția ca vectorul $h = f - g$ să fie ortogonal cu toți vectorii $b_1, b_2, ..., b_k$. Vom obține următorul sistem de ecuații:

$$(h, b_1) = (f - g, b_1) = (f, b_1) - \beta_1(b_1, b_1) - \beta_2(b_2, b_1) - ... - \beta_k(b_k, b_1) = 0,$$

$$(h, b_2) = (f - g, b_2) = (f, b_2) - \beta_1(b_1, b_2) - \beta_2(b_2, b_2) - ... - \beta_k(b_k, b_2) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(h, b_k) = (f - g, b_k) = (f, b_k) - \beta_1(b_1, b_k) - \beta_2(b_2, b_k) - ... - \beta_k(b_k, b_k) = 0$$

cu determinantul

$$D = \begin{vmatrix} (b_1, b_1) & (b_2, b_1) & ... & (b_k, b_1) \\ (b_1, b_2) & (b_2, b_2) & ... & (b_k, b_2) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ (b_1, b_k) & (b_2, b_k) & ... & (b_k, b_k) \end{vmatrix}$$

Determinantul D, ca determinant al matricii formei pozitiv definite (x, y) în baza $b_1, ..., b_k$ este diferit de zero (7.96). Rezolvînd sistemul după regula lui Cramer, obținem expresiile pentru coeficienții β_j $(j = 1, 2, ..., n)$:

$$\beta_j = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} (b_1, b_1) & ... & (b_{j-1}, b_1) & (f, b_1) & (b_{j+1}, b_1) & ... & (b_k, b_1) \\ (b_1, b_2) & ... & (b_{j-1}, b_2) & (f, b_2) & (b_{j+1}, b_2) & ... & (b_k, b_2) \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ (b_1, b_k) & ... & (b_{j-1}, b_k) & (f, b_k) & (b_{j+1}, b_k) & ... & (b_k, b_k) \end{vmatrix}.$$

8.54. Problema perpendicularei poate fi pusă nu numai pentru spații dar și pentru hiperplane. În acest caz ea se formulează astfel: într-un spațiu euclidian $\mathcal{R}$ este dat un hiperplan $\mathcal{R}''$ obținut prin translație paralelă a unui subspațiu $\mathcal{R}'$ cu un vector f; trebuie arătat că există și este unică o descompunere

$$f = g + h \qquad (21)$$

unde vectorul g aparține hiperplanului $\mathfrak{R}''$ iar h este ortogonal subspațiului $\mathfrak{R}'$ (geometric, vectorul g are extremitatea situată în hiperplanul $\mathfrak{R}''$, iar originea ca deobicei în originea coordonatelor; nu trebuie considerat că vectorul g are suportul situat în hiperplanul $\mathfrak{R}''$). Sensul geometric al acestei descompuneri este clarificat în fig. 1, *a*). În descompunerea (21) termenii nu sînt în general ortogonali.

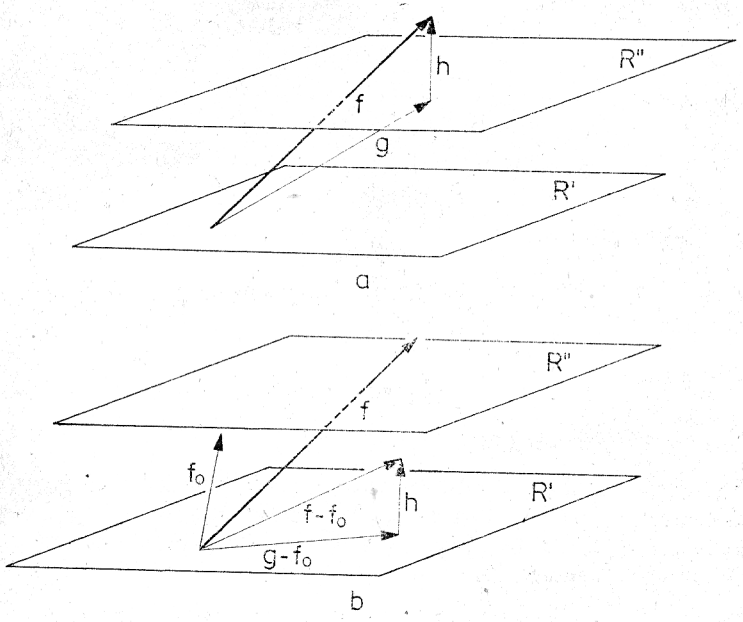


Fig. 1

Această problemă se reduce la problema 8.51. Într-adevăr, dacă în hiperplanul $\mathfrak{R}''$ este fixat un vector oarecare f_0 și scădem acest vector din ambii termeni ai egalității (21), atunci obținem problema descompunerii vectorului $f - f_0$ în termenii $g - f_0$ și h, primul aparținînd subspațiului $\mathfrak{R}'$ iar cel de al doilea fiind ortogonal acestui subspațiu (v. fig.1,*b*)). În virtutea rezultatului 8.51 există o astfel de descompunere; așadar, există și descompunerea (21). Rămîne de stabilit unicitatea descompunerii (21). În cazul prezenței a două descompuneri de tipul indicat

$$f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2$$

am avea

$$0 = (g_1 - g_2) + (h_1 - h_2).$$

Aici $g_1 - g_2$ aparține subspațiului $\mathfrak{R}'$ iar $h_1 - h_2$ este ortogonal acestui subspațiu. De aici, $g_1 - g_2 = h_1 - h_2 = 0$, ceea ce era necesar.

§ 8.6. Teorema generală a ortogonalizării

8.61. Pentru construirea sistemelor ortogonale într-un spațiu euclidian o valoare deosebită o are următoarea teoremă generală

TEOREMĂ (*teorema ortogonalizării*). *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ un șir de vectori ai unui spațiu euclidian $\mathfrak{R}$ (finit sau infinit). Notăm prin $\mathfrak{L}_k = \mathfrak{L}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ acoperirea liniară a primilor k vectori ai acestui sistem. Atunci există un sistem de vectori $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$, avînd următoarele proprietăți:*

1) *Pentru orice k natural acoperirea liniară $\mathfrak{L}'_k$ a vectorilor $y_1, y_2, \ldots, y_k$ coincide cu subspațiul $\mathfrak{L}_k$.*

2) *Pentru orice k natural vectorul y_{k+1} este ortogonal subspațiului $\mathfrak{L}_k$.*

Demonstrație. Punem $y_1 = x_1$. Evident că $\mathfrak{L}'_1 = \mathfrak{L}_1$.

Vom demonstra apoi teorema prin inducție; presupunem că vectorii $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sînt deja construiți satisfăcînd condițiile puse și construim vectorul y_{k+1} astfel încît el să satisfacă de asemenea proprietățile cerute.

Spațiul $\mathfrak{L}_k$ este finit-dimensional și de aceea în virtutea lui 8.51 are loc descompunerea

$$x_{k+1} = g_k + h_k, \tag{22}$$

unde vectorul g_k aparține subspațiului $\mathfrak{L}_k$, iar vectorul h_k este ortogonal acestui subspațiu. Punem $y_{k+1} = h_k$. Verificăm îndeplinirea condițiilor teoremei de ortogonalitate pentru vectorul y_{k+1} astfel determinat.

Subspațiul $\mathfrak{L}_k$ conține vectorii $y_1, y_2, \ldots, y_k$, conform ipotezei de inducție; de aceea și subspațiul $\mathfrak{L}_{k+1}$ conține acești vectori ($\mathfrak{L}_k \subset \mathfrak{L}_{k+1}$). În plus din formula (22) rezultă că $\mathfrak{L}_{k+1}$ conține vectorul $h_k = y_{k+1}$. Astfel, subspațiul $\mathfrak{L}_{k+1}$ conține toți vectorii $y_1, \ldots, y_{k+1}$ și odată cu ei întreaga acoperire liniară $\mathfrak{L}'_{k+1}$. Dar și invers, subspațiul $\mathfrak{L}'_{k+1}$ conține vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$, iar din (22), el conține și vectorul x_{k+1}; de aici

rezultă că $\mathfrak{L}'_{k+1}$ conține întreg subspațiul $\mathfrak{L}_{k+1}$. Așadar, $\mathfrak{L}'_{k+1} = \mathfrak{L}_{k+1}$ și prima condiție a teoremei de ortogonalitate este îndeplinită. Îndeplinirea celei de a doua condiții este evidentă conform construcției vectorului $y_{k+1} = h_k$.

Inducția este în acest mod realizată și teorema este complet demonstrată.

8.62. Inegalitatea (20) capătă în cazul considerat forma

$$0 \leqslant |y_{k+1}| \leqslant |x_{k+1}|. \tag{23}$$

Așa cum s-a arătat în 8.52, egalitatea $0 = |y_{k+1}|$ revine la faptul că vectorul x_{k+1} aparține subspațiului $\mathfrak{L}_k$, deci este liniar dependent de vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Cealaltă egalitate $|y_{k+1}| = |x_{k+1}|$ înseamnă că vectorul x_{k+1} este ortogonal subspațiului $\mathfrak{L}_k$, deci este ortogonal fiecăruia din vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

8.63. *Observație. Orice sistem de vectori $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ satisfăcînd condițiile teoremei de ortogonalitate, coincide pînă la factori multiplicativi cu sistemul $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ construit în demonstrația acestei teoreme.*

Într-adevăr, vectorul z_{k+1} trebuie să aparțină subspațiului $\mathfrak{L}_{k+1}$ și, prin urmare, el este ortogonal subspațiului $\mathfrak{L}_k$. Prima din aceste condiții conduce la existența unei descompuneri.

$$z_{k+1} = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ky_k + c_{k+1}y_{k+1} = \tilde{y}_k + c_{k+1}y_{k+1},$$

unde $\tilde{y}_k = c_1y_1 + \ldots + c_ky_k \in \mathfrak{L}_k$, iar $c_{k+1}y_{k+1}$ este ortogonal la $\mathfrak{L}_k$. Cea de a doua condiție conduce, în virtutea lui 8.52, la afirmația că $\tilde{y}_k = 0$, deci

$$z_{k+1} = c_{k+1}y_{k+1},$$

ceea ce trebuia arătat.

8.64. *Polinoame Legendre.* Considerăm în spațiul euclidian $\mathfrak{R}_2(-1,1)$ sistemul de funcții $x_0(t) = 1, x_1(t) = t, \ldots, x_k(t) = t^k, \ldots$ și aplicăm acestuia teorema de ortogonalizare. Evident, subspațiul $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(1, t, \ldots, t_k)$ coincide în acest caz cu mulțimea tuturor polinoamelor de grad cel mult k. Funcțiile $x_0(t), \ldots, x_k(t)$ sînt liniar independente (2.22 **d**) și de aceea funcțiile $y_0(t), y_1(t), \ldots$ obținute prin ortogonalizare sînt toate diferite de zero, conform 8.52. Prin construcție $y_k(t)$ trebuie să fie polinom de grad k în t.

În particular, calculul direct după metoda expusă în teorema de ortogonalizare dă succesiv

$$y_0(t) = 1, \quad y_1(t) = t, \quad y_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad y_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t \text{ etc.}$$

Aceste polinoame au fost introduse în 1785 de matematicianul francez Legendre în legătură cu probleme din teoria potențialului. Formula generală pentru polinoamele Legendre a fost descoperită de Rodrigues în 1814. Anume, el a arătat că pînă la un factor multiplicativ, polinomul $y_n(t)$ este egal cu polinomul

$$p_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}[(t^2 - 1)^n] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Pentru demonstrația acestui fapt folosim observația 8.63. Anume, arătăm că polinomul $p_n(t)$ satisface condițiile teoremei de ortogonalizare; în virtutea observației făcute vom avea pentru fiecare $n \geqslant 0$ egalitatea $p_n(t) = c_n y_n(t)$, ceea ce era necesar.

a. *Acoperirea liniară a vectorilor $p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t)$ coincide cu mulțimea tuturor polinoamelor de grad n.* Într-adevăr, așa cum se vede din formulele (24), polinomul $p_k(t)$ este în mod evident polinom de grad k în t; în particular,

$$\left.\begin{aligned} p_0(t) &= a_{00}, \\ p_1(t) &= a_{10} + a_{11}t, \\ p_2(t) &= a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_k(t) &= a_{k0} + a_{k1}t + \ldots + a_{kk}t^k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n(t) &= a_{n0} + a_{n1}t + \ldots + a_{nk}t^k + \ldots + a_{nn}t^n, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

unde coeficienții termenilor de grad superior $a_{00}, a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sînt diferiți de zero.

Astfel, toate polinoamele $p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t)$ aparțin acoperirii liniare a funcțiilor $1, t, \ldots, t^n$ care este tocmai mulțimea $\mathfrak{L}_n$ a tuturor polinoamelor de grad cel mult n. Deoarece matricea relațiilor liniare (25) are determinantul $a_{00}a_{11}\ldots a_{nn}$, diferit de zero, atunci și invers, funcțiile $1, t, t^2, \ldots, t^n$ pot fi exprimate liniar prin $p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t)$; de aceea acoperirea liniară $\mathfrak{L}[p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t)]$ coincide cu acoperirea liniară $\mathfrak{L}(1, t, t^2, \ldots, t^n)$ și prin urmare, coincide cu mulțimea $\mathfrak{L}_n$, ceea ce trebuia dovedit.

b. *Vectorul $p_n(t)$ este ortogonal subspațiului $\mathfrak{L}_{n-1}$.* Este suficient de verificat că polinomul $p_n(t)$ este ortogonal în $\mathfrak{R}_2(-1, 1)$ funcțiilor $1, t, \ldots, t^{n-1}$.

Pentru demonstrație vom utiliza formula de integrare prin părți pe un interval dat, cunoscută din analiza elementară. Derivatele care apar în această formulă pentru polinoame sînt aceleași derivate pe care le-am considerat în 6.73 **a** din punct de vedere pur algebric. În particular, polinomul

$$[(t^2 - 1)^n] = (t - 1)^n (t + 1)^n$$

în virtutea lui 6.73 c are derivate egale cu zero de ordin 0, 1, ..., $n-1$ în punctele $t = \pm 1$.

Vom calcula produsul scalar al funcțiilor t^k și $p_n(t)$. Integrînd prin părți, obținem

$$(t^k, p_n(t)) = \int_{-1}^{+1} t^k[(t^2-1)^n]^{(n)}\,dt =$$

$$= t^k[(t^2-1)^n]^{(n-1)}\Big|_{-1}^{+1} - k\int_{-1}^{+1} t^{k-1}[(t^2-1)^n]^{(n-1)}\,dt.$$

Primul termen, cel neintegrat, al expresiei obținute este egal cu zero, conform celor spuse anterior. Integrala rămasă poate fi din nou calculată prin părți și continuăm acest proces pînă ce exponentul lui t ajunge la zero:

$$(t^k, p_n(t)) = -kt^{k-1}[(t^2-1)^n]^{(n-2)}\Big|_{-1}^{+1} +$$

$$+ k(k-1)\int_{-1}^{+1} t^{k-2}[(t^2-1)^n]^{(n-2)}\,dt =$$

.....

$$= \pm k!\int_{-1}^{+1}[(t^2-1)^n]^{(n-k)}\,dt = \pm k!\,[(t^2-1)^n]^{(n-k-1)}\Big|_{-1}^{+1} = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Astfel, am arătat că pentru orice n polinomul $y_n(t)$ coincide pînă la un factor numeric cu polinomul $p_n(t) = [(t^2-1)^n]^{(n)}$.

Calculăm valoarea $p_n(1)$. Pentru aceasta aplicăm funcțiilor $(t^2-1)^n = (t+1)^n(t-1)^n$ regula derivatei de ordin n a unui produs:

$$[(t+1)^n(t-1)^n]^{(n)} =$$

$$= (t+1)^n[(t-1)^n]^{(n)} + C_n^1[(t+1)^n]'[(t-1)^n]^{(n-1)} + \ldots =$$

$$= (t+1)^n n! + C_n^1 n(t+1)^{n-1} n(n-1)\ldots 2\,(t-1) + \ldots$$

Înlocuind aici $t = 1$ toți termenii acestei sume sînt nuli începînd cu al doilea. Așadar, $p_n(1) = 2^n \cdot n!$.

Pentru motive calculatorii este comod ca funcțiile ortogonale considerate să fie egale cu 1 pentru $t = 1$. Pentru a realiza acest lucru, introducem factorul $\dfrac{1}{2^n \cdot n!}$. Polinoamele astfel obținute se numesc *polinoame Legendre*; polinomul Legendre de grad n se notează prin $P_n(t)$, deci

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!}(t^2-1)^n]^{(n)}.$$

§ 8.7. Determinantul Gram

8.71. Se numește *determinant* Gram, orice determinant de forma

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_k) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_k, x_1) & (x_k, x_2) & \ldots & (x_k, x_k) \end{vmatrix},$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt vectori oarecare din spațiul euclidian $\mathcal{R}$. Știm că în cazul vectorilor liniar independenți $x_1, x_2, \ldots, x_n$ acest determinant este pozitiv (7.96).

Pentru calculul determinantului Gram aplicăm vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_k$ procesul de ortogonalizare. Fie de exemplu $y_1 = x_1$ și vectorul $y_2 = \alpha_1 y_1 + x_2$ ortogonal lui y_1. Înlocuim în toate locurile în determinant vectorul x_1 prin y_1. Apoi adăugăm coloanei a doua prima coloană a determinantului Gram înmulțită cu α_1 (atribuind α_1 celui de al doilea factor al produselor scalare) și apoi adăugăm la cea de a doua linie elementele primei linii a determinantului înmulțite cu α_1 (atribuind α_1 primului factor al produselor scalare). În rezultat, pe toate acele locuri ale determinantului unde se afla x_2, se va găsi acum vectorul y_2.

Fie apoi $y_3 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + x_3$ ortogonal la y_1 și la y_2; adăugăm la coloana a treia prima coloană înmulțită cu β_1 și a doua înmulțită cu β_2; aceeași operație este efectuată pentru linii. Ca rezultat x_3 apare în toate locurile înlocuit cu y_3. Continuăm acest procedeu pînă la ultima coloană. Deoarece operațiile noastre nu au modificat valoarea determinantului, vom obține ca rezultat

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (y_2, y_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (y_k, y_k) \end{vmatrix} =$$

$$= (y_1, y_1)(y_2, y_2)\ldots(y_k, y_k). \qquad (26)$$

Conform 8.62 rezultă următoarea inegalitate

$$0 \leqslant G(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leqslant (x_1, x_1)(x_2, x_2) \ldots (x_k, x_k). \qquad (27)$$

Să vedem acum în ce condiții mărimea $G(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ poate lua valorile extreme 0 sau $(x_1, x_1) \ldots (x_k, x_k)$.

Din expresia (26) a determinantului Gram rezultă că el este nul dacă și numai dacă unul din vectorii $y_1, y_2, \ldots, y_k$ este nul. Dar conform 8.62 aceasta echivalează cu dependența liniară a vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Pe de altă parte, egalitatea determinantului Gram cu membrul drept al inegalității (27) este posibilă conform formulelor (26) și 8.62 numai în cazul cînd vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt ortogonali doi cîte doi. Astfel, am demonstrat următoarea teoremă:

TEOREMĂ (*relativ la determinantul Gram*). *Determinantul Gram al vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_k$ este nul dacă acești vectori sînt liniar dependenți și este pozitiv dacă vectorii sînt liniar independenți; el este egal cu produsul pătratelor lungimilor vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dacă ei sînt ortogonali doi cîte doi, în caz contrar el este mai mic decît această mărime.*

8.72. *Volumul paralelipipedului k-dimensional.* Aria paralelogramului este egală cu produsul între lungimile bazei și înălțimii, așa cum se știe din geometria plană. Dacă paralelogramul este construit pe doi vectori x_1, x_2, atunci se poate lua ca bază unul din vectori iar ca lungime a înălțimii, lungimea perpendicularei dusă din extremitatea vectorului x_2 pe suportul vectorului x_1.

În mod analog, volumul paralelipipedului construit pe vectorii x_1, x_2, x_3 este egal cu produsul dintre aria bazei și lungimea înălțimii; aria bazei este aria paralelogramului construit pe vectorii x_1, x_2, iar înălțimea este perpendiculara dusă din extremitatea vectorului x_3 pe planul vectorilor x_1, x_2.

Aceste considerații fac naturală următoarea definiție inductivă a volumului paralelipipedului k-dimensional într-un spațiu euclidian.

Fie un sistem de vectori $x_1, x_2, \ldots, x_k$ în spațiul euclidian $\mathfrak{R}$. Notăm cu h_j perpendiculara dusă din extremitatea vectorului x_{j+1} pe subspațiul $\mathfrak{L}(x_1, x_2, \ldots, x_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$.

Introducem apoi următoarele notații:

$V_1 = |x_1|$ (*volumul unidimensional — lungimea vectorului* x_1);

$V_2 = V_1 \cdot |h_1|$ (*volumul bidimensional — aria paralelogramului construit pe vectorii* x_1, x_2);

$V_3 = V_2 \cdot |h_2|$ (*volumul tridimensional — volumul paralelipipedului construit pe vectorii* x_1, x_2, x_3);

. . . . . .

$V_k = V_{k-1} \cdot |h_{k-1}|$ (*volumul k-dimensional — volumul paralelipipedului k-dimensional construit pe vectorii* $x_1, x_2, \ldots, x_k$).

Evident, volumul V_k poate fi calculat după formula

$$V_k = V[x_1, x_2, \ldots, x_k] = |x_1| \cdot |h_1| \ldots |h_{k-1}|.$$

Folosind formula (26) putem exprima mărimea V_k prin vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$:

$$V_k^2 = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_k) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_k, x_1) & (x_k, x_2) & \ldots & (x_k, x_k) \end{vmatrix}.$$

Astfel, *determinantul Gram pentru k vectori* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *este egal cu pătratul volumului paralelipipedului k-dimensional construit pe acești vectori.*

8.73. Fie $\xi_i^{(j)}$ coordonatele vectorului x_j relativ la o bază ortonormală $e_1, e_2, \ldots, e_n$ $(j = 1, 2, \ldots, k;\ i = 1, 2, \ldots, n)$.

Exprimînd produsele scalare ale vectorilor prin coordonate, obținem următoarea formulă

$$V_k^2 = \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)}\xi_1^{(1)} + \ldots + \xi_n^{(1)}\xi_n^{(1)} & \ldots & \xi_1^{(1)}\xi_1^{(k)} + \ldots + \xi_n^{(1)}\xi_n^{(k)} \\ \xi_1^{(2)}\xi_1^{(1)} + \ldots + \xi_n^{(2)}\xi_n^{(1)} & \ldots & \xi_1^{(2)}\xi_1^{(k)} + \ldots + \xi_n^{(2)}\xi_n^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1^{(k)}\xi_1^{(1)} + \ldots + \xi_n^{(k)}\xi_n^{(1)} & \ldots & \xi_1^{(k)}\xi_1^{(k)} + \ldots + \xi_n^{(k)}\xi_n^{(k)} \end{vmatrix}.$$

Matricea determinantului V_k^2 este, așa cum se vede imediat, produsul dintre $k \times n$-matricea A a coordonatelor vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_k$

$$A = \begin{Vmatrix} \xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)} \ldots \xi_n^{(1)} \\ \xi_1^{(2)}\xi_2^{(2)} \ldots \xi_n^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_1^{(k)}\xi_2^{(k)} \ldots \xi_n^{(k)} \end{Vmatrix} \tag{28}$$

cu transpusa sa, anume $n \times k$-matricea

$$A' = \begin{Vmatrix} \xi_1^{(1)}\xi_1^{(2)} \ldots \xi_1^{(k)} \\ \xi_2^{(1)}\xi_2^{(2)} \ldots \xi_2^{(k)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_n^{(1)}\xi_n^{(2)} \ldots \xi_n^{(k)} \end{Vmatrix}.$$

Aplicînd formula 4.54 (14) determinantului V_k^2, rezultă

$$V_k^2 = M_{1,2,\ldots,k}^{1,2,\ldots,k}(AA') = \sum_{i_1,\ldots,i_k} M_{i_1,\ldots,i_k}^{1,\ldots,k}(A) M_{1,\ldots,k}^{i_1,\ldots,i_k}(A'),$$

unde însumarea se face după indicii $i_1 < \ldots < i_k$, luînd valori între 1 și n.

Deoarece

$$M_{1,\ldots,k}^{i_1,\ldots,i_k}(A') = M_{i_1,\ldots,i_k}^{1,\ldots,k}(A),$$

atunci

$$V_k^2 = \sum_{i_1,\ldots,i_k} [M_{i_1,\ldots,i_k}^{1,\ldots,k}(A)]^2.$$

Așadar, *pătratul volumului paralelipipedului k-dimensional construit pe vectorii x_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ este egal cu suma pătratelor tuturor minorilor de ordin k din matricea coordonatelor vectorilor x_j relativ la o bază ortonormală oarecare $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*

8.74. În cazul $k = n$ matricea $||\xi_i^{(j)}||$ are doar un minor de ordin k, egal cu determinantul matricii $||\xi_i^{(j)}||$. De aceea, *volumul paralelipipedului construit pe vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este egal în valoare absolută cu determinantul format din coordonatele vectorilor x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ relativ la orice bază ortonormală.*

8.75. *Inegalitatea lui Hadamard.* Din rezultatul 8.74 se poate obține o evaluare importantă a valorii absolute a unui determinant oarecare de ordin k

$$D = \begin{vmatrix} \xi_{11} \xi_{12} \ldots \xi_{1k} \\ \xi_{21} \xi_{22} \ldots \xi_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_{k1} \xi_{k2} \ldots \xi_{kk} \end{vmatrix}.$$

Vom considera numerele $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ca fiind coordonatele vectorului x_i într-o bază ortonormală a unui spațiu euclidian k-dimensional. Rezultatul 8.74 ne dă posibilitatea să interpretăm valoarea absolută a determinantului D ca volum al paralelipipedului k-dimensional construit pe vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$ și să folosim exprimarea volumului prin determinantul Gram $D^2 = G(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Aplicînd teorema 8.71, obținem

$$D^2 \leqslant (x_1, x_1)(x_2, x_2) \ldots (x_k, x_k) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \xi_{ij}^2.$$

Această inegalitate se numește *inegalitatea lui Hadamard.*

Trebuie subliniat că ea se reduce la o egalitate dacă și numai dacă vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt ortogonali doi cîte doi (conform teoremei 8.71).

Inegalitatea lui Hadamard are un sens geometric evident: *volumul unui paralelipiped nu este mai mare decît produsul lungimilor muchiilor sale; el este egal cu acest produs dacă și numai dacă muchiile sale sînt ortogonale două cîte două.*

§ 8.8. Sisteme incompatibile de ecuații liniare și metoda celor mai mici pătrate

8.81. Considerăm un sistem incompatibil de ecuații liniare

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Acest sistem fiind incompatibil, nu are soluție, deci nu există numere $c_1, c_2, \ldots, c_m$ care puse în locul necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ să verifice toate ecuațiile (29).

Dacă se pun numere oarecare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ în locul necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ în membrii stîngi ai ecuațiilor (29), atunci se obțin rezultatele $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, diferite de $b_1, b_2, \ldots, b_n$ respectiv. Ne punem următoarea problemă: avînd date numerele a_{jk} și b_k $(k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ *să determinăm numerele* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ *astfel încît abaterea pătratică a rezultatelor* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *de mărimile date* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *definită prin*

$$\delta^2 = \sum_{j=1}^{n} (\gamma_j - b_j)^2, \tag{30}$$

să fie minimă, dintre toate valorile posibile și să găsim minimul acestei abateri.

Această problemă apare în practică atunci cînd coeficienții ξ_j care apar punînd condiția dependenței liniare a unei mărimi b de mărimile $a_1, a_2, \ldots, a_m$, anume

$$b = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_m a_m,$$

trebuie să fie găsiți din rezultatele a n măsurători ale mărimilor a_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ și ale mărimii b. Dacă la măsurătoarea i sînt obținute valorile a_{ij} pentru mărimile a_j și valorile b_i pentru mărimea b, atunci trebuie să formăm ecuația

$$\xi_1 a_{i1} + \xi_2 a_{i2} + \ldots + \xi_m a_{im} = b_i; \tag{31}$$

cele m măsurători conduc la un sistem de n ecuații de forma (31), adică tocmai la un sistem de forma (29). Acest sistem, datorită erorilor inevitabile de măsurătoare va fi în general incompatibil (mai ales dacă $n > m$) și problema determinării coeficienților $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ se înlocuiește cu problema ca fiecare ecuație să fie satisfăcută cu aproximație, dar cu eroare minimă comună. Dacă pentru măsura erorii se ia media pătratică a abaterilor mărimilor

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_i$$

față de datele b_j, definită prin formula (30), atunci se ajunge la problema formulată mai sus. Cunoașterea mărimii δ^2 în acest caz este de asemenea utilă, pentru că aceasta ajută la evaluarea mediei măsurătorilor.

8.82. *Soluția* se poate obține imediat dacă interpretăm problema geometric în spațiul real $\mathcal{R}_n$. Considerăm m vectori

$a_1, a_2, \ldots, a_m$, ale căror componente sînt scrise în coloanele sistemului (29)

$$a_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \ldots, a_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm}).$$

Formînd combinația liniară $\xi_1 a_1 + \ldots + \xi_m a_m$, obținem vectorul $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. Trebuie determinate numerele $\xi_1, \ldots, \xi_m$ astfel încît vectorul γ să aibă în normă cea mai mică abatere față de vectorul dat $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Mulțimea tuturor combinațiilor liniare ale vectorilor $a_1, \ldots, a_m$ formează subspațiul $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. În acest subspațiu cea mai mică distanță față de vectorul b o are proiecția vectorului b pe subspațiul $\mathfrak{L}$. Numerele $\xi_1, \ldots, \xi_m$ trebuie deci să fie alese astfel încît combinația liniară $\xi_1 a_1 + \ldots + \xi_m a_m$ să conducă la proiecția vectorului b pe subspațiul $\mathfrak{L}$. Dar soluția acestei probleme ne este cunoscută; ea este dată prin formulele 8.53, anume avem

$$\xi_j = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} (a_1, a_1) \ldots (a_{j-1}, a_1) & (b, a_1) & (a_{j+1}, a_1) \ldots (a_m, b_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_1, a_m) \ldots (a_{j-1}, a_m) & (b, a_m) & (a_{j+1}, a_m) \ldots (a_m, b_m) \end{vmatrix},$$

unde D este determinantul Gram $G(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

8.83. Rezultatele 8.72 ne dau posibilitatea de a evalua însăși abaterea δ. Într-adevăr, mărimea δ este înălțimea paralelipipedului $(m+1)$-dimensional construit pe vectorii $a_1, \ldots, a_m, b$ și de aceea egală cu raportul volumelor

$$\frac{V(a_1, a_2, \ldots, a_m, b)}{V(a_1, a_2, \ldots, a_m)}.$$

Scriind fiecare volume cu ajutorul determinanților Gram, rezultă în final

$$\delta^2 = \frac{G(a_1, a_2, \ldots, a_m, b)}{G(a_1, a_2, \ldots, a_m)}.$$

Cu aceasta, problema pusă este complet rezolvată.

8.84. În practica de calcul apare adesea următoarea problemă, numită *interpolare cu eroarea pătratică minimă*: *pe segmentul* $a \leqslant t \leqslant b$ *este dată*

o funcție $f_0(t)$ și se cere să se indice un polinom $P(t)$ de grad k, $k < n$ astfel încît abaterea pătratică față de funcția $f_0(t)$ exprimată prin formula

$$\delta^2(f_0, P) = \sum_{j=0}^{n} [f_0(t_j) - P(t_j)]^2,$$

să fie minimă (aici $t_0, t_1, \ldots, t_n$ sînt anumite puncte fixate din intervalul $a \leqslant t \leqslant b$).

O soluție simplă a acestei probleme pe baza unor considerații geometrice a fost propusă de M. A. Krasnoselski. Anume, se consideră spațiul $\mathcal{R}$ format din funcțiile $f(t)$ considerate *numai* în punctele $t_0, t_1, \ldots, t_n$, cu produsul scalar

$$(f, g) = \sum_{j=0}^{n} f(t_j)\, g(t_j).$$

Atunci problema pusă revine la determinarea proiecției vectorului $f_0(t)$ pe subspațiul tuturor polinoamelor de grad nedepășind k. Coeficienții polinomului căutat $P_0(t) = \xi_0 + \xi_1 t + \ldots + \xi_k t^k$ sînt dați prin aceleași formule ca în problema rezolvată anterior

$$\xi_j = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} (1,1) & (t,1) \ldots (t^{j-1},1) & (f_0,1) & (t^{j+1},1) \ldots (t^k,1) \\ (1,t) & (t,t) \ldots (t^{j-1},t) & (f_0,t) & (t^{j+1},t) \ldots (t^k,t) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1,t^k) & (t,t^k) \ldots (t^{j-1},t^k) & (f_0,t^k) & (t^{j+1},t^k) \ldots (t^k,t^k) \end{vmatrix},$$

unde D este determinantul Gram $D(1, t, \ldots, t^k)$.

Abaterea pătratică minimă δ^2 se poate calcula după formula

$$\delta^2(f_0, P) = \frac{D(1, t, \ldots, t^k, f)}{D(1, t, \ldots, t^k)}.$$

§ 8.9. Operatori adjuncți și izometrii

8.91. *Operatori adjuncți (conjugați) relativ la forma (x, y).* Formulăm aici rezultatele din § 7.6 relativ la legătura între operatori liniari și forme biliniare cu aplicație la cazul cînd forma fixată este (x, y) — produsul scalar al vectorilor x și y. Fie $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ operatori liniari într-un spațiu euclidian $\mathcal{R}_n$. Considerăm formele biliniare $A(x, y)$ și $B(x, y)$ prin formulele

$$A(x, y) = (\mathcal{A}x, y), \quad B(x, y) = (x, \mathcal{B}y). \tag{32}$$

Deoarece baza canonică a formei (x, y) este orice bază ortonormală a spațiului și coeficienții canonici ai formei (x, y) în orice astfel de bază sînt egali cu 1, atunci conform 7.61

matricea $\|a_{jk}\|$ a formei $A(x, y)$ în orice bază ortonormală coincide cu matricea $\|a_k^{(j)}\|$ a operatorului $\mathcal{A}$, iar matricea $\|b_{jk}\|$ a formei $B(x, y)$ este *transpusa* matricii $\|b_j^{(k)}\|$ a operatorului $\mathcal{B}$. Invers (7.62), dacă în spațiul $\mathcal{R}_n$ sînt date formele biliniare $A(x, y)$ și $B(x, y)$, atunci există și sînt unici operatorii liniari $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ astfel încît să fie îndeplinite egalitățile (32). Apoi, aplicînd rezultatele 7.63 formei (x, y), obținem următorul rezultat:

TEOREMĂ. *Pentru orice operator liniar $\mathcal{A}$ în spațiul euclidian n-dimensional $\mathcal{R}_n$ există și este unic un operator liniar $\mathcal{A}'$, numit adjunctul (sau conjugatul) lui $\mathcal{A}$, satisfăcînd relația*

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}'y),$$

pentru orice x, y din $\mathcal{R}_n$. Matricea operatorului $\mathcal{A}'$ în orice bază ortonormală a spațiului $\mathcal{R}_n$ este transpusa matricii operatorului $\mathcal{A}$.

8.92. Cu ajutorul operației de adjuncție se introduc într-un spațiu euclidian următoarele clase de operatori.

a. *Operatorii simetrici* (sau *autoadjuncți*) sînt definiți prin egalitatea

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}.$$

Un operator simetric este caracterizat prin aceea că într-o bază ortonormală, matricea lui nu se modifică prin transpunere.

b. *Operatorii antisimetrici* definiți prin

$$\mathcal{A}' = -\mathcal{A}.$$

Un astfel de operator se caracterizează prin aceea că într-o bază ortonormală, matricea lui își schimbă semnul prin transpunere.

c. *Operatorii normali* definiți prin

$$\mathcal{A}'\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}'.$$

Este evident că operatorii simetrici și cei antisimetrici sînt normali. Studiul claselor de operatori va fi efectuat în § 9.4.

8.93. Formulăm acum pentru spațiile euclidiene $\mathcal{R}_n$ rezultatele 7.73—7.76 relativ la invarianții operatorilor. Con-

siderăm operatori liniari inversabili $\mathcal{Q} : \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_n$ care invariază produsul scalar, adică

$$(\mathcal{Q}x, \mathcal{Q}y) = (x, y) \text{ pentru orice } x, y \in \mathcal{R}_n.$$

Acești operatori au fost denumiți în 7.73 invarianți relativ la forma (x, y) și vor fi numiți acum *izometrici*. Un operator izometric $\mathcal{Q}$ este caracterizat prin relația 7.73 (33)

$$\mathcal{Q}'\mathcal{Q} = \mathcal{E},$$

unde $\mathcal{Q}'$ este operatorul conjugat cu $\mathcal{Q}$ relativ la forma (x, y), adică operatorul adjunct al lui $\mathcal{Q}$ în sensul lui 8.91. Operatorul invers $\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}'$ al unui operator izometric $\mathcal{Q}$ este de asemenea izometric. Produsul a doi operatori izometrici este de asemenea izometric (7.74).

Conform 7.75 un operator izometric $\mathcal{Q}$ se caracterizează prin aceea că orice bază ortonormală $e_1, \ldots, e_n$ este transformată prin acest operator într-o bază de asemenea ortonormală $f_1 = \mathcal{Q}e_1, \ldots, f_n = \mathcal{Q}e_n$. Matricea $Q = ||q_i^{(j)}||$ a unui operator izometric $\mathcal{Q}$ în orice bază ortonormală se numește *matrice ortogonală*. O matrice ortogonală se caracterizează prin condițiile 7.76 (35), care în acest caz capătă forma

$$\sum_{i=1}^{n} q_k^{(i)} q_k^{(i)} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = k, \\ 0 \text{ pentru } j \neq k, \end{cases}$$

sau prin condițiile 7.76 (35′), care au forma

$$\sum_{k=1}^{m} q_k^{(j)} q_k^{(m)} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = m, \\ 0 \text{ pentru } j \neq m, \end{cases}$$

adică suma pătratelor elementelor oricărei linii (respectiv oricărei coloane) este egală cu 1, iar suma produselor elementelor corespunzătoare a două linii (respectiv coloane) distincte este nulă.

8.94. În virtutea egalității $\mathcal{Q}^{-1} = \mathcal{Q}'$, inversarea formulelor de trecere de la o bază ortonormală $e_1, \ldots, e_n$ la o altă bază ortonormală $f_1, \ldots, f_n$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= q_1^{(1)} e_1 + \ldots + q_n^{(1)} e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= q_1^{(n)} e_1 + \ldots + q_n^{(n)} e_n \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

se face prin formulele

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= q_1^{(1)} f_1 + \ldots + q_1^{(n)} f_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= q_n^{(1)} f_1 + \ldots + q_n^{(n)} f_n. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Conform 5.31 coordonatele η_k ale vectorului x în baza $f_1, \ldots, f_n$ se exprimă prin coordonatele ξ_j ale aceluiași vector în baza $e_1, \ldots, e_n$ după formulele

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= q_1^{(1)} \xi_1 + \ldots + q_n^{(1)} \xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n &= q_1^{(n)} \xi_1 + \ldots + q_n^{(n)} \xi_n \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

cu formulele inverse

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= q_1^{(1)} \eta_1 + \ldots + q_1^{(n)} \eta_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= q_n^{(1)} \eta_1 + \ldots + q_n^{(n)} \eta_n. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

8.95. Considerăm aici încă o problemă. Fiind date $m < n$ linii de numere $q_i^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$, satisfăcînd condițiile

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^{(j)} q_i^{(k)} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = k, \\ 0 \text{ pentru } j \neq k. \end{cases}$$

Ne propunem să determinăm încă $n-m$ linii de numere $q_i^{(s)}$, $s = m+1, \ldots, n$ astfel încît $n \times n$-matricea $||q_i^{(j)}||$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ să fie ortogonală.

Soluția se obține în mod simplu din considerente geometrice. Interpretînd liniile date $q_i^{(j)}$ ca fiind coordonatele a m vectori în spațiul euclidian $\mathcal{R}_n$ cu produsul scalar (8.22 b)

$$((\xi_1, \ldots, \xi_n), (\eta_1, \ldots, \eta_n)) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j,$$

vedem că ne sînt dați m vectori ortonormali $q_1, \ldots, q_m$ și problema constă în a-i completa pînă la o bază ortonormală în spațiul $\mathcal{R}_n$. În această formulare geometrică problema devine imediat rezolvabilă: de exemplu, se pot completa vec-

torii $q_1, \ldots, q_m$ în mod arbitrar pînă la un sistem de n vectori liniar independenți și apoi să se recurgă la procedeul de ortonormalizare.

8.96. Subliniem acum cîteva proprietăți ale operatorilor simetrici.

a. *Dacă un subspațiu $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ este invariant relativ la un operator $\mathcal{A}$, atunci complementul ortogonal al subspațiului $\mathcal{R}'$ este conform* 7.65 *invariant relativ la operatorul adjunct $\mathcal{A}'$.*

De aceea, dacă $\mathcal{A}$ este un operator simetric atunci din invarianța relativ la $\mathcal{A}$ a subspațiului $\mathcal{R}'$ rezultă invarianța relativ la $\mathcal{A}$ a complementului ortogonal al subspațiului $\mathcal{R}'$.

b. Arătăm că în plan ($n = 2$) *orice operator simetric admite un vector propriu.*

Într-adevăr, în cazul considerat ecuația care dă valorile proprii

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

este o ecuație de gradul doi avînd discriminantul

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0,$$

de aceea rădăcinile ei sînt reale.

c. Ținînd seama de proprietățile a și b și de existența unui plan invariant pentru orice operator acționînd într-un spațiu real (care rezultă din expresia formei Jordan reale 6.63 (18), se poate demonstra *că în orice spațiu $\mathcal{R}_n$ orice operator simetric are o bază ortogonală formată din vectori proprii.* În cele ce urmează, vom obține acest rezultat din considerente generale, fără a apela la forma Jordan reală (9.45).

PROBLEME

1. Numim produs scalar a doi vectori din spațiul $\mathcal{V}_3$ produsul mărimilor lor. Se obține o structură de spațiu euclidian?

2. Dar dacă numim produs scalar a doi vectori din $\mathcal{V}_3$ produsul lungimilor lor prin cubul cosinusului unghiului dintre ei?

3. Dar dacă numim produs scalar dublul produsului scalar uzual?

4. Să se determine unghiul dintre muchiile opuse ale unui tetraedru regulat.

5. Să se găsească unghiurile triunghiului format în spațiul $\mathcal{R}_2$ $(-1, 1)$ de vectorii $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$ și $x_3(t) = 1 - t$.

6. Să se scrie inegalitatea triunghiului în spațiul $\mathcal{C}_2(a, b)$.

7. Să se determine cosinusul unghiurilor dintre dreapta $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n$ și axele de coordonate în spațiul $\mathcal{R}_n$.

8. În spațiul $\mathcal{R}_n$ să se descompună un vector f în suma a doi vectori, unul situat în acoperirea liniară a vectorilor b_i, iar celălalt ortogonal acestui subspațiu:

a) $f = (5, 2, -2, 2)$, $b_1 = (2, 1, 1, -1)$, $b_2 = (1, 1, 3, 0)$;

b) $f = (-3, 5, 9, 3)$, $b_1 = (1, 1, 1, 1)$, $b_2 = (2, -1, 1, 1)$, $b_3 = (2, -7, -1, -1)$.

9. Să se arate că dintre toți vectorii subspațiului $\mathcal{R}'$ (8.51) unghiul cel mai mic cu vectorul f îl formează vectorul g.

10. Să se arate că dacă vectorul g_0 din spațiul $\mathcal{R}'$ este ortogonal proiecției g a vectorului f pe acest subspațiu, atunci g_0 este ortogonal lui f însuși.

11. Să se arate că perpendiculara dusă din originea coordonatelor pe un hiperplan H are cea mai mică lungime dintre toți vectorii care unesc originea coordonatelor cu punctele acestui hiperplan.

12. În spațiul $\mathcal{V}_3$ cu baza $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ este dat sistemul de vectori

$$x_1 = \vec{i},\ x_2 = 2\mathrm{i},\ x_3 = 3\vec{i}, x_4 = 4\vec{i} - 2\vec{j},\ x_5 = -\vec{i} + 10\vec{j},\ x_6 = \vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}.$$

Construiți vectorii ortogonali doi cîte doi $y_1, y_2, \ldots, y_6$ (8.61).

13. În subspațiul tridimensional al spațiului $\mathcal{R}_4$ generat de vectorii $(1, 2, 1, 3)$, $(4, 1, 1, 1)$, $(3, 1, 1, 0)$, să se construiască o bază ortogonală folosind metoda din teorema de ortogonalizare.

14. Fixăm subspații $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$ ale unui spațiu euclidian $\mathcal{R}$. Considerăm perpendicularele duse din extremitățile vectorilor unitate $e' \in \mathcal{R}'$ pe $\mathcal{R}''$ și fie $m(\mathcal{R}', \mathcal{R}'')$ valoarea maximă a lungimilor acestora; în mod analog se definește mărimea $m(\mathcal{R}'', \mathcal{R}')$. Mărimea nenegativă $\theta = \max\{m(\mathcal{R}', \mathcal{R}''), m(\mathcal{R}'', \mathcal{R}')\}$ se numește *deschiderea subspațiilor $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$*. Să se arate că dacă $\theta < 1$, atunci subspațiile $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$ au aceeași dimensiune (M. A. Krasnoselski, M. G. Krein).

15. Să se determine coeficientul A_n al termenului de grad superior din polinomul Legendre $P_n(t)$.

16. Să se arate că polinomul Legendre $P_n(t)$ este funcție pară pentru n par și funcție impară pentru n impar. Să se determine în particular $P_n(-1)$.

17. Să se arate că în dezvoltarea polinomului $tP_{n-1}(t)$ după polinoamele Legendre

$$tP_{n-1}(t) = a_0P_0(t) + a_1P_1(t) + \ldots + a_nP_n(t)$$

coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_{n-3}$ și a_{n-1} sînt egali cu zero.

18. Să se determine coeficienții a_{n-2} și a_n în dezvoltarea polinomului $tP_{n-1}(t)$ din problema 17 și să se stabilească formula de recurență

$$nP_n(t) = (2n - 1)\,tP_{n-1}(t) - (n - 1)\,P_{n-2}(t).$$

19. Să se determine polinomul $Q(t) = t^n + b_1 t^{n-1} + \ldots + b_{n-1} t + b_n$ pentru care integrala

$$\int_{-1}^{+1} Q^2(t)\,dt$$

atinge valoarea minimă.

20. Să se determine norma polinomului Legendre $P_n(t)$.

21. Să se arate că pentru orice operator liniar $\mathcal{A}$ acționînd într-un spațiu euclidian n-dimensional $\mathcal{R}_n$, raportul

$$k(A) = \frac{V[\mathcal{A}x_1, \mathcal{A}x_2, \ldots, \mathcal{A}x_n]}{V[x_1, x_2, \ldots, x_n]}$$

este constant (adică nu depinde de alegerea vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$) și determinați mărimea lui („coeficientul de deformare").

22. Să se arate că pentru orice doi operatori liniari $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ are loc egalitatea $k(\mathcal{AB}) = k(\mathcal{A})\,k(\mathcal{B})$.

23. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z$ — vectori dintr-un spațiu euclidian $\mathcal{R}$. Să se arate că are loc inegalitatea

$$\frac{V[x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z]}{V[x_1, x_2, \ldots, x_k, z]} \leqslant \frac{V[x_1, x_2, \ldots, x_k, z]}{V[x_1, x_2, \ldots, x_k]}.$$

24. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vectorii dintr-un spațiu euclidian $\mathcal{R}$. Să se arate că are loc inegalitatea

$$V[x_1, x_2, \ldots, x_m] \leqslant \prod_{k=1}^{m} \{V[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m]\}^{\frac{1}{m-1}}.$$

Care este sensul geometric al acesteia?

25. (continuare) Să se arate că au loc inegalitățile, care precizează inegalitatea lui Hadamard:

$$V[x_1, x_2, \ldots, x_m] \leqslant \prod_{k=1}^{m} \{V[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m]\}^{\frac{1}{m-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant m} \{V[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m]\}^{\frac{1 \cdot 2}{(m-1)(m-2)}} \leqslant$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\leqslant \prod_{1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_r \leqslant m} \{V[x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_r}]\}^{\frac{1 \cdot \ldots \cdot (n-r)}{(m-1)(m-2)\ldots r}} \leqslant$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\leqslant \prod_{1 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant m} \{V[x_{s_1}, x_{s_2}]\}^{\frac{1}{m-1}} \leqslant \prod_{s=1}^{m} |x_s|.$$

26. Dacă $|a_{ik}| \leqslant M$, atunci conform inegalității lui Hadamard $\det ||a_{ik}|| \leqslant M^n \cdot n^{n/2}$. Să se arate că această evaluare nu poate fi îmbunătățită pentru $n = 2^m$.

27. Dacă $N(\mathcal{A})$ și $T(\mathcal{A})$ reprezintă nucleul și domeniul de valori ale unui operator $\mathcal{A}$, atunci complementele ortogonale ale acestor subspații sînt respectiv domeniul de valori și nucleul operatorului $\mathcal{A}'$.

28. Să se arate că pentru orice element a_{ik} al unei matrici ortogonale A complementul algebric corespunzător este $A_{ik} = a_{ik} \det A$.

29. Să se arate că suma pătratelor tuturor minorilor de ordin k, dispuși în k linii fixate ale unei matrici ortogonale, este egală cu 1. De asemenea, suma produselor tuturor minorilor de ordin k dintr-o grupă de linii cu minorii corespunzători de ordin k din cealaltă grupă de linii, este egală cu zero.

30. Un operator liniar $\mathcal{A}$ conservă lungimea vectorilor; să se arate că el este izometric.

31. Un operator $\mathcal{A}$ care păstrează ortogonalitatea oricăror doi vectori x, y ($(x, y) = 0$ implică $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = 0$) se numește operator *echiunghiular*. Orice operator izometric este echiunghiular. În plus, orice operatori de omotetie ($\mathcal{A}x = \lambda x$ pentru orice x), ca și produsul unui operator de omotetie cu un operator izometric sînt echiunghiulari. Să se arate că orice operator echiunghiular este produsul unui operator de omotetie cu un operator izometric.

32. Să se arate că pentru $n \geqslant 3$ orice operator liniar $\mathcal{A}$ acționînd în spațiul n-dimensional $\mathcal{R}_n$, care conservă aria oricărui paralelogram (adică $V[x, y] = V[\mathcal{A}x, \mathcal{A}y]$) este un operator izometric.

33. Să se arate că pentru $k < n$ orice operator liniar $\mathcal{A}$ acționînd în spațiul n-dimensional $\mathcal{R}_n$ și conservînd volumul oricărui paralelipiped k-dimensional este izometric (M. A. Krasnoselski). (Pentru $k = n$ afirmația nu are loc, pentru că în acest caz orice operator $\mathcal{A}$ cu $\det Q = \pm 1$ va satisface condiția respectivă).

34. În spațiul euclidian $\mathcal{R}_n$ sînt date mulțimile finite $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ și $G = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Să se arate că există un operator izometric $\mathcal{A}$ care să transforme fiecare vector x_i în vectorul corespunzător y_i ($1 \leqslant i \leqslant k$) dacă și numai dacă au loc egalitățile

$$(x_i, x_j) = (y_i, y_j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k).$$

35. *Unghiuri între două subspații.* Într-un spațiu euclidian $\mathcal{R}$ sînt date două subspații $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$. Presupunem că vectorul normat e' parcurge sfera unitate a subspațiului $\mathcal{R}'$ și, în mod independent, vectorul normat e'' parcurge sfera unitate a subspațiului $\mathcal{R}''$. Unghiul dintre e' și e'' atinge minimul pentru o anumită pereche $e' = e'_1$, $e'' = e''_1$ și fie φ_1 acest minim. Presupunem acum că e' parcurge sfera unitate rămînînd ortogonal la e'_1 și e'' parcurge sfera unitate rămînînd ortogonal la e''_1. Unghiul dintre e' și e'' în aceste condiții atinge un minim $\varphi_2 \geqslant \varphi_1$ pentru o anumită pereche $e' = e'_2$, $e'' = e''_2$. Presupunem apoi că e' variază pe sfera unitate rămînînd ortogonal la e'_1 și e'_2 și similar e'' este ortogonal la e''_1, e''_2; se obține un nou unghi minim $\varphi_3 \geqslant \varphi_2$ și o nouă pereche e'_3 și e''_3.

Continuînd acest proces, se obține o familie de unghiuri $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, al căror număr este egal cu cea mai mică dintre dimensiunile subspațiilor $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$. Unghiurile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ se numesc *unghiurile dintre subspațiile $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$*. Să se arate că:

a) unghiurile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ sînt bine definite și nu depind de alegerea vectorilor $e_1', e_1'', e_2', e_2'', \ldots$ (prin construcție acești vectori nu sînt neapărat unic definiți);

b) unghiurile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ determină subspațiile $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$ pînă la poziția lor în spațiu; cu alte cuvinte, dacă avem două perechi de subspații $\mathcal{R}', \mathcal{R}''$; $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$ și unghiurile dintre subspațiile $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$ coincid cu unghiurile dintre subspațiile $\mathcal{S}', \mathcal{S}''$, atunci există un operator izometric care transformă simultan $\mathcal{S}'$ în $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{S}''$ în $\mathcal{R}''$;

c) pentru orice unghiuri date dinainte $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_k \leqslant \frac{\pi}{2}$ se pot construi subspații $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$ ale căror unghiuri coincid respectiv cu numerele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$.

36. Fie $y_1, y_2, \ldots, y_m$ proiecțiile ortogonale ale vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ respectiv pe un anumit subspațiu. Să se arate că volumul paralelipipedului construit pe vectorii $y_1, y_2, \ldots, y_m$ este cel mult egal cu volumul paralelipipedului construit pe vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

37. (continuare). Presupunem că în problema 36 atît vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_m$ cît și vectorii $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sînt liniar independenți. Să se arate că are loc formula

$$|V[y_1, y_2, \ldots, y_m]| = V[x_1, x_2, \ldots, x_m] \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_m,$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sînt unghiurile dintre subspațiile

$$\mathfrak{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = \mathfrak{L}_1 \text{ și } \mathfrak{L}\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} = \mathfrak{L}_2$$

(problema 35).

38. Vom numi *k-vector* orice sistem format din k vectori ai unui spațiu euclidian $\mathcal{R}$. Doi k-vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ și $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ se numesc *egali* dacă:

1) volumul $V\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ este egal cu volumul $V\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$;

2) acoperirea liniară $\mathfrak{L}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ coincide cu acoperirea liniară $\mathfrak{L}(y_1, y_2, \ldots, y_k)$;

3) sistemele $x_1, x_2, \ldots, x_k$ și $y_1, y_2, \ldots, y_k$ au aceeași orientare (adică operatorul în spațiul $\mathfrak{L}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ care transformă sistemul $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ în sistemul $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ are determinantul pozitiv).

Să se arate că un k-vector $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ din spațiul n-dimensional $\mathcal{R}_n$ este univoc determinat dacă sînt cunoscute valorile tuturor minorilor de ordin k din matricea $\|\xi_i^{(j)}\|$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, k)$, a coordonatelor vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_k$ într-o bază ortonormală $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a spațiului $\mathcal{R}_n$.

39. Dacă k-vectorul $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ este egal cu k-vectorul $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ (conform problemei 38), atunci minorii de ordin k ai matricii coordonatelor vectorilor $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt egali cu minorii corespunzători din matricea coordonatelor vectorilor $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

40. Numim *unghiuri* între k-vectorii $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ și $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ colecția unghiurilor dintre subspațiile $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ și $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ (problema 35), alese cu condiția suplimentară ca vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_k$ fixați în subspațiul $\mathfrak{L}_1$, pentru construcția acestor unghiuri, să aibă aceeași orientare ca și vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (această condiție se impune doar la construcția ultimului vector e_k); se procedează similar în subspațiul $\mathfrak{L}_2$.

Să se arate că unghiurile $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ între k-vectori și unghiurile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ între subspațiile corespunzătoare sînt legate prin următoarele relații

$$\alpha_j = \beta_j (j < k),\ \alpha_k = \beta_k \text{ sau } \alpha_k = \pi - \beta_k.$$

41. Numim *produs scalar* a doi k-vectori $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ și $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ dați prin matricile X și Y ale coordonatelor vectorilor x_i, y_i, într-o bază ortonormală a spațiului $\mathcal{R}_n$, suma tuturor produselor minorilor de ordin k ai matricii X cu minorii corespunzători ai matricii Y. Să se arate că produsul scalar este egal cu

$$|V[x_1, x_2, \ldots, x_k]|\, |V[y_1, y_2, \ldots, y_k]| \cos\beta_1 \cos\beta_2 \ldots \cos\beta_k,$$

unde $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ sînt unghiurile dintre k-vectorii X și Y.

42. Să se arate că produsul scalar a doi k-vectori $X = (x_1, \ldots, x_k)$ și $Y = (y_1, \ldots, y_k)$ poate fi scris sub forma

$$\{X, Y\} = \begin{vmatrix} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \ldots & (x_1, y_k) \\ (x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \ldots & (x_2, y_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_k, y_1) & (x_k, y_2) & \ldots & (x_k, y_k) \end{vmatrix}.$$

43. Dacă polinomul $[P(t)]^k$ este anulator pentru un operator simetric $\mathcal{A}$, să se arate că polinomul $P(t)$ este de asemenea anulator pentru acest operator.

Capitolul 9

SPAȚII COMPLEXE CU PRODUS SCALAR

§ 9.1. Forme hermitice

9.11. O funcție numerică $A(x, y)$ de două argumente x, y într-un spațiu vectorial complex $\mathcal{C}$ se numește *biliniară hermitică* sau, pe scurt, *hermitică* dacă ea este formă liniară de genul I în x pentru fiecare y fixat și formă liniară de genul II (antiliniară) în y pentru fiecare x fixat (4.14).

Cu alte cuvinte, $A(x, y)$ este formă hermitică de x și y dacă pentru orice x, y, z din $\mathcal{C}$ și pentru orice α complex sînt satisfăcute următoarele condiții:

$$\left.\begin{aligned} &A(x+z, y) = A(x, y) + A(z, y),\\ &A(\alpha x, y) = \alpha A(x, y),\\ &A(x, y+z) = A(x, y) + A(x, z),\\ &A(x, \alpha y) = \bar{\alpha} A(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Din această definiție se obține formula generală

$$A\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \bar{\beta}_j A(x_i, y_j), \tag{2}$$

unde $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m$ sînt vectori ai spațiului $\mathcal{C}$ iar $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ sînt orice numere complexe.

9.12. *Exemple*

a. Dacă $f_1(x)$ este o formă liniară de genul I iar $f_2(x)$ este o formă liniară de genul II (4.14), atunci $A(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ este o formă hermitică.

b. Într-un spațiu n-dimensional $\mathcal{C}_n$ cu baza $e_1, \ldots, e_n$ funcția de vectorii $x = \sum_1^n \xi_k e_k$ și $y = \sum_1^n \eta_k e_k$

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j \tag{3}$$

este o formă hermitică pentru orice numere complexe a_{ij} ($i, j = 1, \ldots, n$).

În realitate expresia (3) dă forma generală a unei forme hermitice într-un spațiu complex n-dimensional. Aceasta se demonstrează ca în 7.13, în analogie cu cazul formelor biliniare pe spațiul $\mathcal{R}_n$.

9.13. O formă hermitică $A(x, y)$ se numește *formă hermitică simetrică* dacă pentru orice vectori x și y

$$A(y, x) = \overline{A(x, y)}. \tag{4}$$

Dacă o formă hermitică $A(x, y)$ într-un spațiu complex $\mathcal{C}_n$ este scrisă cu ajutorul coordonatelor prin formula (3) și este simetrică, atunci

$$a_{ik} = A(e_i, e_k) = \overline{A(e_k, e_i)} = \bar{a}_{ki}, \tag{5}$$

adică matricea $\|a_{ik}\|$ a formei A în baza $e_1, \ldots, e_n$ este egală cu matricea obținută din ea prin transpunere și conjugarea elementelor. Invers, dacă într-o anumită bază $e_1, \ldots, e_n$, coeficienții formei hermitice $A(x, y)$ satisfac condițiile (5), atunci forma $A(x, y)$ este simetrică. Într-adevăr,

$$A(y, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\eta_i\bar{\xi}_k = \sum_{i,k=1}^{n} \bar{a}_{ki}\bar{\xi}_k\eta_i = \overline{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ki}\xi_k\bar{\eta}_i} = \overline{A(x, y)}.$$

Matricea $\|a_{ik}\|$ pentru care $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ ($i, k = 1, \ldots, n$) va fi numită în continuare *hermitic-simetrică*.

9.14 a. Fixăm o formă hermitică $A(x, y)$ avînd într-o bază $e_1, \ldots, e_n$ a spațiului $\mathcal{C}_n$ matricea $A_{(e)} = \|a_{ik}\|$, iar într-o bază $f_1, \ldots, f_n$ matricea $A_{(f)} = \|b_{ik}\|$; vectorii f_j și e_j sînt legați prin relații de forma

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(i)} e_j \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Raționînd ca în 7.15 a ajungem la următorul rezultat: între matricile $A_{(f)}$ și $A_{(e)}$ are loc relația

$$A_{(f)} = P^* A_{(e)} P, \tag{6}$$

unde $P = \|p_j^{(i)}\|$ este matricea de trecere de la baza $e_1, \ldots, e_n$ la baza $f_1, \ldots, f_n$ iar P^* este matricea care se obține din P prin transpunere și conjugarea elementelor. Notînd $P^* = \|p_j^{*(i)}\|$ avem

$$p_j^{*(i)} = \overline{p_i^{(j)}} \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

b. Din egalitățile (6) ca și în 7.23 rezultă că rangul matricii $A_{(e)}$ a unei forme hermitice $A(x, y)$ nu depinde de alegerea bazei $\{e\}$. Forma $A(x, y)$ se numește *nesingulară* dacă rangul ei (adică rangul matricii $A_{(e)}$ în orice bază $\{e\}$) este egal cu numărul n — dimensiunea spațiului $\mathcal{C}_n$. Dacă forma $A(x, y)$ este nesingulară, atunci pentru orice $x_0 \neq 0$ se găsește un vector $y_0 \in \mathcal{C}_n$ astfel încît $A(x_0, y_0) \neq 0$ (7.15 c).

9.15 a. Se numește *formă hermitic-pătratică* într-un spațiu complex $\mathcal{C}$ orice funcție de un argument $x \in \mathcal{C}$ care se obține dintr-o formă hermitică biliniară $A(x, y)$ prin înlocuirea lui y cu x.

Într-un spațiu complex n-dimensional $\mathcal{C}_n$ cu baza $e_1, \ldots, e_n$ o formă biliniară hermitică se exprimă prin coordonatele $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ale vectorului x astfel (conform 9.12 b):

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \bar{\xi}_k \tag{7}$$

cu anumiți coeficienți complecși a_{ik}. Invers, funcția $A(x, x)$ de forma (7) este o formă hermitică pătratică, care se obține prin înlocuirea lui y cu x în forma biliniară hermitică

$$A(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \bar{\eta}_k.$$

b. Dacă forma biliniară hermitică $A(x, y)$ este simetrică, deci $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ pentru orice i, k, atunci forma hermitic-pătratică corespunzătoare se numește de asemenea *simetrică*.

O formă hermitic-pătratică simetrică $A(x, x)$ are numai valori reale, deoarece din (4) rezultă

$$\overline{A(x, x)} = A(x, x).$$

Spre deosebire de cazul 7.22, o formă biliniară hermitică este deja univoc determinată prin forma ei hermitic-pătratică asociată. Într-adevăr, avem

$$A(x + y, x + y) = A(x, x) + A(x, y) + \overline{A(x, y)} + A(y, y)$$
$$A(x + iy, x + iy) = A(x, x) - iA(x, y) + i\overline{A(x, y)} + A(y, y).$$

Din prima egalitate putem exprima $A(x, y) + \overline{A(x, y)} = 2 \operatorname{Re} A(x, y)$ prin valorile formelor pătratice $A(x, x)$, $A(y, y)$ și $A(x + y, x + y)$. Din a doua egalitate se determină în mod analog $-iA(x, y) + i\overline{A(x, y)} = 2 \operatorname{Im} A(x, y)$ ceea ce demonstrează afirmația făcută.

Dacă într-o anumită bază $e_1, \ldots, e_n$ forma pătratică $A(x, x)$ se scrie

$$A(x, x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \xi_j \bar{\xi}_k,$$

atunci forma biliniară hermitică

$$A(x, y) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \xi_j \bar{\eta}_k,$$

se reduce evident la forma $A(x, x)$ punînd $y = x$. Conform celor demonstrate, forma $A(x, y)$ este unica formă biliniară hermitică simetrică care se reduce la forma $A(x, x)$ punînd $y = x$.

9.16 a. *În spațiul n-dimensional $\mathcal{C}_n$ există o bază în care orice formă hermitic-pătratică simetrică se scrie sub forma canonică astfel*

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k \bar{\eta}_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\eta_k|^2 \tag{8}$$

cu coeficienți reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Demonstrația se face în mod analog cu demonstrația teoremei 7.31. În locul egalității (7.31) (12) se folosește egalitatea ($b_{mm} \neq 0$)

$$b_{1m} \xi_1 \bar{\xi}_m + \ldots + b_{m-1,m} \xi_{m-1} \bar{\xi}_m + b_{mm} \xi_m \bar{\xi}_m + \bar{b}_{1m} \bar{\xi}_1 \xi_m + \ldots$$
$$\ldots + \bar{b}_{m-1,m} \bar{\xi}_{m-1} \xi_m = b_{mm} \left| \frac{b_{1m}}{b_{mm}} \xi_1 + \ldots + \frac{b_{m-1,m}}{b_{mm}} \xi_{m-1} + \xi_m \right|^2 +$$
$$+ A_1(x, x),$$

unde $A_1(x, x)$ este o formă hermitic-pătratică simetrică de argumentele $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$. În locul transformării 7.31 (14) se folosește transformarea

$$\xi_1 = \xi_1' + \xi_2',$$
$$\xi_2 = \xi_1' + i\xi_2'$$
$$\xi_3 = \xi_3',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi_m = \xi_m'.$$

Suma $a_{12}\xi_1\bar{\xi}_2 + \bar{a}_{12}\bar{\xi}_1\xi_2$ $(a_{12} \neq 0)$ este transformată în

$$(a_{12} + \bar{a}_{12})\xi_1'\bar{\xi}_1' - i(a_{12} - \bar{a}_{12})\xi_1'\bar{\xi}_2' + \ldots,$$

unde cel puțin unul din coeficienții $a_{12} + \bar{a}_{12}$ și $i(a_{12} - \bar{a}_{12})$ este diferit de zero.

b. Teorema inerției 7.91 are loc și pentru forme hermitic-pătratice simetrice, în domeniul complex: *numărul p al coeficienților pozitivi și numărul q al coeficienților negativi dintre $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (8) nu depinde de alegerea bazei canonice a formei $A(x, x)$. Aceste numere p și q se numesc indicii de inerție ai formei $A(x,x)$; primul — indice pozitiv de inerție iar cel de al doilea — indicele negativ de inerție.*

Demonstrația repetă complet demonstrația teoremei 7.91.

Subliniem că pentru formele pătratice nu neapărat hermitic-pătratice în spațiul complex $\mathcal{C}_n$ legea inerției nu are loc. De exemplu, forma pătratică

$$A(x,x) = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

se reduce prin transformarea de coordonate

$$\xi_1 = \eta_1, \ \xi_2 = i\eta_2$$

la forma

$$A(x, x) = \eta_1^2 - \eta_2^2.$$

c. Pentru o formă simetrică hermitic-pătratică $A(x, x)$ în spațiul $\mathcal{C}_n$ se poate întotdeauna găsi o bază canonică, astfel încît coeficienții canonici corespunzători să fie egali cu $+1$ sau -1. Pentru aceasta, reducînd forma $A(x, x)$ la forma

$$A(x, x) = \lambda_1|\eta_1|^2 + \ldots + \lambda_p|\eta|_p^2 - \mu_1|\eta_{p+1}|^2 - \ldots - \mu_q|\eta_{p+q}|^2,$$

unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ sînt pozitivi, considerăm transformarea de coordonate dată prin formulele

$$\sqrt{\lambda_1}\eta_1 = \tau_1, \ \ldots, \ \sqrt{\lambda_p}\eta_p = \tau_p,$$

$$\sqrt{\mu_1}\eta_{p+1} = \tau_{p+1}, \ \ldots, \ \sqrt{\mu_p}\eta_{p+q} = \tau_{p+q},$$

după care forma $A(x, x)$ se scrie

$$A(x, x) = |\tau_1|^2 + \ldots + |\tau_p|^2 - |\tau_{p+1}|^2 - \ldots - |\tau_{p+q}|^2.$$

9.17 a. Vectorul x_1 se numește *conjugat cu vectorul y_1 relativ la forma biliniară hermitică* $A(x, y)$ dacă $A(x_1, y_1)=0$.

Dacă vectorii $x_1, \ldots, x_k$ sînt conjugați cu vectorul y_1, atunci orice vector din subspațiul $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_k)$, acoperirea liniară a vectorilor $x_1, \ldots, x_k$, este conjugat cu vectorul y_1. În general, dacă vectorul y este conjugat cu fiecare din vectorii unui subspațiu $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, se spune că *$y$ este conjugat cu subspațiul $\mathcal{C}'$*. Mulțimea $\mathcal{C}''$ a tuturor vectorilor $x \in \mathcal{C}$ conjugați cu subspațiul $\mathcal{C}'$ este de asemenea un subspațiu al lui $\mathcal{C}$; acest subspațiu $\mathcal{C}''$ va fi numit *conjugat cu $\mathcal{C}'$*.

O bază $e_1, \ldots, e_n$ a spațiului $\mathcal{C}_n$ se numește *bază canonică* a formei $A(x, y)$ dacă $A(e_i, e_j) = 0$ pentru $i \neq j$. *Orice formă biliniară hermitică simetrică $A(x, y)$ are o bază canonică;* aceasta este o bază în care forma pătratică corespunzătoare $A(x, x)$ se scrie sub forma canonică (8). Într-adevăr, conform **9.15 b**, în această bază forma $A(x, y)$ se scrie pentru $x = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k$, $y = \sum_{k=1}^{n} \tau_k e_k$, astfel

$$A(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k \bar{\tau}_{k\bar{1}}$$

deci

$$A(e_i, e_j) = \begin{cases} \lambda_i \text{ pentru } j = i_i \\ 0 \text{ pentru } j \neq i. \end{cases}$$

b. Dacă minorii din colțul din stînga sus $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ ai matricii $\|a_{jk}\|$ a formei simetrice hermitic-pătratică $A(x, x)$ sînt diferiți de zero, atunci baza canonică a formei $A(x, x)$ poate fi construită după metoda Jacobi, ca în 7.52. Se păs-

trează și formulele (24) pentru coeficienții canonici ai formei $A(x, x)$:

$$\lambda_1 = \delta_1,\ \lambda_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1},\ \ldots,\ \lambda_n = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}.$$

c. Forma biliniară hermitică simetrică $A(x, y)$ se numește *pozitiv definită* dacă pentru orice $x \neq 0$, $A(x, x) > 0$. Ca și în cazul real (7.94) o condiție echivalentă o constituie pozitivitatea tuturor coeficienților canonici ai formei $A(x, x)$ sau, ceea ce este același lucru, egalitatea $p = n$, unde p este indicele pozitiv de inerție al formei $A(x, x)$.

O condiție necesară și suficientă ca forma $A(x, y)$ să fie pozitiv definită este, ca și în 7.96, îndeplinirea condițiilor lui Sylvester

$$\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0,\ \ldots,\ \delta_n > 0.$$

Demonstrația dată în 7.96 se reface în cazul complex fără modificări.

9.18 a. Fixînd o formă biliniar-hermitică simetrică nesingulară (x, y) se poate introduce, ca în 7.61, noțiunea de pereche de operatori adjuncți (relativ la forma (x, y)). Mai întîi, dacă $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sînt operatori liniari în spațiul $\mathcal{C}_n$, atunci funcțiile $A(x, y) = (\mathcal{A}x, y)$, $B(x, y) = (x, \mathcal{B}y)$ sînt forme biliniare hermitice, ale căror matrici sînt legate de matricile operatorilor $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ (în orice bază canonică a formei (x, y) cu coeficienții canonici ε_j) prin formulele

$$a_{jm} = \varepsilon_m a_m^{(j)},\ b_{jm} = \varepsilon_j \overline{b_j^{(m)}}.$$

Invers, pentru forme biliniare hermitice date $A(x, y)$ și $B(x, y)$, se poate arăta, ca în 7.62, că există operatori $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ unici astfel încît

$$A(x, y) = (\mathcal{A}x, y),\ B(x, y) = (x, \mathcal{B}y).$$

b. De aici, raționînd ca în 7.63, rezultă existența pentru orice operator $\mathcal{A}$ a unui operator $\mathcal{A}^*$ astfel încît pentru orice x, y din $\mathcal{C}_n$ să avem

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y).$$

Operatorul $\mathcal{A}^*$ este unic; într-o bază canonică a formei (x, y) cu coeficienți canonici ε_j, matricile $\|a_m^{(j)}\|$ și $\|a_m^{(j)*}\|$ ale operatorilor $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}^*$ sînt legate prin relațiile

$$a_j^{*m} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_j}\overline{a_m^{(j)}}.$$

Operatorul $\mathcal{A}^*$ se numește *adjunctul (sau conjugatul hermitic) al operatorului $\mathcal{A}$ relativ la forma (x, y)*.

c. Au loc următoarele formule (7.64):

a) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ pentru orice operator $\mathcal{A}$;

b) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$ pentru orice $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$;

c) $(\lambda\mathcal{A})^* = \bar{\lambda}\mathcal{A}^*$ pentru orice operator $\mathcal{A}$ și orice $\lambda \in \mathbb{C}$;

d) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$.

9.19 a. Două spații complexe $\mathcal{C}'$ și $\mathcal{C}''$ înzestrate cu forme biliniare hermitice simetrice $A(x', y')$ și $A(x'', y'')$ fixate se numesc A-*izomorfe* dacă spațiile $\mathcal{C}'$ și $\mathcal{C}''$ sînt izomorfe ca spații complexe (2.71) și dacă pentru perechile de elemente x', y' din $\mathcal{C}'$ și x'', y'' din $\mathcal{C}''$ corespunzătoare, are loc egalitatea

$$A(x', y') = A(x'', y'').$$

b. TEOREMĂ. *Două spații complexe finit-dimensionale $\mathcal{C}'$ și $\mathcal{C}''$ cu forme biliniare hermitice simetrice $A(x', y')$ și respectiv $A(x'', y'')$ fixate sînt A-izomorfe dacă și numai dacă dimensiunile lui $\mathcal{C}'$ și $\mathcal{C}''$ coincid, iar indicii de inerție p' și q' ai formei $A(x', y')$ coincid cu indicii de inerție p'' și q'' ai formei $A(x'', y'')$.*

Demonstrația se face exact ca în cazul teoremei analoage din cazul spațiilor reale (7.93).

c. În particular, două spații $\mathcal{C}'_n$ și $\mathcal{C}''_n$ de aceeași dimensiune n avînd forme pozitiv definite fixate $A(x', y')$ și $A(x'', y'')$ sînt A-izomorfe.

§ 9.2. Produsul scalar în spațiul complex

9.21. Într-un spațiu real am considerat ca produs scalar a doi vectori o formă biliniară simetrică pozitiv definită fixată. Forma pătratică corespunzătoare este pozitivă pe fiecare vector nenul și permite să definim astfel lungimea vectorilor. Într-un spațiu complex o proprietate similară o are o formă biliniară hermitică pozitiv definită (9.17 **c**). În legătură cu aceasta introducem următoarea definiție:

Un spațiu vectorial complex $\mathcal{C}$ se numește *spațiu unitar* dacă în acest spațiu este fixată o formă biliniară hermitică pozitiv definită, numită *produs scalar (complex)* cu alte cuvinte, fiecărei perechi de vectori x, y din $\mathcal{C}$ i se asociază un număr complex (x, y) satisfăcînd condițiile:

a) $(y, x) = \overline{(x, y)}$ pentru orice x, y din $\mathcal{C}$;

b) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ pentru orice x, y, z din $\mathcal{C}$;

c) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ pentru orice x, y din $\mathcal{C}$ și orice număr complex λ;

d) $(x, x) > 0$ pentru orice $x \neq 0$; $(0, 0) = 0$.

Din axiomele a) — c) rezultă formula generală

$$\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j, \sum_{k=1}^{q} \beta_k y_k\right) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} \alpha_j \overline{\beta}_k (x_j, y_k)$$

pentru orice $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ din $\mathcal{C}$ și pentru orice numere complexe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q$.

9.22. Exemple

a. În spațiul n-dimensional $\mathcal{C}_n$ (2.15 **b**) introducem produsul scalar al vectorilor $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ după formula

$$(x, y) = \xi_1\overline{\eta}_1 + \ldots \xi_n\overline{\eta}_n.$$

Îndeplinirea proprietăților a) — d) se verifică cu ușurință.

b. În spațiul $\mathbf{C}(a, b)$ al funcțiilor continue pe segmentul $[a, b]$ cu valori complexe (2.15 **d**), definim produsul scalar al funcțiilor $x = x(t)$ și $y = y(t)$ prin formula

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt.$$

Îndeplinirea axiomelor a) — d) rezultă din proprietățile fundamentale ale integralei.

9.23. *Noțiuni metrice fundamentale.* Într-un spațiu metric unitar $\mathcal{C}$ se pot introduce anumite noțiuni metrice, în analogie cu cazul spațiilor euclidiene reale (§ 8.3).

a. *Lungimea vectorilor.* Ca și în cazul real, lungimea (sau norma) unui vector x este prin definiție numărul $|x| = +\sqrt{(x, x)}$.

Pentru orice vector nenul lungimea este pozitivă iar lungimea

vectorului nul este egală cu zero. Pentru orice număr complex α are loc egalitatea

$$|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x, x)} = |\alpha|\sqrt{(x, x)} = |\alpha| \cdot |x|,$$

care arată că lungimea vectorului αx este egală cu lungimea lui x multiplicată cu modulul numărului complex α. Orice vector de lungime 1 se numește *normat*. Orice vector nenul *poate fi normat* (prin împărțire cu lungimea lui), obținîndu-se astfel un vector cu aceeași direcție, adică situat în același subspațiu unidimensional avînd lungimea 1. Mulțimea tuturor $x \in \mathcal{C}$ cu $|x| \leqslant 1$ se numește bila unitate a spațiului $\mathcal{C}$.

b. *Inegalitatea Cauchy-Buniakovski.* Pentru orice doi vectori x, y din $\mathcal{C}$ are loc inegalitatea

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|. \tag{9}$$

Demonstrația se face după aceeași schemă ca în cazul (8.33), dar cu o anumită precauție în utilizarea numerelor complexe. Dacă $(x, y) = 0$, atunci inegalitatea (9) este evidentă. Pentru $(x, y) \neq 0$ observăm că $(\lambda x - y, \lambda x - y) \geqslant 0$ pentru orice λ complex. Dezvoltînd membrul stîng, rezultă

$$|\lambda|^2(x, x) - \lambda(x, y) - \overline{\lambda(x, y)} + (y, y) \geqslant 0. \tag{10}$$

Vom socoti că λ variază pe dreapta γ — simetrica față de axa reală a dreptei definită de origine și de numărul complex (x, y); așadar, $\lambda = tz_0$ unde t este real și z_0 este numărul complex de modul 1 care determină direcția dreptei γ, $z_0 = \dfrac{\overline{(x, y)}}{|(x, y)|}$. Atunci $\lambda(x, y) = t|(x, y)|$ este real și $\overline{\lambda(x, y)} = \lambda(x, y)$. Inegalitatea (10) devine

$$t^2(x, x) - 2t|(x, y)| + (y, y) \geqslant 0. \tag{11}$$

Acum același raționament ca și în 8.33 ne conduce la inegalitatea (9) căutată.

Dacă inegalitatea (9) se reduce la o egalitate, atunci trinomul din membrul stîng al inegalității (11) are o unică rădăcină reală t_0. Înlocuind tz_0 cu λ, rezultă că trinomul din membrul stîng al relației (10) are rădăcina $\lambda_0 = t_0 z_0$, de unde $(\lambda_0 x - y, \lambda_0 x - y) = 0$ și $y = \lambda_0 x$ astfel că vectorii x și y diferă doar printr-un factor complex.

c. *Ortogonalitate.* Într-un spațiu unitar nu se introduce noțiunea de unghi între vectori. Se consideră totuși condiția

de ortogonalitate a doi vectori x și y; ca în cazul real aceasta revine la îndeplinirea egalității

$$(x, y) = 0.$$

În acest caz avem evident $(y, x) = \overline{(x, y)} = 0$.

Pentru vectorii ortogonali rămîn adevărate, așa cum se probează cu ușurință, afirmațiile analoage lemelor 8.36 a)—b) și teorema lui Pitagora 8.37.

Apoi are loc teorema de descompunere 8.51: pentru un subspațiu-finit dimensional $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ și pentru orice vector $f \in \mathcal{C}$ există și este unică o descompunere

$$f = g + h,$$

unde $g \in \mathcal{C}'$ și h este ortogonal la $\mathcal{C}'$. Mulțimea tuturor vectorilor h ortogonali la subspațiul $\mathcal{C}'$ formează un nou subspațiu, numit *complementul ortogonal al subspațiului* $\mathcal{C}'$. Notînd acest nou subspațiu cu $\mathcal{C}''$, deducem, ca în 8.51, existența unei descompuneri $\mathcal{C} = \mathcal{C}' + \mathcal{C}''$ ca sumă directă de termeni ortogonali.

d. *Inegalitățile triunghiului.* Dacă x și y sînt doi vectori într-un spațiu unitar $\mathcal{C}$, atunci conform inegalității Cauchy-Buniakovski (b), avem

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + \overline{(x, y)} + (y, y)$$

$$\begin{cases} \leqslant (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \leqslant (|x| + |y|)^2, \\ \geqslant (x, x) - 2|(x, y)| + (y, y) \geqslant (|x| - |y|)^2, \end{cases}$$

de unde

$$|x + y| \begin{cases} \leqslant |x| + |y|, \\ \geqslant \|x| - |y\|. \end{cases} \qquad (12)$$

Inegalitățile (12) se numesc, ca și în cazul real, *inegalitățile triunghiului.*

9.24. *Bază ortogonală într-un spațiu unitar n-dimensional* $\mathcal{C}_n$.

Într-un spațiu n-dimensional orice formă biliniară hermitică simetrică (x, y) are o bază canonică $e_1, \ldots, e_n$ (9.16 a). Condiția de canonicitate $(e_i, e_j) = 0$ $(i \neq j)$ este în acest caz o condiție de ortogonalitate. Vectorii ortogonali ai bazei

$e_1, \ldots, e_n$ pot fi normați și putem presupune că $|e_1| = \ldots = |e_n| = 1$. Dacă $x = \sum_1^n \xi_k e_k$, $y = \sum_1^n \eta_k e_k$ sînt orice doi vectori din $\mathcal{C}_n$, obținem formula următoare pentru produse scalare

$$(x, y) = \left(\sum_1^n \xi_k e_k, \sum_1^n \eta_k e_k\right) = \sum_1^n \xi_k \bar{\eta}_k. \qquad (13)$$

9.25 a. În compatibilitate cu 9.18 **a** se poate stabili o corespondență biunivocă între forme biliniare hermitice $A(x, y)$ și operatori liniari $\mathcal{A}$ acționînd în spațiul $\mathcal{C}_n$, după formula

$$A(x, y) = (\mathcal{A}x, y).$$

În orice bază ortonormală $e_1, \ldots, e_n$ a spațiului $\mathcal{C}_n$ matricea $\|a_{jk}\|$ a formei $A(x, y)$ $(a_{jk} = A(e_j, e_k))$ și matricea $\|a_j^{(k)}\|$ a operatorului $\mathcal{A}\left(\mathcal{A}e_k = \sum_j a_j^{(k)} e_j\right)$ sînt legate prin relațiile $a_{jk} = a_j^{(k)}$.

b. În corespondență cu 9.18 **b** se introduce noțiunea de conjugare a operatorilor $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}^*$ relativ la produsul scalar (x, y). Anume, pentru orice operator liniar $\mathcal{A}$ acționînd în spațiul $\mathcal{C}_n$ există și este unic *un operator adjunct (conjugat) hermitic* $\mathcal{A}^*$ care verifică condiția

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$$

pentru orice x, y din $\mathcal{C}_n$.

În orice bază ortonormală a spațiului $\mathcal{C}_n$ matricile $\|a_m^{(j)}\|$ și $\|a_m^{(j)*}\|$ ale operatorilor $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}^*$ sînt legate prin relațiile $a_j^{*(m)} = \overline{a_m^{(j)}}$.

c. Ca și în 8.95 **a**, *complementul ortogonal* $\mathcal{C}''$ *al unui subspațiu* $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, *invariant relativ la un operator* $\mathcal{A}$, *este invariant relativ la operatorul adjunct* $\mathcal{A}^*$.

9.26. O transformare liniară într-un spațiu complex n-dimensional care corespunde trecerii de la o bază ortonormală la o altă bază ortonormală, se numește transformare *unitară*. Transformările unitare sînt similare transformărilor ortogonale ale unui spațiu real (8.93). Dacă $e_1, \ldots, e_n$ și $f_1 \ldots, f_n$

sînt baze ortonormale și dacă $U = ||u_k^{(i)}||$ este matricea transformării unitare corespunzătoare, deci

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} u_k^{(i)} e_k,$$

atunci este evident că

$$(f_i, f_j) = \sum_{k=1}^{n} u_k^{(i)} \overline{u_k^{(j)}} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } i \neq j, \\ 1 \text{ pentru } i = j. \end{cases} \tag{14}$$

Invers, dacă numerele $u_k^{(i)}$ satisfac relațiile (14), atunci matricea $||u_k^{(i)}||$ este matricea unei transformări unitare sau, mai scurt, *matrice unitară*.

Un operator liniar $\mathcal{U}$ care corespunde unei matrici unitare se numește *operator unitar*. Ca și un operator izometric într-un spațiu real, un operator unitar într-un spațiu complex nu modifică metrica (adică invariază produsele scalare): dacă $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$, atunci $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} (\mathcal{U}e_i, \mathcal{U}e_j) =$
$= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_j} (f_i, f_j) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i} = (x, y)$.

Matricea V a trecerii inverse de la baza $\{\mathbf{f}_j\}$ la baza $\{\mathbf{e}_i\}$ este inversa matricii U și este de asemenea unitară; apoi, dacă $V = ||v_k^{(i)}||$, atunci

$$u_k^{(i)} = (f_i, e_k), \quad v_k^{(i)} = (e_i, f_k) = \overline{u_i^{(k)}}.$$

Așadar, matricea inversă a unei matrici unitare se obține prin transpunere și conjugarea elementelor. Deci pentru un operator unitar $\mathcal{U}$, avem

$$\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^*, \text{ sau } \mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{E}.$$

§ 9.3. Operatori normali

9.31. *Definiție.* Un operator $\mathcal{A}$ acționînd într-un spațiu unitar n-dimensional $\mathcal{C}_n$ se numește *normal* dacă el comută cu adjunctul său, adică

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*. \tag{15}$$

Un exemplu îl constituie un operator $\mathcal{A}$ care admite o bază ortogonală de vectori proprii $e_1, \ldots, e_n$ astfel încît

$$\mathcal{A}e_j = \lambda_j e_j \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Într-adevăr, matricea acestui operator $\mathcal{A}$ în baza $e_1, \ldots, e_n$ are forma

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_n \end{Vmatrix}. \tag{16}$$

Conform 9.25 b matricea operatorului $\mathcal{A}$ în aceeași bază $e_1, \ldots, e_n$ are forma

$$\begin{Vmatrix} \overline{\lambda_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \overline{\lambda_n} \end{Vmatrix}, \tag{17}$$

și de aici rezultă evident că operatorii $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}^*$ comută.

9.32. TEOREMĂ. *Orice vector propriu x_0 al unui operator normal cu valoarea proprie λ_0 este vector propriu al operatorului $\mathcal{A}^*$ cu valoarea proprie $\overline{\lambda_0}$.*

Demonstrație. Fie $\mathfrak{L} \subset \mathcal{C}_n$ subspațiul format din toți vectorii proprii ai operatorului $\mathcal{A}$ corespunzînd valorii proprii λ_0. Arătăm că $\mathfrak{L}$ este invariant relativ la operatorul $\mathcal{A}^*$. Pentru $x \in \mathfrak{L}$ avem

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*x = \mathcal{A}^*\mathcal{A}x = \mathcal{A}^*(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}^*x,$$

de unde rezultă că $\mathcal{A}^*x \in \mathfrak{L}$, ceea ce trebuia dovedit.

Apoi pentru orice x, y din $\mathfrak{L}$ avem

$$(\mathcal{A}^*x, y) = (x, \mathcal{A}y) = (x, \lambda y) = (\overline{\lambda}x, y),$$

deci pentru orice $x \in \mathfrak{L}$, avem $\mathcal{A}^*x = \overline{\lambda}x$ și teorema este demonstrată.

9.33. TEOREMĂ. *Pentru orice operator normal $\mathcal{A}$ există o bază ortonormală $e_1, \ldots, e_n$ formată din vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$.*

Demonstrație. Orice operator normal $\mathcal{A}$ ca și orice operator liniar în spațiul $\mathcal{C}_n$ admite un vector propriu (4.95 **b**). Fie e_1 un vector propriu al operatorului $\mathcal{A}$ cu valoarea proprie λ. Fie $\mathfrak{L} \subset \mathcal{C}_n$ subspațiul format din toți vectorii proprii ai operatorului $\mathcal{A}$ cu această valoare proprie λ. Dacă $\mathfrak{L}$ este întreg spațiul $\mathcal{C}_n$, atunci completînd în $\mathcal{C}_n$ vectorul e_1 cu vectorii $e_2, \ldots, e_n$ pînă la o bază ortonormală teorema este demonstrată. Dacă $\mathfrak{L} \neq \mathcal{C}_n$, atunci fie $\mathfrak{L}$ complementul ortogonal al subspațiului $\mathfrak{L}$ în $\mathcal{C}_n$. Deoarece în virtutea lui 9.32 orice vector al spațiului $\mathfrak{L}$ este transformat prin operatorul $\mathcal{A}^*$ într-un vector de asemenea din $\mathfrak{L}$ (același vector înmulțit cu $\bar{\lambda}$), atunci subspațiul $\mathfrak{L}$ este invariant relativ la operatorul $\mathcal{A}^*$. În virtutea egalității $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$ (9.18 **c**) și teoremei 9.25 **c**, subspațiul $\mathfrak{L}$ este invariant relativ la operatorul $\mathcal{A}$. Folosim acum principiul inducției matematice, socotind că teorema are loc pentru spații de dimensiune mai mică; atunci în subspațiul $\mathfrak{L}$ se poate alege o bază ortogonală satisfăcînd condiția necesară; adăugînd la aceasta orice bază ortogonală a subspațiului $\mathfrak{L}$, obținem o bază ortogonală pentru întreg spațiul $\mathcal{C}_n$, care satisface condiția din teoremă.

b. În virtutea punctului **a**, orice operator normal $\mathcal{A}$ este diagonalizabil (4.72 **e**); în baza formată din vectorii proprii ai săi, construită la punctul **a**, acest operator are matricea diagonală

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{Vmatrix}.$$

Pe diagonala principală a matricii se află valorile proprii ale operatorului $\mathcal{A}$; fiecare din ele se repetă de atîtea ori cît este dimensiunea subspațiului propriu corespunzător.

De aceea polinomul caracteristic $\det \| A - \lambda E \|$ al operatorului $\mathcal{A}$ (care nu depinde de alegerea bazei, așa cum se știe) are forma

$$\det \| A - \lambda E \| = \prod_{j=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)^{kj}, \quad \sum_{j=1}^{m} k_j = n, \qquad (18)$$

unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sînt valorile proprii distincte ale operatorului $\mathcal{A}$ iar $k_1, \ldots, k_m$ sînt dimensiunile subspațiilor proprii corespunzătoare.

c. Pe de altă parte, presupunem că pentru un operator normal $\mathcal{A}$ polinomul caracteristic are forma

$$\det \| A - \lambda E \| = \prod_{i=1}^{s} (\mu_i - \lambda)^{p_i}, \qquad (19)$$

unde $\mu_1, \ldots, \mu_s$ sînt numere distincte și $p_1, \ldots, p_s$ sînt multiplicitățile lor. Atunci se poate afirma că operatorul $\mathcal{A}$ are o bază ortonormală formată din vectori proprii cu valorile proprii $\mu_1, \ldots, \mu_s$, iar dimensiunea subspațiului propriu asociat valorii μ_j este egală cu numărul p_j. Într-adevăr, în virtutea unicității polinomului caracteristic are loc egalitatea de polinoame (18) și (19), de unde aplicînd teorema de unicitate a descompunerii unui polinom în factori, se demonstrează afirmația făcută.

9.34. *Operatori autoadjuncți.* Dacă $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, atunci operatorul $\mathcal{A}$ se numește *autoadjunct*. Cu alte cuvinte, operatorul $\mathcal{A}$ este autoadjunct dacă forma biliniară $(x, \mathcal{A}y)$ asociată operatorului $\mathcal{A}$ este hermitic simetrică:

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y). \qquad (20)$$

Operatorul $\mathcal{A}$ satisfăcînd egalitatea (20) pentru orice doi vectori x, y se numește *hermitic-simetric* (sau, pe scurt, *hermitic*).

În virtutea teoremei 9.25 b matricea unui operator autoadjunct în orice bază ortonormală coincide cu matricea sa hermitic-transpusă; cu alte cuvinte, ea este o matrice hermitic-simetrică. Invers, orice operator $\mathcal{A}$ care admite într-o bază ortonormală o matrice hermitic-simetrică, este un operator autoadjunct.

Deoarece un operator autoadjunct este evident normal, atunci se poate aplica 9.32; obținem în acest caz că $\bar{\lambda}_0 = \lambda_0$, deci *orice valoare proprie a unui operator autoadjunct este un număr real*. Mai departe, aplicînd 9.33 a, obținem următoarea teoremă fundamentală:

TEOREMĂ. *Pentru orice operator autoadjunct $\mathcal{A}$ într-un spațiu unitar $\mathcal{C}_n$ există o bază ortonormală formată din vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$ cu valori proprii reale.*

Invers, orice operator liniar $\mathcal{A}$ în spațiul $\mathcal{C}_n$ care are proprietatea indicată este autoadjunct: într-adevăr, conform 9.31 el este normal și comparînd (16) și (17), rezultă, deoarece numerele λ_j sînt reale, că $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

9.35. *Operatori antiautoadjuncți.* Dacă $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, atunci operatorul $\mathcal{A}$ se numește *antiautoadjunct*. Matricea unui operator antiautoadjunct în orice bază ortonormală $e_1, \ldots, e_n$ are proprietatea caracteristică:

$$a_{jk} = (\mathcal{A}e_j, e_k) = (e_j, \mathcal{A}^* e_k) = (e_j, -\mathcal{A}e_k) = -\overline{(\mathcal{A}e_k, e_j)} = \\ = -\bar{a}_{kj} \quad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Un operator antiautoadjunct $\mathcal{A}$ este evident normal. Aplicînd 9.32 rezultă în acest caz că $\bar{\lambda}_0 = -\lambda_0$, de unde se deduce faptul că *orice valoare proprie a unui operator antiautoadjunct este pur imaginară*. Aplicînd apoi 9.33 **a**, rezultă următoarea teoremă fundamentală:

TEOREMĂ. *Pentru orice operator antiautoadjunct $\mathcal{A}$ într-un spațiu unitar $\mathcal{C}_n$ există o bază ortonormală din vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$ cu valori proprii pur imaginare.*

Invers, orice operator liniar $\mathcal{A}$ în spațiul $\mathcal{C}_n$ care are proprietatea indicată este antiautoadjunct.

9.36. *Operatori unitari.* Un operator $\mathcal{U}$ acționînd în spațiul $\mathcal{C}_n$ se numește *unitar* dacă $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{E}$ (9.26). În particular, *orice operator unitar este normal*. Aplicînd 9.32, rezultă că în acest caz $\bar{\lambda}_0 \cdot \lambda_0 = 1$, adică $|\lambda_0| = 1$; astfel, *orice valoare proprie a unui operator unitar este un număr real sau complex avînd modulul egal cu* 1. Aplicînd apoi 9.33 **a** rezultă următoarea:

TEOREMĂ. *Pentru orice operator unitar $\mathcal{U}$ în spațiul $\mathcal{C}_n$ există o bază ortonormală formată din vectorii proprii ai operatorului $\mathcal{U}$ cu valorile proprii egale în modul cu* 1.

Invers, *orice operator liniar $\mathcal{U}$ în spațiul $\mathcal{C}_n$ avînd proprietatea indicată este unitar.*

§ 9.4. Aplicarea spațiilor unitare la teoria operatorilor într-un spațiu euclidian

9.41. *Incluziunea unui spațiu euclidian real într-un spațiu unitar.* Fie $\mathcal{R}$ un spațiu euclidian real (8.21) cu produsul scalar (x, y). Considerăm spațiul complex $\mathcal{C}$ format din toate sumele

formale $x + iy$ unde $x \in \mathcal{R}$, $y \in \mathcal{R}$, cu operații naturale de adunare și înmulțire cu numere complexe arbitrare, anume:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x).$$

Se arată ușor că sînt îndeplinite axiomele unui spațiu vectorial complex.

Vectorii $x + i0$ pot fi identificați cu vectori $x \in \mathcal{R}$ și sînt numiți *vectorii reali ai spațiului* $\mathcal{C}$. Vectorii $0 + iy$ pot fi identificați cu iy și numiți *vectori pur imaginari*. Vectorul $x - iy$ se mai scrie de asemenea $\overline{x + iy}$ și se numește *conjugatul complex* al vectorului $x + iy$.

Introducem în spațiul $\mathcal{C}$ produsul scalar definit prin formula

$$(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = [(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + i[(y_1, x_2) - \\ - (x_1, y_2)].$$

Se arată ușor că sînt îndeplinite condițiile 9.21 a)—d). În particular,

$$(x + iy, x + iy) = (x, x) + (y, y).$$

Spațiul $\mathcal{C}$ conține spațiul $\mathcal{R}$ ca submulțime, admițînd operațiile de adunare și înmulțire cu numere reale, cu același produs scalar.

Orice sistem ortogonal normat $e_1, \ldots, e_n$ în spațiul $\mathcal{R}$ va fi un sistem ortogonal normat și în spațiul $\mathcal{C}$. Dacă $e_1, \ldots, e_n$ este o bază ortonormală în spațiul $\mathcal{R}$, atunci acești vectori formează o bază ortonormală și în spațiul $\mathcal{C}$.

9.42. Orice operator liniar $\mathcal{A}$ dat în spațiul $\mathcal{R}$ se prelungește la un operator în spațiul $\mathcal{C}$ după formula

$$\hat{\mathcal{A}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y, \tag{21}$$

și se arată că operatorul $\hat{\mathcal{A}}$ este liniar pe spațiul $\mathcal{C}$.

Matricea operatorului $\hat{\mathcal{A}}$ în spațiul $\mathcal{C}$ într-o bază $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{R}$ coincide cu matricea operatorului $\mathcal{A}$ în spațiul $\mathcal{R}$ în aceeași bază, deoarece conform (21)

$$\hat{\mathcal{A}}e_j = \mathcal{A}e_j \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Prin prelungire se păstrează relațiile algebrice între operatori liniari: dacă $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{S}$ în spațiul $\mathcal{R}$, atunci $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{S}}$ în spațiul $\mathcal{C}$; dacă $\mathcal{AB} = \mathcal{D}$ în spațiul $\mathcal{R}$, atunci $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{D}}$ în spațiul $\mathcal{C}$. Aceasta rezultă de exemplu din păstrarea matricilor prin prelungire.

9.43. Fie $\mathcal{A}'$ operatorul adjunct al unui operator $\mathcal{A}$ în spațiul liniar $\mathcal{R}$ (8.91). Arătăm că prelungirea $\hat{\mathcal{A}}'$ a operatorului $\mathcal{A}'$ pe spațiul $\mathcal{C}$ este operatorul $\hat{\mathcal{A}}^*$ adjunct al prelungirii $\hat{\mathcal{A}}$ a operatorului $\mathcal{A}$. Într-adevăr, pentru orice $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v \in \mathcal{C}$ avem

$$(\hat{\mathcal{A}}'(x + \mathrm{i}y), u + \mathrm{i}v) = (\mathcal{A}'x, u) + \mathrm{i}(\mathcal{A}'y, u) - \mathrm{i}(\mathcal{A}'x, v) +$$

$$+(\mathcal{A}'y, v) = (x, \mathcal{A}u) + \mathrm{i}(y, \mathcal{A}u) - \mathrm{i}(x, \mathcal{A}v) + (y, \mathcal{A}v) =$$

$$= (x + \mathrm{i}y, \hat{\mathcal{A}}(u + \mathrm{i}v)),$$

ceea ce trebuia arătat.

În particular, prelungirea unui operator simetric ($\mathcal{A}' = \mathcal{A}$) este un operator autoadjunct ($\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$), prelungirea unui operator antisimetric ($\mathcal{A}' = \mathcal{A}$) este un operator antiautoadjunct ($\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$) și prelungirea unui operator izometric ($\mathcal{U}' = \mathcal{U}^{-1}$) este un operator unitar ($\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$). În fine, prelungirea unui operator normal ($\mathcal{A}'\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}'$) este un operator normal ($\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$).

9.44. *Structura unui operator normal real.* Fie σ și τ numere reale. Egalitatea de matrici

$$\begin{Vmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma^2+\tau^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2+\tau^2 \end{Vmatrix} \tag{22}$$

arată că matricea

$$\begin{Vmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{Vmatrix}$$

comută cu adjuncta sa. Mai general, comută cu adjuncta sa și matricea cvasidiagonală (reală)

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \sigma_1 & \tau_1 & & & & & & \\ -\tau_1 & \sigma_1 & & & & & & \\ & & \sigma_2 & \tau_2 & & & & \\ & & -\tau_2 & \sigma_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \sigma_m & \tau_m & \\ & & & & & -\tau_m & \sigma_m & \\ & & & & & & & \lambda_{m+1} \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{array} \right\| \tag{23}$$

de ordin $n = 2m + r - m = m + r$.

TEOREMĂ. *Fie $\mathcal{A}$ un operator normal într-un spațiu euclidian real $\mathcal{R}_n$. Atunci în acest spațiu există o bază ortogonală $e_1, \ldots, e_n$ în care matricea operatorului $\mathcal{A}$ are forma* (23). *Aici numerele $\lambda_j = \sigma_j + \mathrm{i}\tau_j$ ($j = 1, \ldots, m$) și $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_r$ sînt unic determinate de operatorul $\mathcal{A}$. Anume, ele sînt rădăcinile complexe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ sau reale $(\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_r)$ ale ecuației caracteristice* $\det \|A - \lambda E\| = 0$ *și se repetă în matricea* (23) *de atîtea ori cît este multiplicitatea rădăcinii corespunzătoare.*

Demonstrație. Construim spațiul unitar $\mathcal{C}_n$ cu produsul scalar prelungind produsul scalar (x, y) din spațiul $\mathcal{R}_n$. Prelungim operatorii $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}'$ la spațiul $\mathcal{C}_n$ după regula 9.42; așa cum am văzut în 9.43 aceștia se prelungesc la un operator normal $\hat{\mathcal{A}}$ și adjunctul său $\hat{\mathcal{A}}^*$.

Alegem în spațiul $\mathcal{R}_n$ o bază ortonormală oarecare $f_1, \ldots, f_n$; am văzut că vectorii $f_1, \ldots, f_n$ formează o bază ortonormală și în $\mathcal{C}_n$. Notăm matricea operatorului $\mathcal{A}$ în baza $f_1, \ldots, f_n$ cu $\|a_{jk}\|$; numerele a_{jk} sînt reale. Această matrice reprezintă operatorul $\hat{\mathcal{A}}$ în baza $f_1, \ldots, f_n$ în întreg spațiul $\mathcal{C}_n$.

Deoarece ecuația caracteristică $\det \|A - \lambda E\| = 0$ are coeficienți reali, atunci odată cu fiecare rădăcină nereală λ_j este rădăcină și mărimea conjugată $\bar{\lambda}_j$. Scriem șirul tuturor rădăcinilor distincte ale acestei ecuații, astfel:

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \ldots, \lambda_p, \bar{\lambda}_p \; ; \; \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_q.$$

unde rădăcinile $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sînt nereale, iar rădăcinile $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_q$ sînt reale. În virtutea 9.33 b, spațiul $\mathcal{C}_n$ se descompune în suma ortogonală a unor subspații $\Lambda_1, \overline{\Lambda}_1, \ldots, \Lambda_p, \overline{\Lambda}_p; \Lambda_{p+1}, \ldots, \Lambda_q$ unde Λ_j constă din vectorii proprii ai operatorului $\mathcal{A}$ cu valoarea proprie λ_j iar $\overline{\Lambda}_j$ din vectorii proprii ai operatorului $\mathcal{A}$ cu valoarea proprie $\overline{\lambda}_j$; $\overline{\Lambda}_{p+1} = \Lambda_{p+1}, \ldots, \overline{\Lambda}_q = \Lambda_q$.

Fie $z = x + iy \in \Lambda_j$. Ecuația $\mathcal{A}z = \lambda_j z$ în coordonatele relativ la baza inițială $f_1, \ldots, f_n$ se scrie astfel

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\zeta_k = \lambda_j \zeta_j,$$

unde $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (\xi_1 + i\eta_1, \ldots, \xi_n + i\eta_n)$. Aplicînd operația de conjugare complexă și ținînd cont de faptul că numerele a_{jk} sînt reale, rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\bar{\zeta}_k = \bar{\lambda}_j \bar{\zeta}_j.$$

Aceasta înseamnă că vectorul $\bar{z} = (\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n)$ este de asemenea un vector propriu al operatorului $\hat{\mathcal{A}}$ cu valoarea proprie $\bar{\lambda}_j$. De aici rezultă că operația de conjugare complexă transformă subspațiul Λ_j în $\overline{\Lambda}_j$.

Fie $\bar{\lambda}_1 \neq \lambda_1$ astfel încît $\lambda_1 = \sigma_1 + i\tau_1$, $\tau_1 \neq 0$. Alegem un vector normat oarecare $g_1 \in \Lambda_1$ și găsim $\bar{g}_1 \in \overline{\Lambda}_1$. Punem mai departe

$$e_1 = \frac{1}{2}(g_1 + \bar{g}_1), \quad e_2 = \frac{1}{2i}(g_1 - \bar{g}_1),$$

astfel încît

$$g_1 = e_1 + ie_2, \quad \bar{g}_1 = e_1 - ie_2.$$

Vectorii e_1 și e_2 sînt evident reali. Deoarece vectorii g_1 și $\bar{g}_1$ sînt ortogonali, vectorii e_1 și e_2 au lungimea 1. În plus, $(e_1, e_2) = 0$; într-adevăr,

$$(e_1, e_2) = -\frac{1}{4i}(g_1 + \bar{g}_1, g_1 - \bar{g}_1) = -\frac{1}{4i}[(g_1, g_1) - (\bar{g}_1, \bar{g}_1)] = 0,$$

deoarece

$$(g_1, \bar{g}_1) = 0, \quad (g_1, g_1) = (\bar{g}_1, \bar{g}_1) = 1.$$

Apoi avem

$$\mathcal{A}e_1 = \hat{\mathcal{A}}e_1 = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{A}}g_1 + \hat{\mathcal{A}}\bar{g}_1) = \frac{1}{2}(\lambda_1 g_1 + \bar{\lambda}_1 \bar{g}_1) =$$

$$= \frac{1}{2}[(\sigma_1 + i\tau_1)(e_1 + ie_2) + (\sigma_1 - i\tau_1)(e_1 - ie_2)] = \sigma_1 e_1 - \tau_1 e_2,$$

$$\mathcal{A}e_2 = \hat{\mathcal{A}}e_2 = \frac{1}{2i}(\hat{\mathcal{A}}g_1 - \hat{\mathcal{A}}g_2) = \frac{1}{2i}(\lambda_1 g_1 - \bar{\lambda}_1 \bar{g}_1) = \sigma_1 e_2 + \tau_1 e_1.$$

Astfel, operatorul $\mathcal{A}$ transformă planul vectorilor e_1, e_2 în el însuși cu matricea (în baza e_1, e_2)

$$\begin{Vmatrix} \sigma_1 & \tau_1 \\ -\tau_1 & \sigma_1 \end{Vmatrix}. \tag{24}$$

Dacă Λ_1 are dimensiunea mai mare decît 1, alegem un vector $g_2 \in \Lambda_1$ ortogonal la g_1 și vectorul conjugat $\bar{g}_2 \in \overline{\Lambda}_1$; ultimul este în mod automat ortogonal la g_2. Repetăm pentru g_2 și $\bar{g}_2$ construcția precedentă; obținem o nouă pereche de vectori reali e_3, e_4 care se exprimă prin g_2 și $\bar{g}_2$ și de aceea ortogonală vectorilor e_1, e_2 (care se exprimă liniar prin g_1 și g_2); planul determinat de perechea e_3, e_4 este transformat prin operatorul $\mathcal{A}$ în el însuși cu matricea (24). Continuînd această construcție se determină vectori reali ortogonali doi cîte doi $e_1, e_2, \ldots, e_{2p-1}, e_{2p}$; fiecare pereche de vectori (e_{2k-1}, e_{2k}) este transformată de operatorul $\mathcal{A}$ în planul determinat de acei vectori cu ajutorul unei matrici analoage lui (24).

Fie acum $\lambda_{p+1} = \bar{\lambda}_{p+1}$ real. Operația de trecere la vectori conjugați transformă subspațiul Λ_{p+1} în el însuși. Fie $g \in \Lambda_{p+1}$ un vector arbitrar și $\bar{g}$ conjugatul său.

Este posibilă una din următoarele două situații: sau vectorii g și $\bar{g}$ sînt liniar independenți (în $\mathcal{C}_n$), sau aceștia sînt liniar dependenți.

Dacă g și $\bar{g}$ sînt liniar independenți, atunci vectorii

$$e = \frac{1}{2}(g + \bar{g}), \quad f = \frac{1}{2i}(g - \bar{g})$$

sînt liniar independenți. Vectorii e și f sînt reali și deoarece ei aparțin lui Λ_{p+1} odată cu g și $\bar{g}$, acești vectori sînt vectori

proprii ai operatorului $\mathcal{A}$ cu aceeași valoare proprie λ_{p+1}. Dacă g și $\bar{g}$ sînt liniar dependenți, atunci deoarece ei au aceeași normă, se poate scrie

$$\bar{g} = e^{2i\varphi} g, \quad 0 \leqslant \varphi < \pi,$$

sau

$$e^{i\varphi} g = e^{-i\varphi} \bar{g} = \overline{e^{i\varphi} g},$$

astfel încît vectorul $e^{i\varphi} g$ este real. Deoarece el aparține lui Λ_{p+1} odată cu g, acest vector este vector propriu pentru operatorul $\mathcal{A}$ cu valoarea proprie λ_{p+1}.

Așadar, în subspațiul Λ_{p+1} se poate indica o bază de vectori reali. Aplicînd acesteia procedeul de ortogonalizare (8.61), obținem în Λ_{p+1} o bază ortogonală și, mai mult, chiar una ortonormală. Procedînd similar în $\Lambda_{p+2}, \ldots, \Lambda_q$, se obține demonstrația completă a teoremei.

Reprezentarea unui operator normal în forma (23) oferă posibilitatea unor interpretări geometrice.

Operatorul cu matricea (24) acționînd în planul vectorilor e_1, e_2 poate fi interpretat ca un operator de rotație și omotetie. Într-adevăr, avem

$$\left\| \begin{matrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{matrix} \right\| = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \left\| \begin{matrix} \dfrac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} & \dfrac{\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \\ -\dfrac{\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} & \dfrac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \end{matrix} \right\| =$$

$$= M \left\| \begin{matrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix} \right\|,$$

unde

$$M = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad \cos\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \quad \sin\alpha = \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}.$$

Matricea

$$\left\| \begin{matrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix} \right\|$$

determină în planul e_1, e_2 rotația tuturor vectorilor cu unghiul α, iar coeficientul M este coeficientul de omotetie.

În final, un operator normal, așa cum rezultă din reprezentările (23), realizează rotații cu omotetii în m plane ortogonale două cîte două iar în $r-m$ direcții ortogonale două cîte două și ortogonale pe planele indicate, el realizează omotetii (de cîte $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_r$ ori). Remarcăm că pentru $0 < \lambda_k < 1$, omotetia de raport λ_k este o contracție, iar dacă $\lambda_k < 0$ omotetia de raport λ_k este o omotetie de raport pozitiv compusă cu o simetrie față de origine).

9.45. *Structura unui operator simetric real.* Dacă un operator $\mathcal{A}$ într-un spațiu $\mathcal{R}_n$ este simetric, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, atunci prelungirea $\hat{\mathcal{A}}$ a operatorului $\mathcal{A}$ la spațiul $\mathcal{C}_n$ este un operator autoadjunct, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Toate valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale uuni operator autoadjunct sînt reale (9.34) și de aceea în reprezentarea (23), celulele de forma (24) lipsesc și rămîn numai elementele diagonale. Se obține atunci următoarea

TEOREMĂ. *Pentru orice operator simetric $\mathcal{A}$ în spațiul $\mathcal{R}_n$ există o bază ortonormală formată din vectori proprii.*

Geometric, un operator simetric realizează în fiecare din cele n direcții ortogonale $e_1, \ldots, e_n$ omotetii (de raport $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectiv). Deoarece numerele $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sînt rădăcinile ecuației $\det \|A - \lambda E\| = 0$, atunci în particular pentru matricea simetrică $A = \|a_{jk}\|$ ecuația caracteristică $\det \|A - \lambda E\| = 0$ are întotdeauna n rădăcini reale (nu neapărat distincte) și nu admite rădăcini reale.

9.46. *Structura unui operator antisimetric real.* Dacă un operator $\mathcal{A}$ în spațiul $\mathcal{R}_n$ este antisimetric, $\mathcal{A}' = -\mathcal{A}$, atunci prelungirea $\hat{\mathcal{A}}$ a operatorului $\mathcal{A}$ în spațiul $\mathcal{C}_n$ este un operator antisimetric antiautoadjunct, $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. Toate valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale unui operator antiautoadjunct sînt pur imaginare (9.35). De aceea în reprezentarea (23) celulele de forma (24) au forma specială

$$\left\| \begin{matrix} 0 & \tau \\ -\tau & 0 \end{matrix} \right\|,$$

iar numerele $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_r$ pot fi doar egale cu zero. Se obține atunci

TEOREMA. *Pentru orice operator antisimetric $\mathcal{A}$ în spațiul $\mathcal{R}_n$ există o bază ortonormală în care matricea operatorului $\mathcal{A}$ se scrie sub forma*

$$\begin{Vmatrix} 0 & \tau_1 & & & & & & \\ -\tau_1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & \tau_2 & & & & \\ & & -\tau_2 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & \tau_m & \\ & & & & & -\tau_m & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{Vmatrix} \cdot \quad (25)$$

Invers, dacă matricea unui operator $\mathcal{A}$ în spațiul $\mathcal{R}_n$ într-o anumită bază ortogonală are forma (25), *atunci operatorul $\mathcal{A}$ este antisimetric* (8.92 b).

Geometric, un operator antisimetric realizează în fiecare din m plane ortogonale două cîte două rotații de 90° urmate de omotetii (de raport $\tau_1, \ldots, \tau_m$) și toți vectorii ortogonali la planele indicate sînt transformați în 0.

9.47. *Structura unui operator izometric real.* Dacă un operator $\mathcal{A}$ în spațiul $\mathcal{R}_n$ este izometric, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$, atunci prelungirea $\hat{\mathcal{A}}$ a operatorului $\mathcal{A}$ la spațiul $\mathcal{C}_n$ este un operator unitar $\hat{\mathcal{A}}^* = \mathcal{A}^{-1}$. Toate valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale unui operator unitar sînt egale cu 1 în modul (9.36). Se poate scrie $\lambda_j = \cos \alpha_j - i \sin \alpha_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. De aceea în reprezentarea (23) celulele de forma (24) au forma specială

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_j & \sin \alpha_j \\ -\sin \alpha_j & \cos \alpha_j \end{vmatrix} \quad (26)$$

iar numerele $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_r$ pot fi egale numai cu ± 1. Se obține astfel

TEOREMA. *Pentru orice operator $\mathcal{A}$ izometric în spațiul $\mathcal{R}_n$ există o bază ortonormală în care matricea operatorului $\mathcal{A}$ se scrie sub forma*

$$\begin{Vmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & & & & & & \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos \alpha_m & \sin \alpha_m & & & \\ & & & -\sin \alpha_m & \cos \alpha_m & & & \\ & & & & & \pm 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \pm 1 \end{Vmatrix} \cdot \quad (27)$$

Geometric, un operator izometric $\mathcal{A}$ realizează în fiecare din m plane două cîte două ortogonale o rotație cu un anumit unghi (fără omotetie) și în $r-m$ direcții ortogonale la aceste plane și ortogonale două cîte două, operatorul acționează ca $\mathcal{E}$ sau $-\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ fiind operatorul identic). Orice două din aceste direcții cu aceiași coeficienți de omotetie (ambii $+1$ sau ambii -1) formează un plan în care operatorul $\mathcal{A}$ realizează o rotație cu 0^0 sau cu 180^0. În totalitate, pentru n impar ultima direcție are coeficientul $+1$ sau -1 iar pentru n par, sînt posibile două ultime direcții cu coeficienții $+1$ sau -1. Prezența printre coeficienții rămași a lui -1 arată că la rotațiile efectuate se adaugă o simetrie față de unul din planele de coordonate, de exemplu cel ortogonal la vectorul e_n. În acest caz avem $\det \mathcal{A} = -1$; în cazul cînd nu există astfel de simetrii avem $\det \mathcal{A} = +1$.

PROBLEME

1. Un operator autoadjunct acționînd într-un spațiu unitar $\mathcal{C}_n$ se numește *nenegativ* (respectiv *pozitiv*) dacă toate valorile sale proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sînt $\geqslant 0$ (respectiv > 0). Să se arate că pătratul oricărui operator autoadjunct este nenegativ.

2. Să se arate că pentru orice operator $\mathcal{A}$ autoadjunct nenegativ (respectiv pozitiv) există un operator $\mathcal{B}$ nenegativ (respectiv pozitiv) astfel încît $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$, numit „rădăcina pătrată" a operatorului $\mathcal{A}$.

3. Să se determine rădăcina pătrată a operatorului $\mathcal{A}$ definit într-o bază ortonormală e_1, e_2, e_3 prin matricea

$$A = \begin{Vmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{Vmatrix}.$$

4. Dacă $\mathcal{A}$ este un operator liniar oarecare acționînd într-un spațiu unitar $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{A}^*$ este adjunctul său, atunci $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ este un operator nenegativ. Dacă $\mathcal{A}$ este nesingular, atunci $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ este un operator pozitiv.

5. Presupunem că un operator liniar $\mathcal{A}$ este produsul unui operator autoadjunct $\mathcal{S}$ cu un operator unitar $\mathcal{Q}$, adică $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{Q}$. Să se arate că $\mathcal{S}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$.

6. Să se arate că orice operator liniar $\mathcal{A}$ cu $\det \mathcal{A} \neq 0$ poate fi reprezentat ca produsul unui operator autoadjunct cu un operator unitar.

7. Să se dovedească unicitatea descompunerii unui operator $\mathcal{A}$ ca produs $\mathcal{S}\mathcal{Q}$ în condițiile exercițiului 6.

8. Un operator liniar $\mathcal{V}$ acționînd în spațiul $\mathcal{C}_n$ se numește *semicontractiv* dacă $|\mathcal{V}x| \leqslant |x|$ pentru orice x. Să se arate că orice operator $\mathcal{A}$ poate fi reprezentat ca produs al unui operator autoadjunct cu un operator semicontractiv.

9. Să se arate că doi operatori autoadjuncți $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ (în $\mathcal{R}_n$) comută între ei atunci și numai atunci cînd ei au un sistem comun din n vectori proprii doi cîte doi ortogonali.

10. Să se indice pentru orice operator liniar $\mathcal{A}$ acționînd în spațiul $\mathcal{C}_n$, o bază ortonormală în care matricea operatorului $\mathcal{A}$ are forma triunghiulară

$$A = \begin{Vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ 0 & a_2^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{(n)} \end{Vmatrix}.$$

Capitolul 10

FORME PĂTRATICE ÎN SPAȚII EUCLIDIENE ȘI UNITARE

§ 10.1. Teorema fundamentală asupra formelor pătratice în spații euclidiene

10.11. Începem cu propoziția următoare care se referă la o formă biliniară simetrică într-un spațiu euclidian.

TEOREMĂ. *Într-un spațiu euclidian n-dimensional $\mathcal{R}_n$ pentru orice formă biliniară simetrică există o bază canonică formată din vectori ortogonali doi cîte doi.*

Demonstrație. Considerăm operatorul liniar $\mathcal{A}$ corespunzînd formei biliniare simetrice A considerate (8.91). Acest operator este de asemenea simetric. Conform teoremei operatorului simetric (9.41), în spațiul $\mathcal{R}_n$ există o bază ortonormală formată din vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$. În această bază matricea operatorului $\mathcal{A}$ este diagonală. Deoarece această matrice este matricea formei biliniare $A(x, y)$, baza construită este baza canonică a formei $A(x, y)$, ceea ce trebuia demonstrat.

10.12. Acest rezultat va fi aplicat acum la studiul formelor pătratice.

Fie dată o formă pătratică

$$A(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \quad (a_{ij} = a_{ji}). \tag{1}$$

Vom socoti numerele $\xi_1, \dots, \xi_n$ coordonatele vectorului x în spațiul euclidian $\mathcal{R}_n$ cu produsul scalar, definit prin formula

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i,$$

unde $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$. Baza

$$e_1 = \{1, 0, ..., 0\},\ e_2 = \{0, 1, ..., 0\},\ ...,\ e_n = \{0, 0, ..., 1\}$$

este ortonormală în $\mathcal{R}_n$ și avem

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i.$$

Considerăm forma biliniară

$$A(x, y) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \eta_j,$$

corespunzînd formei pătratice (1). În virtutea teoremei 10.11 pentru această formă există o bază canonică $f_1, f_2, ..., f_n$. Dacă relativ la această bază vectorii x și y au respectiv coordonatele $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ și $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$, atunci forma $A(x, y)$ se va scrie

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tau_i \theta_i,$$

iar forma pătratică $A(x, x)$ are expresia

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tau_i^2. \tag{2}$$

Trecerea de la baza $e_1, e_2, ..., e_n$ la baza $f_1, f_2, ..., f_n$ se realizează cu ajutorul unei matrici ortogonale (8.93) $Q = ||q_i^{(j)}||$ după formulele

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} q_i^{(j)} e_i \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

Legătura între coordonatele $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ și $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ poate fi reprezentată conform formulelor (36) din 8.94 prin sistemul de egalități

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} q_i^{(j)} \tau_j \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{3}$$

folosind matricea transpusă Q'. Am obținut cu aceasta următoarea teoremă importantă

TEOREMĂ (*teorema formei pătratice într-un spațiu euclidian*). *Orice formă pătratică* (1) *poate fi reprezentată sub forma canonică* (2) *cu ajutorul unei transformări izometrice de coordonate* (3).

10.13. Șirul de operații care sînt necesare pentru a construi formulele de trecere (3) și forma canonică (2) a formei pătratice (1) rezultă din rezultatele 4.94 și 9.45; le precizăm acum într-o formă definitivă.

a) *Pentru forma pătratică* (1) *construim matricea simetrică* $A = ||a_{ij}||$.

b) *Considerăm polinomul caracteristic* $\Delta(\lambda) = \det ||A - \lambda E||$ *și determinăm rădăcinile lui.* Conform 9.45 acest polinom are n rădăcini reale (nu neapărat distincte).

c) *Cunoscînd rădăcinile polinomului* $\Delta(\lambda)$, *se poate scrie forma pătratică sub forma canonică* (2) *și, în particular, se pot calcula indicii pozitiv și negativ de inerție ai formei.*

d) *Înlocuim* λ_1 *în sistemul* (23) *din* 4.94. Pentru λ_1 dat acest sistem are atîtea soluții liniar independente cît este multiplicitatea rădăcinii λ_1. *Căutăm aceste soluții liniar independente, folosind regulile de rezolvare a sistemelor liniare omogene de ecuații.*

e) *Dacă multiplicitatea rădăcinii* λ_1 *este mai mare decît* 1, *se ortogonalizează soluțiile liniar independente obținute aplicînd metoda* 8.61.

f) *Efectuînd operațiile indicate pentru fiecare rădăcină se obține un sistem de n vectori ortogonali doi cîte doi. Îi numerotăm și îi normăm (împărțind fiecare vector prin lungimea lui). Vectorii obținuți*

$$f_1 = \{q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, ..., q_n^{(1)}\},$$
$$f_2 = \{q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, ..., q_n^{(2)}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n = \{q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, ..., q_n^{(n)}\}$$

formează un sistem ortonormal.

g) *Folosind numerele* $q_i^{(j)}$ *se pot scrie formulele de transformare* (3).

h) *Dacă se cer expresiile noilor coordonate* $\{\tau\}$ *prin cele vechi* $\{\xi\}$, *atunci deoarece inversa unei matrici ortogonale se*

obține prin transpunere, putem scrie expresiile căutate sub forma

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{n} q_j^{(i)} \xi_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

10.14. Am văzut în 7.33 a că într-un spațiu afin nici baza canonică nici forma canonică a unei forme pătratice nu sînt definite univoc; în general, se poate include într-o bază canonică a formei orice vector dinainte dat. Într-un spațiu euclidian, în cazul cînd se consideră numai baze ortonormale, situația este diferită. Matricea formei pătratice, așa cum am văzut, se transformă la fel ca și matricea operatorului liniar simetric corespunzător; dacă este găsită o bază canonică a unei forme pătratice, atunci este găsită și o bază de vectori proprii ai operatorului simetric. Coeficienții formei pătratice în baza canonică („coeficienți canonici") coincid cu valorile proprii ale operatorului corespunzător. Dacă valorile proprii ale operatorului $\mathcal{A}$ sînt rădăcinile ecuației $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$ și acestea nu depind de alegerea bazei și depind invariant de operatorul $\mathcal{A}$. Așadar, *mulțimea coeficienților canonici ai formei* $(\mathcal{A}x, x)$ *este determinată univoc.* În ceea ce privește baza canonică a unei forme pătratice $(\mathcal{A}x, x)$, ea este determinată cu același grad de arbitrar, cu care este determinat un sistem ortonormal complet de vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$: fără a considera permutările între acești vectori, oricare din el poate fi înmulțit cu -1; mai general, se poate face orice transformare izometrică în subspațiul propriu corespunzător unei valori proprii λ fixate.

§ 10.2. Proprietățile extremale ale unei forme pătratice

10.21. Fixăm într-un spațiu euclidian $\mathfrak{R}_n$ o formă pătratică $A(x, x)$. Vom considera valorile ei pe sfera unitate a spațiului $\mathfrak{R}_n$, adică pentru $(x, x) = 1$ și ne punem problema: în ce puncte ale sferei unitate valorile formei sînt staționare (critice); reamintim că o funcție $f(x)$ cu valori reale definită în punctele unei suprafețe U are o valoare staționară (sau critică) în punctul $x_0 \in U$ dacă f este derivabilă în x_0 pe orice direcție și derivata lui f în x_0 pe orice direcție pe suprafața U este nulă. În particular, funcția $f(x)$ este staționară în punctele unde ea își atinge maximul sau minimul.

Problema determinării valorilor staționare este în acest caz o problemă de extrem condiționat; una din metodele de rezolvare a ei este metoda multiplicatorilor lui Lagrange pe care o aplicăm aici. Alegem în spațiul $\mathfrak{R}_n$ o bază ortonormală și notăm cu $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ coordonatele vectorului x în această bază. În aceste coordonate forma pătratică se va scrie astfel $A(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$, iar condiția $(x, x) = 1$ se scrie $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1$. Conform metodei lui Lagrange, construim funcția

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

și egalăm cu zero derivatele parțiale ale lui f în raport cu ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j - 2\lambda\xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Împărțind cu 2 se obține explicit sistemul care ne este deja cunoscut ((23) din 4.94):

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0,\\
&a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\xi_n = 0,
\end{aligned}$$

care a fost utilizat pentru determinarea vectorilor proprii ai operatorului simetric asociat formei pătratice $A(x, x)$ (reamintim că $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$).

De aici rezultă următoarea proprietate:

Forma pătratică $A(x, x)$ *ia valori staționare pe vectorii sferei unitate care sînt vectori proprii ai operatorului simetric* $\mathcal{A}$ *corespunzător formei* $A(x, x)$.

10.22. Calculăm valorile pe care le ia forma în punctele staționare. Pentru aceasta introducem operatorul simetric corespunzător $\mathcal{A}$ și reprezentăm forma pătratică astfel $A(x, x) =$

$= (\mathcal{A}x, x)$. Deoarece forma ia o valoare staționară pe un vector propriu e_i al operatorului $\mathcal{A}$, avem $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$; de aici

$$A(e_i, e_i) = (\mathcal{A}e_i, e_i) = \lambda_i(e_i, e_i) = \lambda_i.$$

Așadar, *valoarea staționară a formei* $A(x, x)$ *pentru* $x = e_i$ *este egală cu valoarea proprie corespunzătoare a operatorului* $\mathcal{A}$. Deoarece valorile proprii ale operatorului $\mathcal{A}$ coincid cu coeficienții canonici ai formei $A(x, x)$, putem deduce că *valorile staționare ale unei forme pătratice* $A(x, x)$ *coincid cu coeficienții ei canonici.*

În particular, maximul (respectiv minimul) formei $A(x, x)$ pe sfera unitate este egal cu cel mai mare (respectiv cel mai mic) dintre coeficienții canonici.

10.23. Atît o formă biliniară cît și o formă pătratică $A(x,x)$ pot fi considerate nu pe întreg spațiul n-dimensional $\mathcal{R}_n$, ci pe un subspațiu k-dimensional $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{R}_n$; ne propunem să aflăm în acest subspațiu o bază ortonormală. Presupunem că o formă $A(x, x)$ are în întreg spațiul $\mathcal{R}_n$ forma canonică

$$A(x, x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^2, \qquad (4)$$

iar în subspațiul $\mathcal{R}_k$ forma canonică

$$A(x, x) = \mu_1 \tau_1^2 + \mu_2 \tau_2^2 + \ldots + \mu_k \tau_k^2.$$

Vrem să stabilim ce legătură există între coeficienții μ_1, μ_2, ..., μ_k și coeficienți λ_1, λ_2, ..., λ_n. Pentru comoditate presupunem că numerotăm coeficienții canonici în ordine descrescătoare

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n, \quad \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_k.$$

Mărimea λ_1 este așa cum știm valoarea maximă a formei pătratice $A(x, x)$ pe sfera unitate din spațiul $\mathcal{R}_n$; în mod analog, μ_1 este valoarea maximă a formei pătratice $A(x, x)$ pe sfera unitate din spațiul $\mathcal{R}_k$ și de aceea $\mu_1 \leqslant \lambda_1$. Arătăm că $\mu_1 \geqslant \lambda_{n-k-1}$.

Fie $e_1, e_2, \ldots, e_n$ o bază canonică a formei $A(x, x)$, în care ea se scrie sub forma (4). Considerăm subspațiul $(n-k+1)$-dimensional $\mathcal{R}'$ generat de vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_{n-k+1}$. Deoarece $k + (n-k+1) > n$, atunci subspațiile $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}_k$ au, conform 2.47 **c**, cel puțin un vector comun nenul. Presupunem că

acesta este $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_{n-k+1}^{(0)}, 0, \ldots, 0)$ și că este normat, adică $|x_0| = 1$. Aplicînd formula (4) pentru x_0 avem

$$A(x_0, x_0) = \lambda_1 \xi_1^{(0)2} + \ldots + \lambda_{n-k+1} \xi_{n-k+1}^{(0)2} \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_{n-k+1}(\xi_1^{(0)2} + \ldots + \xi_{n-k+1}^{(0)2}) = \lambda_{n-k+1}.$$

De aici rezultă că μ_1, ca valoare maximă a formei pătratice $A(x, x)$ pe sfera unitate a subspațiului $\mathcal{R}_k$ nu poate fi mai mică decît λ_{n-k+1}, ceea ce trebuia arătat.

Așadar, μ_1 este cuprinsă între următoarele limite

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_{n-k+1}. \qquad (5)$$

10.24. Pentru diverse subspații k-dimensionale, mărimea μ_1 ia în mod firesc valori distincte. Arătăm că *există astfel de subspații* k*-dimensionale pentru care* μ_1 *primește valorile-limită indicate în inegalitatea* (5).

Considerăm subspațiul $\mathcal{R}'$ generat de primii k vectori $e_1, e_2, \ldots, e_k$ ai unei baze canonice a formei $A(x, x)$. În subspațiul $\mathcal{R}'$ în baza $e_1, e_2, \ldots, e_k$ forma $A(x, x)$ se scrie

$$A(x, x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_k \xi_k^2$$

În particular,

$$A(e_1, e_1) = \lambda_1 = \max \quad A(x, x) \quad (|x| = 1, \ x \in \mathcal{R}').$$

Astfel, pe subspațiul $\mathcal{R}'$ mărimea

$$\mu_1 = \max \quad A(x, x) \quad (|x| = 1, \ x \in \mathcal{R}')$$

își atinge cea mai mare valoare posibilă λ_1.

Considerăm acum subspațiul $\mathcal{R}''$ generat de ultimii k vectori $e_{n-k+1}, e_{n-k+2}, \ldots, e_n$ ai bazei canonice a formei $A(x,x)$. În subspațiul $\mathcal{R}''$ în baza $e_{n-k+1}, \ldots, e_n$ forma $A(x, x)$ se scrie

$$A(x, x) = \lambda_{n-k+1} \xi_{n-k+1}^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^2.$$

În particular,

$$A(e_{n-k+1}, \quad e_{n-k+1}) = \lambda_{n-k+1} = \max A(x, x) \quad (|x| = 1, \quad x \in \mathcal{R}'').$$

Deoarece $\mu_1 = \max A(x, x)$ $(|x| = 1, \ x \in \mathcal{R}'')$, deducem ca mai sus că $\mu_1 = \lambda_{n-k+1}$. Așadar, pe subspațiul $\mathcal{R}''$ mărimea μ_1 își atinge valoarea minimă λ_{n-k+1}.

Obținem astfel o nouă definiție a coeficientului λ_{n-k+1}; *coeficientul* λ_{n-k+1} *din scrierea canonică a formei* $A(x, x)$

este egal cu cea mai mică valoare a maximului formei pătratice $A(x, x)$ *pe sferele unitate ale tuturor subspațiilor* k*-dimensionale posibile ale spațiului* $\mathcal{R}_n$.

10.25. Folosind acest rezultat dăm evaluarea pentru ceilalți coeficienți canonici ai formei $A(x, x)$ pe subspațiul $\mathcal{R}_k$. De exemplu, dacă este fixat un subspațiu $\mathcal{R}_k$, atunci μ_2 este cea mai mică dintre valorile maxime ale formei pătratice $A(x, x)$ pe sferele unitate ale subspațiilor $(k-1)$-dimensionale din $\mathcal{R}_k$. În același timp, λ_{n-k+2} este cea mai mică dintre valorile maxime ale formei pătratice $A(x, x)$ pe sferele unitate ale tuturor subspațiilor $(k-1)$-dimensionale ale lui $\mathcal{R}_n$; de aceea $\mu_2 \geqslant \lambda_{n-k+2}$. În mod analog, $\mu_3 \geqslant \lambda_{n-k+3}$, $\mu_4 \geqslant \lambda_{n-k+4}$, ..., $\mu_k \geqslant \lambda_n$. Pe de altă parte, λ_2 este cea mai mică dintre valorile maxime ale formei pătratice $A(x, x)$ pe sferele unitate ale subspațiilor $(n-1)$-dimensionale ale spațiului $\mathcal{R}_n$; dar fiecare subspațiu $(n-1)$-dimensional se intersectează cu subspațiul $\mathcal{R}_k$ conform lemei anterioare, după un subspațiu avînd cel puțin $(n-1)+k-n=k-1$ dimensiuni; de aceea numărul λ_2 nu este mai mic decît cea mai mică valoare maximă a formei $A(x, x)$ pe sferele unitate ale acestor subspații și, în particular, nu mai mic decît numărul μ_2 — cea mai mică dintre valorile maxime ale formei $A(x, x)$ pe sferele unitate ale subspațiilor $(k-1)$-dimensionale ale spațiului $\mathcal{R}_k$. Așadar, $\lambda_2 \geqslant \mu_2$. Analog, $\lambda_3 \geqslant \mu_3$, ..., $\lambda_k \geqslant \mu_k$. Astfel, coeficienții canonici $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ satisfac inegalitățile

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_{n-k+1},\\ &\lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_{n-k+2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\lambda_k \geqslant \mu_k \geqslant \lambda_n. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Pentru $k = n-1$ inegalitățile (6) capătă forma următoare:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2,\\ &\lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\lambda_{n-1} \geqslant \mu_{n-1} \geqslant \lambda_n. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

10.26. Dacă subspațiul $(n-1)$-dimensional $\mathcal{R}_{n-1}$, pe care se consideră forma pătratică $A(x, x)$, este dat prin ecuația

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \ldots + \alpha_n\xi_n = 0 \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1). \tag{8}$$

atunci coeficienții $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ pot fi calculați efectiv.

În ipoteza că toate numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt distincte, indicăm o metodă de calcul al acestor coeficienți, datorată lui M. G. Krein.

Cel puțin unul dintre coeficienții $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este diferit de zero. Fie de exemplu $\alpha_n \neq 0$. Atunci din ecuațiile (8) obținem

$$\xi_n = -\frac{1}{\alpha_n}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\xi_j.$$

Înlocuind ξ_n în expresia formei pătratice $A(x, x) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k^2$, obținem că în subspațiul $\mathcal{R}_{n-1}$, forma $A(x, x)$ se scrie în coordonatele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ astfel

$$A(x, x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1}\xi_{n-1}^2 + \frac{\lambda_n}{\alpha_n^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\xi_j\right)^2.$$

Coeficienții canonici ai acestei forme pătratice se determină ca valorile staționare (critice) pe sfera unitate a subspațiului $\mathcal{R}_{n-1}$ (10.22); aceasta din urmă are în coordonatele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ ecuația

$$B(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 + \frac{1}{\alpha_n^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\xi_j\right)^2 = 1.$$

Pentru determinarea valorilor staționare, procedăm ca mai sus, aplicînd metoda multiplicatorilor lui Lagrange; considerăm funcția

$$A(x, x) - \lambda B(x, x) = \sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_j - \lambda)\,\xi_j^2 + \frac{\lambda_n - \lambda}{\alpha_n^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\xi_j\right)^2$$

și egalăm cu zero derivatele ei parțiale în raport cu ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$:

$$\xi_k(\lambda_k - \lambda) + \frac{\lambda_n - \lambda}{\alpha_n^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\xi_j\right)\cdot\alpha_k = 0. \tag{9}$$

Coeficienții căutați $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ sînt rădăcinile ecuației obținute egalînd cu zero determinantul $D(\lambda)$ al sistemului (9) de ecuații liniare. Matricea coeficienților acestui sistem este în mod evident suma a două matrici, prima din ele fiind diagonală, cu numerele $\lambda_k - \lambda$ pe diagonală $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, iar cea de a doua avînd forma

$$\frac{\lambda_n - \lambda}{\alpha_n^2}\begin{Vmatrix} \alpha_1\alpha_1 & \alpha_2\alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1}\alpha_1\\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2\alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1}\alpha_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_1\alpha_{n-1} & \alpha_2\alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}\alpha_{n-1} \end{Vmatrix}.$$

Conform proprietății (1.44) a determinanților, determinantul căutat este egal cu suma determinanților primei matrici și a tuturor determinanților obținuți prin înlocuirea anumitor coloane ale determinantului primei matrici cu coloane corespunzătoare ale celei de a doua matrici (cu factorul $\frac{\lambda_n - \lambda}{\alpha_n^2}$). Deoarece orice două coloane ale celei de a doua matrici sînt proporționale, este suficient să considerăm numai acele cazuri cînd una din coloanele determinantului primei matrici este înlocuită prin coloana corespunzătoare din a doua matrice.

Dacă în particular coloana k a primei matrici este înlocuită cu coloana k a matricii a doua, atunci determinantul corespunzător are următoarea expresie:

$$\frac{\lambda_n - \lambda}{\alpha_n^2}\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & \dots & 0 & \alpha_k\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & \dots & 0 & \alpha_k\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{k-1}-\lambda & \alpha_k\alpha_{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_k\alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_k\alpha_{k+1} & \lambda_{k+1}-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_k\alpha_{n-1} & 0 & \dots & \lambda_{n-1}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\alpha_k^2 \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda)}{\alpha_n^2(\lambda_k - \lambda)}.$$

Introducem notațiile

$$F(\lambda) = \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda) \quad \text{(determinantul primei matrici)},$$

$$G(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda).$$

Atunci determinantul căutat $D(\lambda)$ are forma

$$D(\lambda) = F(\lambda) + \frac{1}{\alpha_n^2} G(\lambda) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k - \lambda}. \tag{10}$$

Rezolvînd ecuația $D(\lambda) = 0$ găsim totodată mărimile care ne interesează $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$. Observăm că ele depind nu chiar de numerele α_j, ci de pătratele acestor numere; astfel, dacă la unul sau mai mulți din coeficienții ecuației (8) se schimbă semnul, atunci coeficienții canonici ai formei $A(x, x)$ pe subspațiul $\mathcal{R}_{n-1}$ nu se modifică.

10.27. Formula (10) este interesantă și prin aceea că ea ne permite să construim pornind de la numerele $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ satisfăcînd inegalitățile (8) un subspațiu $\mathcal{R}_{n-1}$ pe care forma $A(x, x)$ are coeficienții canonici $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ (în ipoteza că numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sînt distincte). Arătăm modul cum se rezolvă această problemă.

Observăm că formula (10) poate fi scrisă sub forma

$$\alpha_n^2 \frac{D(\lambda)}{G(\lambda)} = \alpha_n^2 \frac{E(\lambda)}{G(\lambda)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k - \lambda} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k - \lambda}; \tag{11}$$

așadar, numerele $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2$ sînt proporționale cu coeficienții descompunerii funcției raționale $\frac{D(\lambda)}{G(\lambda)}$ în funcții simple.

Fie date numerele $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ satisfăcînd inegalitățile

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2, \\ &\lambda_2 > \mu_2 > \lambda_3, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\lambda_{n-1} > \mu_{n-1} > \lambda_n \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Punem $D_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{n-1} (\mu_k - \lambda)$ și descompunem funcția rațională $\frac{D_1(\lambda)}{G(\lambda)}$ în fracții simple:

$$\frac{D_1(\lambda)}{G(\lambda)} = \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{c_2}{\lambda_2 - \lambda} + \dots + \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}. \tag{13}$$

Arătăm că toți coeficienții $c_1, c_2, \dots, c_n$ au același semn. Se știe că acești coeficienți se calculează după formulele

$$c_k = \frac{D_1(\lambda_k)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)} = -\frac{D_1(\lambda_k)}{G'(\lambda_k)}.$$

Numerele $D_1(\lambda_1), D_1(\lambda_2), \dots, D_1(\lambda_n)$ au semne alternativ opuse, deoarece rădăcinile polinomului $D_1(\lambda)$ alternează cu rădăcinile polinomului $G(\lambda)$. Numerele $G'(\lambda_1), G'(\lambda_2), \dots, G'(\lambda_n)$ au de asemenea alternativ semne opuse, deoarece $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sînt rădăcini simple ale polinomului $G(\lambda)$. De aceea rapoartele $\frac{D_1(\lambda_k)}{G'(\lambda_k)}$ și cu acestea, coeficienții c_k, au același semn. Pînă la un factor toți coeficienții c_k pot fi considerați pozitivi, iar suma lor egală cu 1 și atunci se pot determina numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ din condițiile

$$\alpha_1^2 = c_1, \ \alpha_2^2 = c_2, \dots, \alpha_n^2 = c_n. \tag{14}$$

Numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ pot avea orice semn. Arătăm că subspațiul $\mathcal{R}_{n-1}$, definit prin ecuația $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \ldots \alpha_n\xi_n = 0$ este cel căutat.

Într-adevăr, polinomul $D(\lambda)$ ale cărui rădăcini sînt coeficienții canonici ai formei $A(x, x)$ pe subspațiul $\mathcal{R}_{n-1}$ se exprimă, conform celor probate, cu ajutorul formulei (10) sau formulei (11) echivalentă cu ea. Comparînd (11) și (12) și ținînd cont de (14), rezultă că polinomul $D(\lambda)$ diferă numai printr-un factor numeric de polinomul $D_1(\lambda)$ construit anterior. Dar atunci rădăcinile polinomului $D(\lambda)$ coincid cu numerele $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, tocmai ceea ce s-a afirmat.

Observație. Se poate arăta că numerele obținute $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ depind continuu de mărimile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$. Folosind acest fapt se poate arăta că problema admite o soluție și pentru numerele $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ care satisfac inegalitățile (7) și, de asemenea, fără ipoteza că numerele $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sînt distincte.

§ 10.3. Problema perechilor de forme pătratice

10.31. În anumite chestiuni de matematică și fizică un rol important îl are rezolvarea următoarei probleme: pentru două forme pătratice $A(x, x)$ și $B(x, x)$ date într-un spațiu afin n-dimensional $\mathcal{R}_n$, să se indice o bază relativ la care ambele forme se reprezintă sub forma canonică (deci ca sume de pătrate ale coordonatelor cu anumiți coeficienți).

Următorul exemplu din plan ($n = 2$) arată că această problemă nu admite întotdeauna soluție. Considerăm următoarele două forme de două variabile ξ_1, ξ_2:

$$A(x, x) = \xi_1^2 - \xi_2^2,$$

$$B(x, x) = \xi_1\xi_2.$$

A găsi o bază canonică pentru aceste forme revine la a găsi o pereche comună de vectori conjugați pentru hiperbolele $A(x, x) = 1$ și $B(x, x) = 1$ (7-44). Aceste hiperbole sînt egale; din geometria analitică se știe că direcțiile conjugate ale acestor hiperbole sînt simetrice relativ la asimptotele lor. De aceea unghiurile polare φ_1 și φ_2 corespunzînd unei perechi de direcții conjugate, sînt legate pentru prima hiperbolă prin relația $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, iar pentru a doua, prin relația $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ (ambele egalități au loc pînă la un termen care este multiplu întreg de π).

Deoarece aceste egalități se exclud una pe alta, în cazul considerat, nu există perechi comune de direcții conjugate.

Problema considerată admite soluție în ipoteza suplimentară că *una din aceste forme, de exemplu* $B(x, x)$, *este pozitiv definită* (adică $B(x, x) > 0$ pentru $x \neq 0$).

Existența soluției poate fi ușor stabilită în modul următor. Fie $B(x, y)$ o formă biliniară simetrică, corespunzînd formei pătratice $B(x, x)$. Introducem în spațiul afin $\mathcal{R}_n$ o metrică euclidiană punînd

$$(x, y) = B(x, y).$$

Îndeplinirea axiomelor produsului scalar este asigurată prin simetria și prin pozitiv definirea formei $B(x, x)$.

Conform 10.11 există o bază ortonormală $e_1, \ldots, e_n$, relativ la metrica introdusă, în care forma $A(x, x)$ se scrie

$$A(x, x) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_n\eta_n^2 \qquad (15)$$

($\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ sînt coordonatele vectorului x în baza construită). În aceeași bază forma pătratică $B(x, x)$ se scrie, aplicînd formula 8.42 (17),

$$B(x, x) = (x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_n^2.$$

Așadar, există o bază în care ambele forme pătratice A, B au forma canonică.

10.32. Folosim pentru calculul coordonatelor vectorilor $e_1, \ldots, e_n$ ai bazei căutate proprietățile extremale ale formelor pătratice. Așa cum s-a arătat în 10.21, vectorii $e_1, \ldots, e_n$ sînt vectori supuși condiției $(x, x) = B(x, x) = 1$, astfel încît forma $A(x, x)$ să ia valori staționare. Presupunem că în baza de plecare formele $A(x, x)$ și $B(x, x)$ aveau următoarele expresii

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k, \quad B(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\xi_i\xi_k.$$

Aplicînd metoda lui Lagrange, trebuie să considerăm funcția

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k - \mu \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\xi_i\xi_k$$

și să egalăm cu zero derivatele parțiale ale lui F în raport cu toate coordonatele:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k - \mu \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\xi_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (16)$$

Sistemul obținut de ecuații liniare omogene

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11}-\mu b_{11})\,\xi_1+(a_{12}-\mu b_{12})\,\xi_2+\ldots+(a_{1n}-\mu b_{1n})\,\xi_n=0,\\
&(a_{21}-\mu b_{21})\,\xi_1+(a_{22}-\mu b_{22})\,\xi_2+\ldots+(a_{2n}-\mu b_{2n})\,\xi_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(a_{n1}-\mu b_{n1})\,\xi_1+(a_{n2}-\mu b_{n2})\,\xi_2+\ldots+(a_{nn}-\mu b_{nn})\,\xi_n=0
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

admite soluții nenule dacă și numai dacă determinantul său este egal cu zero

$$\begin{vmatrix}
a_{11}-\mu b_{11} & a_{12}-\mu b_{12} & \ldots & a_{1n}-\mu b_{1n}\\
a_{21}-\mu b_{21} & a_{22}-\mu b_{22} & \ldots & a_{2n}-\mu b_{2n}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\
a_{n1}-\mu b_{n1} & a_{n2}-\mu b_{n2} & \ldots & a_{nn}-\mu b_{nn}
\end{vmatrix}=0. \tag{18}$$

Rezolvînd ecuația (18), găsim n valori posibile $\mu=\mu_k$ ($k=1, 2, \ldots, n$); înlocuind μ_k în sistemul (17) putem găsi coordonate $\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}$ care corespund vectorului al k-lea al bazei căutate. Teorema probată în 10.31 asigură existența rădăcinilor reale ale determinantului sistemului (17) și pentru fiecare rădăcină multiplă prezența numărului corespunzător de soluții liniar independente ale acestui sistem.

10.33. Trecem la calculul coeficienților canonici. Arătăm că toți coeficienții $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ din scrierea canonică (15) a formei $A(x, x)$ coincid cu rădăcinile corespunzătoare $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ ale determinantului sistemului (17). Aici s-ar putea folosi un raționament analog celui făcut în 10.22; preferăm aici un calcul direct. Dacă pentru o rădăcină dată μ_m înmulțim ecuația de ordin i a sistemului (16) prin coordonata de ordin i a soluției $\xi_i^{(m)}$ ($i=1, 2, \ldots, n$) și adunăm toate egalitățile astfel obținute, rezultă egalitatea

$$A(e_m, e_m)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i^{(m)}\xi_k^{(m)}=\mu_m\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\xi_i^{(m)}\xi_k^{(m)}=$$

$$=\mu_m B(e_m, e_m)=\mu_m, \quad \text{deoarece } B(e_m, e_m)=1.$$

Pe de altă parte, coordonatele canonice $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ pentru vectorul e_m au în mod evident valorile $\eta_i=0$ pentru $i\neq m$, $\eta_m=1$ și forma $A(x, x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\eta_i^2$ pentru $x=e_m$ capătă valoarea λ_m. Rezultă de aici că $\mu_m=\lambda_m$, ceea ce trebuia arătat.

Acest rezultat ne dă posibilitatea să scriem $A(x, x)$ sub forma canonică urmărită, calculînd baza canonică.

10.34. Problema pusă în 10.31 relativ la reducerea simultană la forma canonică a două forme pătratice $A(x, x)$ și $B(x, x)$, dintre care una (de exemplu $B(x, x)$) este pozitiv definită, a fost rezolvată într-o variantă întărită; anume, forma $B(x, x)$ a fost redusă la sumă de pătrate ale coordonatelor cu coeficienți egali cu 1. În general, aceasta nu se cere și de aceea coeficienții formelor transformate nu se determină în mod univoc. Arătăm totuși că *rapoartele coeficienților canonici corespunzători nu depind de modul de reducere simultană a formelor* $A(x, x)$ *și* $B(x, x)$ *la forma canonică.*

Presupunem că $A(x, x)$ și $B(x, x)$ au fost reduse în două moduri la forma canonică: în coordonatele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$A(x, x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2, \quad B(x, x)=\sum_{i=1}^{n}\nu_i\xi_i^2,$$

și în coordonatele $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$,

$$A(x, x)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i\eta_i^2, \quad B(x, x)=\sum_{i=1}^{n}\tau_i\eta_i^2.$$

Deoarece forma $B(x, x)$ este pozitiv definită, numerele ν_i și τ_i ($i=1, 2, \ldots, n$) sînt toate pozitive. Considerăm o nouă transformare de coordonate

$$\sqrt{\nu_i}\xi_i=\overline{\xi}_i, \quad \sqrt{\tau_i}\eta_i=\overline{\eta}_i.$$

Atunci formele $A(x, x)$ și $B(x, x)$ se transformă astfel

a) în coordonatele $\overline{\xi}_i$:

$$A(x, x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\nu_i}\overline{\xi}_i^2, \quad B(x, x)=\sum_{i=1}^{n}\overline{\xi}_i^2,$$

b) în coordonatele $\overline{\eta_i}$:

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i}{\tau_i} \overline{\eta_i}^2, \quad B(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\eta_i}^2.$$

Fie $e_1, e_2, \ldots, e_n$ baza care corespunde coordonatelor $\overline{\xi_i}$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n$ baza care corespunde coordonatelor $\overline{\eta_i}$. În metrica definită de forma $B(x, x)$, ambele aceste baze sînt ortonormale. Dar atunci (10.14) mulțimea coeficienților canonici ai formei $A(x, x)$ este determinată univoc; astfel, șirul de numere $\frac{\lambda_1}{\nu_1}, \frac{\lambda_2}{\nu_2}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\nu_n}$ trebuie să coincidă cu șirul $\frac{\rho_1}{\tau_1}, \frac{\rho_2}{\tau_2}, \ldots, \frac{\rho_n}{\tau_n}$, pînă la ordinea termenilor. Teorema este complet demonstrată.

§ 10.4. Reducerea ecuației generale a suprafețelor de gradul doi la forma canonică

10.41. În acest paragraf vom numi elementele spațiului $\mathcal{R}_n$ puncte și nu vectori (2.17), ceea ce va corespunde mai bine reprezentării geometrice. *Se numește suprafață de gradul doi în spațiul n-dimensional $\mathcal{R}_n$ locul geometric al punctelor $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ care satisfac o ecuație de forma*

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i + c = 0, \tag{19}$$

sau

$$A(x, x) + 2L(x) + c = 0,$$

unde $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$ *este o formă pătratică de vectorul* x, $L(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i$ *este o formă liniară iar* c *o constantă.* (În cazul $n = 2$ imaginea geometrică este o curbă de gradul doi; în cele ce urmează, vom folosi peste tot cuvîntul „suprafață" fără a mai specifica de fiecare dată că în cazul $n = 2$ trebuie înlocuit prin cuvîntul „curbă").

Spațiul $\mathcal{R}_n$ va fi considerat euclidian iar numerele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt coordonatele vectorului x într-o bază ortonormală. Problema principală tratată în continuare este alegerea unei noi baze ortonormale în spațiul $\mathcal{R}_n$, ca și a unei alte origini a coordonatelor, astfel încît suprafața de gradul doi să fie determinată printr-o ecuație mai simplă, numită *canonică*. În continuare proprietățile suprafețelor vor fi studiate pe ecuația canonică.

10.42. Mai întîi, efectuăm în spațiul $\mathcal{R}_n$ o transformare ortogonală de coordonate

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\eta_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

așa cum am indicat în 10.12, astfel încît în noile variabile forma pătratică să se scrie sub forma canonică

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\eta_i^2.$$

Ecuația (19) va căpăta prin înlocuirea lui (20) forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\eta_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} l_i\eta_i + c = 0, \tag{21}$$

unde l_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt noii coeficienți ai formei liniare $L(x)$.

Dacă în egalitatea astfel obținută avem $\lambda_i \neq 0$ pentru un anumit i, atunci prin translația originii, se poate obține dispariția termenului corespunzător de gradul I. De exemplu, dacă $\lambda_1 \neq 0$, atunci

$$\lambda_1\eta_1^2 + 2l_1\eta_1 = \lambda_1\left(\eta_1 + \frac{l_1}{\lambda_1}\right)^2 - \frac{l_1^2}{\lambda_1}.$$

Punem $\eta_1' = \eta_1 + \frac{l_1}{\lambda_1}$; aceasta revine la translația originii coordonatelor în punctul $\left(-\frac{l_1}{\lambda_1}, 0, 0, \ldots, 0\right)$. Ca rezultat,

grupul termenilor $\lambda_1\eta_1^2 + 2l_1\eta_1$ se înlocuiește cu $\lambda_1\eta_1'^2 - \frac{l_1^2}{\lambda_1}$; astfel termenul de gradul doi rămîne cu același coeficient λ_1, termenul de gradul întîi dispare iar la termenul liber se adaugă $-\frac{l_1^2}{\lambda_1}$. După toate aceste transformări, ecuația suprafeței capătă forma

$$\lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_r\eta_r^2 + 2l_{r+1}\eta_{r+1} + \ldots + 2l_n\eta_n + c = 0.$$

Pentru simplificarea scrierii am omis punerea accentelor pe coordonate și coordonatele însele au fost renumerotate astfel încît să fie scrise inițial coordonatele care apar efectiv în forma pătratică (adică $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sînt distincte de zero, deci $\lambda_k = 0$ pentru $k > r$). Dacă aici $r = n$ sau dacă $r < n$, dar atunci numerele $l_{r+1}, l_{r+2}, \ldots, l_n$ sînt egale cu zero, se obține *ecuația canonică a unei suprafețe cu centru*

$$\lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_r\eta_r^2 + c = 0. \qquad (22)$$

Dacă $r = n$, atunci această suprafață se numește *propriu-zisă* (în cazul cînd $c \neq 0$) iar dacă $c = 0$, ea se numește *suprafață conică*.

Presupunem că printre numerele $l_{r+1}, \ldots, l_n$ există cel puțin unul diferit de zero. În acest caz, efectuăm o transformare ortogonală de coordonate după formulele

$$\tau_1 = \eta_1,$$
$$\tau_2 = \eta_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tau_r = \eta_r,$$
$$\tau_{r+1} = -(l_{r+1}\eta_{r+1} + \ldots + l_n\eta_n)\frac{1}{M},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

unde M este un factor pozitiv asigurînd ortogonalitatea matricii transformării: deoarece pentru o matrice ortogonală suma pătratelor elementelor fiecărei linii trebuie să fie egală cu 1, atunci

$$M^2 = l_{r+1}^2 + l_{r+2}^2 + \ldots + l_n^2.$$

Celelalte linii care urmează după a $(r+1)$-a pot fi arbitrare astfel încît matricea obținută să fie ortogonală (8.95).

Ca rezultat al acestei transformări, ecuația suprafeței capătă forma

$$\lambda_1\tau_1^2 + \ldots + \lambda_r\tau_r^2 = 2M\tau_{r+1} - c.$$

Dacă $c \neq 0$, o translație a originii coordonatelor după formula

$$\tau'_{r+1} = \tau_{r+1} - \frac{c}{2M}.$$

permite eliminarea termenului liber; ecuația (din nou cu omiterea accentelor pe coordonate) capătă forma

$$\lambda_1\tau_1^2 + \ldots + \lambda_r\tau_r^2 = 2M\tau_{r+1}; \qquad (23)$$

și în acest caz se numește *ecuația canonică a unei suprafețe fără centru.*

Orice suprafață de gradul II în a cărei ecuație canonică figurează toate cele n coordonate se numește *nesingulară*, iar dacă în ecuația ei canonică nu figurează toate cele n coordonate, suprafața se numește *singulară*. Toate aceste denumiri vor fi justificate în cele ce urmează.

§ 10.5. Proprietăți geometrice ale suprafețelor de gradul doi

10.51. *Centrul unei suprafețe.* Se numește *centru* al unei suprafețe, orice punct $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0)$ avînd proprietatea că dacă punctul $(\xi_1^0 + \xi_1, \xi_2^0 + \xi_2, \ldots, \xi_n^0 + \xi_n)$ aparține suprafeței, atunci simetricul acestui punct față de x_0, adică punctul $(\xi_1^0 - \xi_1, \xi_2^0 - \xi_2, \ldots, \xi_n^0 - \xi_n)$ aparține de asemenea suprafeței. De exemplu, suprafața avînd ecuația canonică (22) admite centru; orice punct pentru care $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_r = 0$ este în mod evident un centru. Se obține astfel o explicație pentru denumirea de suprafețe cu centru dată acestei clase de suprafețe.

Arătăm un fapt care va fi folosit în continuare, anume că *o suprafață avînd ecuația de forma* (22) *nu admite alte centre*

în afara celor indicate. Într-adevăr, fie $(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0)$ un centru al acestei suprafețe. Atunci din condiția

$$\lambda_1(\xi_1^0 + \xi_1)^2 + \lambda_2(\xi_2^0 + \xi_2)^2 + \ldots + \lambda_r(\xi_r^0 + \xi_r)^2 + c = 0$$

rezultă

$$\lambda_1(\xi_1^0 - \xi_1)^2 + \lambda_2(\xi_2^0 - \xi_2)^2 + \ldots + \lambda_r(\xi_r^0 - \xi_r)^2 + c = 0.$$

Scăzînd aceste două egalități, obținem

$$\lambda_1\xi_1^0\xi_1 + \lambda_2\xi_2^0\xi_2 + \ldots + \lambda_r\xi_r^0\xi_r = 0.$$

Alegem pe suprafață un punct în care $\xi_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_r = 0$, $\xi_1 \neq 0$ (este evident că ecuația (22) poate fi satisfăcută de astfel de valori). Atunci obținem $\lambda_1\xi_1^0\xi_1 = 0$, de unde $\xi_1^0 = 0$. În mod similar, se arată că $\xi_2^0 = \ldots = \xi_r^0 = 0$, ceea ce trebuia arătat.

10.52. *Suprafețe propriu-zise cu centru.* Considerăm pentru început o suprafață propriu-zisă cu centru, adică $r = n$ și $c \neq 0$. Atunci ecuația (22) se poate pune sub forma

$$\pm\frac{\eta_1^2}{a_1^2} \pm \frac{\eta_2^2}{a_2^2} \pm \ldots \pm \frac{\eta_n^2}{a_n^2} = 1,$$

unde numerele a_k se determină prin formulele

$$a_k = +\sqrt{\left|\frac{c}{\lambda_k}\right|} \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

aceste numere se numesc *lungimile semiaxelor* suprafeței.

Renumerotăm coordonatele astfel încît în ecuația suprafeței să figureze mai întîi termenii pozitivi:

$$\frac{\eta_1^2}{a_1^2} + \frac{\eta_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{\eta_k^2}{a_k^2} - \frac{\eta_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \ldots - \frac{\eta_n^2}{a_n^2} = 1. \qquad (24)$$

Cazul $k = 0$ este exclus din considerații deoarece atunci nu există valori reale $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ satisfăcînd ecuația (24);

în acest caz se mai spune că ecuația (24) definește o suprafață „imaginară".

Rămîn n tipuri distincte posibile de suprafețe cu centru, corespunzînd cazurilor $k = 1, 2, \ldots, n$.

a. În cazul bidimensional ($n = 2$) ecuația (24) definește, pentru $k = 1$ și $k = 2$ respectiv, două curbe cunoscute din geometria analitică:

$$k = 1: \frac{\eta_1^2}{a_1^2} - \frac{\eta_2^2}{a_2^2} = 1 \quad (\textit{hiperbolă})$$

$$k = 2: \frac{\eta_1^2}{a_1^2} + \frac{\eta_2^2}{a_2^2} = 1 \quad (\textit{elipsa}).$$

b. Pentru $n = 3$ sînt posibile cazurile $k = 1$, $k = 2$ și $k = 3$, cărora le corespund trei suprafețe cu centru nesingulare în spațiul tridimensional, definite prin următoarele ecuații:

$$k = 1: \frac{\eta_1^2}{a_1^2} - \frac{\eta_2^2}{a_2^2} - \frac{\eta_3^2}{a_3^2} = 1 \quad (\textit{hiperboloid cu două pînze});$$

$$k = 2: \frac{\eta_1^2}{a_1^2} + \frac{\eta_2^2}{a_2^2} - \frac{\eta_3^2}{a_3^2} = 1 \quad (\textit{hiperboloid cu o pînză}),$$

$$k = 3: \frac{\eta_1^2}{a_1^2} + \frac{\eta_2^2}{a_2^2} + \frac{\eta_3^2}{a_3^2} = 1 \quad (\textit{elipsoid}).$$

Reamintim pe scurt construcția fiecăreia din aceste suprafețe.

Considerăm secțiunile fiecăreia din ele prin plane orizontale $\eta_3 = ca_3$ $(-\infty < c < \infty)$. Aceste secțiuni sînt respectiv: hiperbole cu axa reală η_1:

$$k = 1: \frac{\eta_1^2}{a_1^2} - \frac{\eta_2^2}{a_2^2} = 1 + c^2;$$

elipse definite pentru toate valorile lui c:

$$k = 2: \frac{\eta_1^2}{a_1^2} + \frac{\eta_2^2}{a_2^2} = 1 + c^2;$$

și elipse definite numai pentru $|c| \leqslant 1$:

$$k = 3: \frac{\eta_1^2}{a_1^2} + \frac{\eta_2^2}{a_2^2} = 1 - c^2.$$

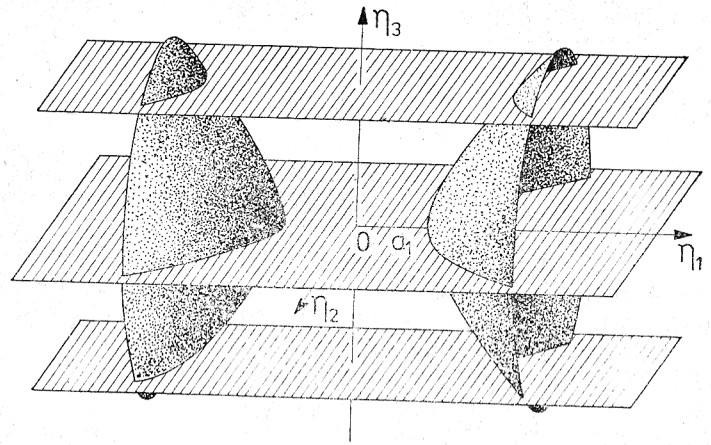


Fig. 2

Pentru a determina poziția vîrfurilor acestor secțiuni, construim secțiunile suprafețelor prin plane de coordonate $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$. Pentru cazul $k = 1$ obținem o secțiune reală doar pentru planul de coordonate $\eta_2 = 0$, care va reprezenta hiperbola

$$\frac{\eta_1^2}{a_1^2} - \frac{\eta_3^2}{a_3^2} = 1.$$

Vîrfurile hiperbolelor secțiunilor orizontale se vor afla pe această curbă; ca rezultat al construcției se obține un hiperboloid cu două pînze (fig. 2).

Pentru cazul $k = 2$ secțiunile cu ambele plane de coordonate $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ sînt hiperbole cu axa imaginară:

$$\frac{\eta_2^2}{a_2^2} - \frac{\eta_3^2}{a_3^2} = 1, \quad \frac{\eta_1^2}{a_1^2} - \frac{\eta_3^2}{a_3^2} = 1;$$

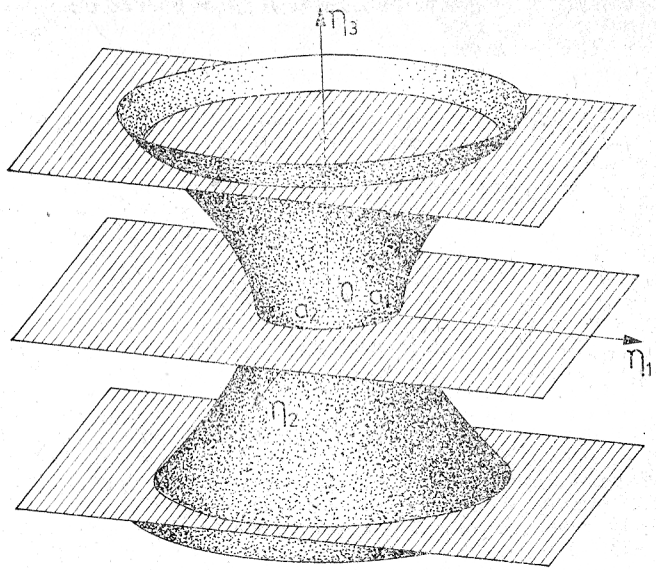


Fig. 3

Mulțimea elipselor secțiunilor orizontale cu vîrfurile pe aceste hiperbole generează un hiperboloid cu o pînză (fig. 3). În sfîrșit, în cazul $k = 3$ secțiunile prin planele de coordonate $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ sînt elipse; considerînd elipsele secțiunilor orizontale se obține un elipsoid (fig. 4).

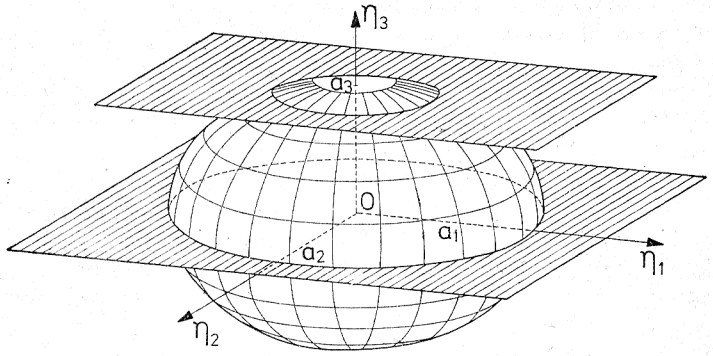


Fig. 4

c. Suprafețele de gradul doi în spații $\mathcal{R}_n$, $n \geqslant 4$ nu au o reprezentare geometrică intuitivă. Putem însă indica și în cazul multidimensional deosebirile esențiale între diversele tipuri de suprafețe propriu-zise care corespund valorilor $k = 1, 2, \ldots, n$. Vom pleca de la deosebirile evidențiate în spațiul tridimensional. Pe un hiperboloid cu două pînze ($k = 1$) există o pereche de puncte care nu pot fi unite printr-un drum situat pe suprafață (luînd de exemplu un punct pe una din pînze și un punct pe cealaltă). Pe un hiperboloid cu o pînză ($k = 2$) orice două puncte pot fi unite printr-un drum situat pe suprafață; există însă o curbă închisă (de exemplu elipsa-colier a hiperboloidului) care nu poate fi redusă la un punct prin deformare continuă. Pe un elipsoid ($k = 2$) orice curbă închisă situată pe elipsoid poate fi deformată continuu la un punct. Aceste observații pot fi un punct de plecare în formularea deosebirilor geometrice între suprafețele de gradul II cu centru din spațiul n-dimensional.

Introducem pe cale intuitivă cîteva noțiuni, nu în cadrul cel mai general posibil. O figură A se numește *homeomorfă* cu o figură B dacă există o aplicație bijectivă și bicontinuă între mulțimile punctelor figurilor A și B. O figură A situată pe o suprafață S se numește *omotopă* cu o figură B situată pe aceeași suprafață dacă figura A poate fi redusă la figura B printr-o deformare continuă, astfel încît figura A să rămînă tot timpul pe suprafața S.

Deosebirile geometrice între suprafețele cu centru pot fi formulate cu ajutorul noțiunilor de mai sus astfel. Pentru $k = 1$ se indică cu ușurință o pereche de puncte de pe suprafață care nu sînt omotope între ele. Pentru $k = 2$ orice punct de pe suprafață este omotop cu orice alt punct, dar există o curbă pe suprafața omeotopă cu un cerc care nu este omotopă cu un punct. Pentru $k = 3$ orice curbă homeomorfă cu un cerc este omotopă cu un punct; dar există o porțiune a suprafeței homeomorfă cu o sferă bidimensională dată neomotopă cu un punct. Continuînd astfel, putem formula pentru orice k o proprietate distinctivă, specifică a suprafeței cu centru corespunzătoare, anume: orice parte a ei, homeomorfă cu o sferă $(k-1)$-dimensională, este omotopă cu un punct, dar există o parte homeomorfă cu o sferă k-dimensională neomotopă cu un punct etc. Din acest rezultat, rezultă în particular că suprafețele cu centru dintr-un spațiu n-dimensional sînt evident homeomorfe între ele pentru același k, dar nu sînt homeomorfe între ele pentru valori distincte ale lui k. Demonstrații riguroase ale acestor proprietăți interesante pot fi găsite de exemplu în cartea de topologie a lui Seifert și Trelfall.

10.53. *Suprafețe conice.* Considerăm acum cazul suprafețelor conice (obținut pentru $c = 0$ în ecuația (22)). Ecuația (22) devine omogenă și odată cu un punct $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, ecuația este satisfăcută atunci de punctul $(t\eta_1, t\eta_2, \ldots, t\eta_n)$ pentru orice t. Aceasta înseamnă că suprafața este generată de drepte care trec prin originea coordonatelor (cu excepția cazului cînd toți termenii din suma (22) au același semn și ecuația definește atunci doar un singur punct din $\mathcal{R}_n$ — originea coordonatelor). Așa cum am procedat anterior, ecuația canonică a unei suprafețe conice poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\eta_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{\eta_k^2}{a_k^2} - \frac{\eta_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \ldots - \frac{\eta_n^2}{a_n^2} = 0.$$

Evaluăm numărul de tipuri posibile de suprafețe conice pentru n dat. Dacă numărul $m = n - k$ al coeficienților negativi din ecuația canonică (22) este mai mare decît $\frac{n}{2}$, atunci înmulțind ecuația cu -1, obținem ecuația aceleiași suprafețe, dar cu numărul coeficienților negativi mai mic decît $\frac{n}{2}$. Așadar, este suficient să considerăm cazurile care corespund condiției $m \leqslant \frac{n}{2}$. Dacă n este par, atunci excluzînd cazul punctului ($k = 0$), obținem $\frac{n}{2}$ tipuri distincte de suprafețe conice, corespunzînd valorilor $m = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$; dacă n este impar, atunci tipurile distincte sînt în număr de $\frac{n-1}{2}$, anume ele corespund valorilor $m = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$.

a. În plan ($n = 2$), în afara cazului punctului, există un singur tip ($m = 1$) avînd ecuația canonică

$$\frac{\eta_1^2}{a_1^2} - \frac{\eta_2^2}{a_2^2} = 0.$$

Imaginea geometrică corespunzătoare este o pereche de drepte care se intersectează în origine, avînd ecuațiile $\frac{\eta_1}{a_1} = \pm\frac{\eta_2}{a_2}$.

b. În spațiul tridimensional ($n = 3$), în afara suprafețelor conice reduse la un punct, există de asemenea un singur tip de suprafață conică (pentru că $\frac{n-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$), avînd ecuația canonică

$$\frac{\eta_1^2}{a_1^2} + \frac{\eta_2^2}{a_2^2} - \frac{\eta_3^2}{a_3^2} = 0.$$

Imaginea geometrică corespunzătoare este un con (fig. 5); în cazul particular cînd $a_1 = a_2$ se obține un con circular drept.

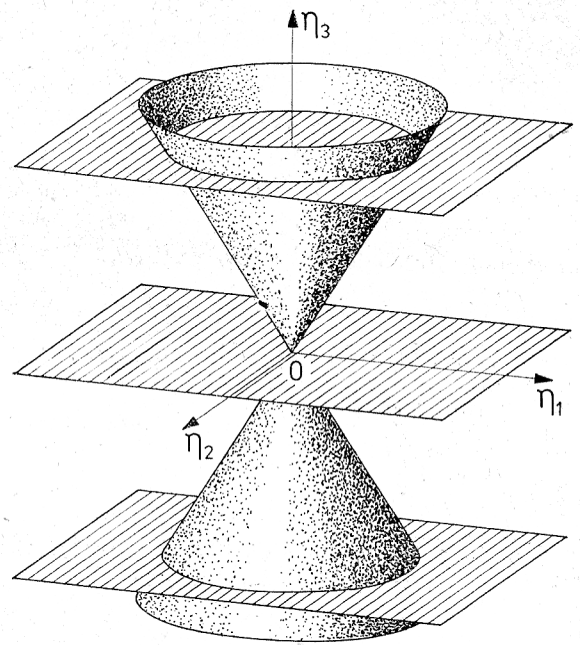


Fig. 5

c. Pentru a ne face o reprezentare asupra formei unei suprafețe conice în cazul general, considerăm secțiunea ei printr-un hiperplan

$$\eta_n = ca_n (-\infty < c < \infty)$$

$$\frac{\eta_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{\eta_k^2}{a_k^2} - \frac{\eta_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \ldots - \frac{\eta_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = c^2.$$

Această ecuație corespunde unei suprafețe cu centru în spațiul $(n-1)$-dimensional. Toate aceste suprafețe (pentru valori distincte ale lui c) sînt geometric asemenea între ele, dimensiunile corespunzătoare ale semiaxelor fiind proporționale cu mărimea c.

Astfel, orice suprafață conică în spațiul n-dimensional poate fi obținută dintr-o suprafață cu centru într-un spațiu $(n-1)$-dimensional $\mathcal{R}_{n-1}$ cu ajutorul unei deplasări a acestei suprafețe cu centru în lungul axei perpendiculare pe $\mathcal{R}_{n-1}$, printr-o dilatare în toate direcțiile. Pentru a obține astfel toate tipurile posibile de suprafețe conice, este suficient să folosim acele suprafețe cu centru din spațiul $(n-1)$-dimensional pentru care numărul termenilor negativi din ecuația canonică nu depășește $\frac{n-1}{2}$.

10.54. *Suprafețe fără centru nesingulare* (*paraboloizi*). În același mod cum am procedat la punctul 10.52, putem reduce ecuația unei suprafețe fără centru nesingulare (numită nedegenerată) la forma

$$\frac{\eta_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{\eta_k^2}{a_k^2} - \frac{\eta_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \ldots - \frac{\eta_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = 2\eta_n. \qquad (25)$$

Evaluăm numărul de tipuri distincte de suprafețe fără centru nesingulare. Dacă numărul termenilor negativi din membrul stîng al ecuației (25) este mai mare decît $\frac{n-1}{2}$, atunci înmulțind ecuația (25) cu -1 obținem ecuația aceleiași suprafețe, dar cu numărul termenilor negativi din membrul stîng mai mic decît $\frac{n-1}{2}$ și cu schimbarea semnului în membrul drept. După simetria $\eta_n' = -\eta_n$ semnul din membrul drept se restabilește. Astfel, numărul de tipuri distincte de suprafețe nesingulare fără centru (dacă nu considerăm tipurile distincte de suprafețe care se obțin una din alta prin simetrie de tipul $\eta_n' = -\eta_n$) este egal cu numărul valorilor întregi ale lui m astfel încît $0 \leqslant m \leqslant \frac{n-1}{2}$; acest număr este egal cu $\frac{n}{2}$ pentru n par și cu $\frac{n+1}{2}$ pentru n impar.

a. În plan ($n = 2$) există o curbă unică de gradul II nesingulară fără centru — *parabola*, avînd ecuația canonică

$$\eta_1^2 = 2a_1^2\eta_2 \quad (m = 0).$$

b. În spațiul tridimensional există două suprafețe nesingulare fără centru $\left(n = 3, \frac{n+1}{2} = 2\right)$:

1) $\frac{\eta_1^2}{a_1^2} + \frac{\eta_2^2}{a_2^2} = 2\eta_3$ $(m = 0)$ *(paraboloidul eliptic)*;

2) $\frac{\eta_1^2}{a_1^2} - \frac{\eta_2^2}{a_2^2} = 2\eta_3$ $(m = 1)$ *(paraboloidul hiperbolic)*

În primul caz secțiunea suprafeței cu orice plan $\eta_3 = C > 0$ este o elipsă; pentru a determina poziția vîrfurilor elipsei, construim secțiunile suprafeței prin planele de coordonate $\eta_1 = 0$ și $\eta_2 = 0$. În fiecare din aceste secțiuni obținem o parabolă; urmele acestor parabole pe planul $\eta_3 = C$ indică poziția vîrfurilor elipsei.

Suprafața care se obține (fig. 6) este un paraboloid eliptic (iar dacă $a_1 = a_2$, un paraboloid circular).

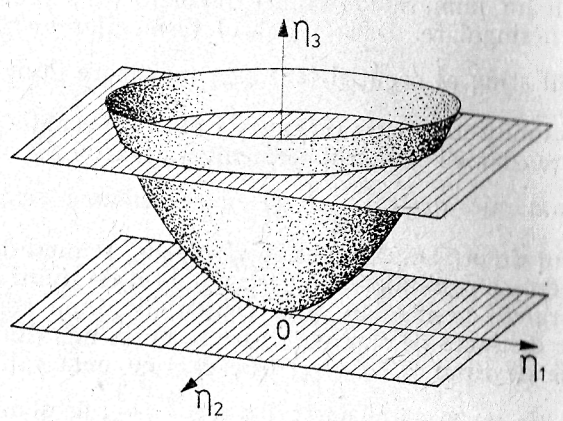


Fig. 6

În al doilea caz secțiunea suprafeței cu planul $\eta_3 = C > 0$ este o hiperbolă cu axa reală η_1. Pentru a determina poziția vîrfurilor, considerăm secțiunea suprafeței cu planul $\eta_2 = 0$; se obține parabola $\eta_1^2 = 2a_1^2\eta_3$, $\eta_2 = 0$, a cărei urmă pe planul $\eta_3 = C$ indică poziția vîrfurilor hiperbolei.

Secțiunea cu planul $\eta_3 = C < 0$ reprezintă o hiperbolă cu axa reală η_2; vîrfurile acestei hiperbole sînt situate pe parabola $\eta_2^2 = -2a_2^2\eta_3$ în planul $\eta_1 = 0$.

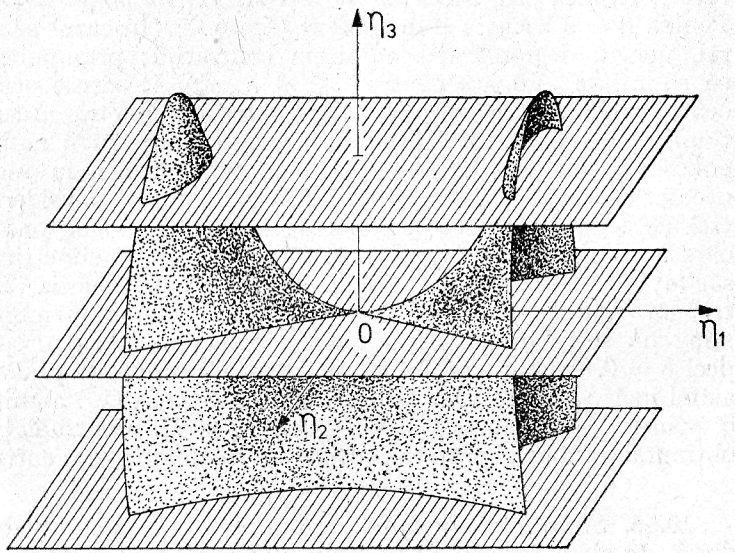


Fig. 7

În secțiunea $\eta_3 = 0$ se obține o pereche de drepte care reprezintă asimptotele pentru proiecțiile pe planul $\eta_3 = 0$ ale tuturor hiperbolelor considerate de noi în secțiunile orizontale ale suprafeței. Suprafața este un paraboloid hiperbolic (fig. 7).

c. Pentru a reprezenta forma suprafeței (25) în cazul general, putem urmări schimbarea formei secțiunilor ei prin hiperplane $\eta_n = C$ pentru C variind de la 0 la $+\infty$. În fiecare din aceste secțiuni se obține o suprafață cu centru într-un spațiu $(n-1)$-dimensional. Toate aceste suprafețe sînt asemenea între ele; dimensiunile corespunzătoare ale semiaxelor (spre deosebire de suprafețele conice) se modifică după o lege parabolică, adică proporționale cu rădăcina pătrată a lui C. Pentru $C = 0$ suprafața cu centru devine conică. Dacă $C < 0$ se obține *suprafața conjugată*, în care coeficienții ecuației canonice cu semnele negative și pozitive își schimbă rolurile). În particular, dacă toți coeficienții

ecuației (25) au același semn, de exemplu sînt pozitivi, atunci suprafața este situată în semispațiul $\eta_n \geqslant 0$.

Denumirea dată clasei suprafețelor nesingulare considerate se explică prin aceea că ele într-adevăr *nu admit centru*. Pentru $n = 3$ aceasta este evident (fig. 6, 7). În cazul general, pentru demonstrație admitem contrariul; presupunem că suprafața (25) are centru $(\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_n^0)$. Deoarece acest centru trebuie să fie în particular centru de simetrie al secțiunii $\eta_n = \eta_n^0$, care reprezintă o suprafață cu centru nesingulară într-un spațiu $(n-1)$-dimensional, atunci în mod necesar $\eta_1^0 = \eta_2^0 = \ldots = \eta_{n-1}^0 = 0$. Așadar, centrul considerat trebuie să se găsească pe axa η_n. Considerăm un punct oarecare $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}, \eta_n^0 + \delta)$ al suprafeței și simetricul său față de centrul propus $(-\eta_1, \ldots, -\eta_{n-1}, \eta_{n-\delta}^0)$. Ecuația (25) trebuie verificată de ambele aceste puncte. Deoarece membrul stîng nu se modifică, nu se modifică nici membrul drept, deci $\delta = 0$. Așadar, rezultă că pe suprafață nu există puncte astfel încît $\eta_n \neq \eta_n^0$. Dar este evident ca ecuația (25) admite o soluție $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ astfel încît $\eta_n \neq \eta_n^0$. Contradicția obținută arată că suprafața considerată nu poate avea centru.

10.55. *Suprafețe singulare.* Suprafețele de gradul doi din $\mathcal{R}_n$ în ale căror ecuații canonice participă mai puțin de n coordonate se numesc *singulare*. Presupunem de exemplu că într-o ecuație canonică lipsește coordonata η_n. Atunci toate secțiunile suprafeței cu hiperplane $(n-1)$-dimensionale $\eta_n = C$ $(-\infty < C < \infty)$ reprezintă una și aceeași suprafață în spațiul $(n-1)$-dimensional. Așadar, *orice suprafață singulară este generată prin translația paralelă a unei suprafețe (de gradul doi) dintr-un spațiu $(n-1)$-dimensional în lungul unei perpendiculare pe acest spațiu $(n-1)$-dimensional.*

a. Determinăm în cazul $n = 2$, curbele singulare de gradul doi. Deoarece în ecuația canonică poate participa doar o singură coordonată, această ecuație va avea forma

$$\frac{\eta_1^2}{a_1^2} = C.$$

Pentru $C > 0$ obținem o pereche de drepte paralele, pentru $C = 0$ o pereche de drepte confundate și pentru $C < 0$ o curbă imaginară.

b. Pentru a construi suprafețele singulare din spațiul tridimensional $(n = 3)$, trebuie translatate paralel în lungul axei η_3 toate curbele de gradul doi din planul (η_1, η_2). Elipsa,

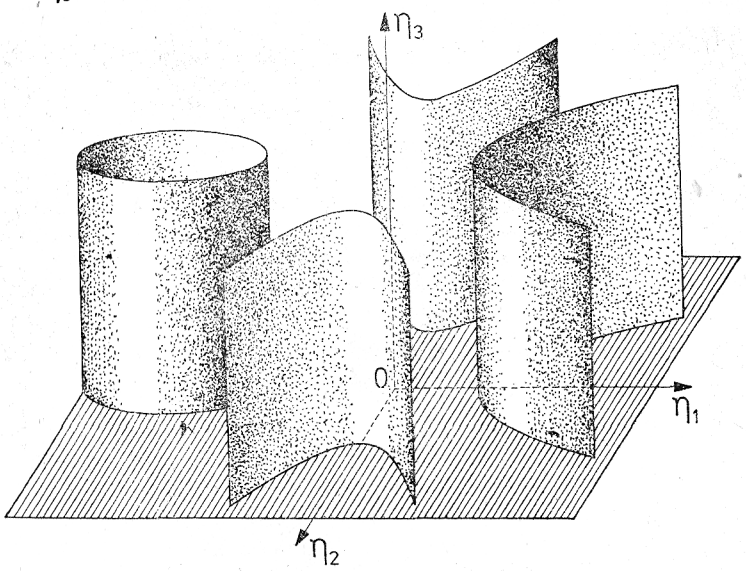


Fig. 8

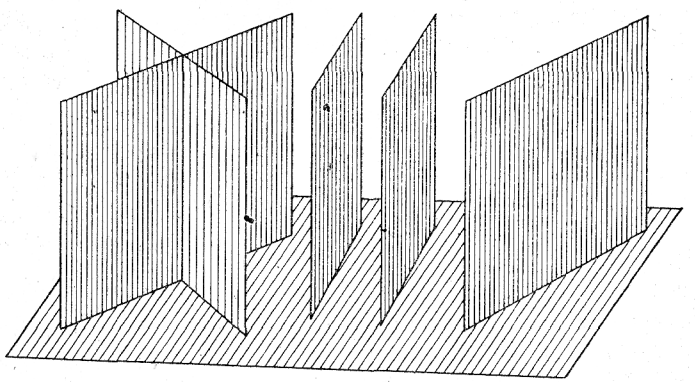


Fig. 9

hiperbola, parabola generează respectiv cilindri eliptici, hiperbolici, parabolici (fig. 8). Pentru o pereche de drepte care se intersectează (respectiv care sînt paralele sau coincid)

se obțin o pereche de plane care se intersectează (respectiv care sînt paralele sau care coincid), (fig. 9).

§ 10.6. Analiza unei suprafețe dată prin ecuația sa generală

10.61. Am descris toate tipurile posibile de suprafețe de gradul doi în spațiul euclidian n-dimensional. Tipul suprafeței se determină după ecuația ei canonică. Dar adeseori o suprafață nu se dă prin ecuația sa canonică, ci prin ecuația sa generală (19) și este esențial să determinăm tipul suprafeței, cu alte cuvinte să construim ecuația canonică fără a efectua toate transformările descrise în 10.42.

Pentru a scrie ecuația canonică a unei suprafețe dată prin ecuația (19), este suficient să cunoaștem următoarele mărimi:

a. Rădăcinile polinomului de grad n

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

b. Coeficienții polinomului de grad n

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & c \end{vmatrix}.$$

Pentru a obține expresii explicite pentru coeficienții acestui polinom, folosim proprietatea liniară a determinanților (1.44). Fiecare coloană a determinantului $\Delta_1(\lambda)$, în afara ultimei coloane, poate fi scrisă ca sumă a două coloane, prima fiind formată din numerele $a_{ij}(i = 1, 2, \dots, n;\ j$ fixat) și b_j, iar cea de a doua formată din n zerouri și numărul $-\lambda$. Atunci determinantul $\Delta_1(\lambda)$ se reprezintă ca sumă de determinanți, fiecare din ei fiind obținut prin înlocuirea anumitor coloane (exceptînd ultima) din matricea

$$A_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & c \end{Vmatrix} \tag{26}$$

cu coloane constînd din n zerouri și un element $-\lambda$ aflat pe diagonala principală a matricii. Fiecare din acești determinanți dezvoltat după coloanele în care se află numerele $-\lambda$ va fi de forma $(-\lambda)^k M_{n+1-k}$, unde k este numărul coloanelor care conțin elemente $-\lambda$, iar M_{n+1-k} este un anumit minor de ordin $n+1-k$ din matricea A_1. Acest minor se caracterizează prin aceea că în el apar odată cu fiecare linie a matricii A_1, coloana acestei matrici cu același număr, folosind de asemenea și ultima linie și ultima coloană a acestei matrici. Minorii care au această proprietate vor fi numiți *bordați*. Evident, orice minor bordat al matricii A_1 apare în dezvoltarea determinantului $\Delta_1(\lambda)$. De aici obținem direct rezultatul următor: *coeficientul lui* $(-\lambda)^k$ *în dezvoltarea determinantului* $\Delta_1(\lambda)$ *după puterile lui* $-\lambda$ *este egal cu suma tuturor minorilor bordați de ordin* $n+1-k$. *Dezvoltarea determinantului* $\Delta_1(\lambda)$ *se scrie atunci astfel*

$$\Delta_1(\lambda) = \alpha_{n+1} - \alpha_n\lambda + \alpha_{n+1}\lambda^2 - \dots + \alpha_1(-\lambda)^n;$$

în această scriere coeficientul α_k *va fi egal cu suma tuturor minorilor bordați de ordin* k *ai matricii* A_1.

10.62. Rădăcinile polinomului caracteristic $\Delta(\lambda)$, așa cum știm, ne dau coeficienții pătratelor variabilelor care apar în ecuația canonică. Pentru a determina ceilalți coeficienți (termenul liber dacă ecuația canonică este de forma (22) sau termenul de gard întîi dacă ecuația are forma (23)), este necesar să analizăm comportarea coeficienților polinomului $\Delta_1(\lambda)$ la schimbarea liniară a coordonatelor.

Considerăm în spațiul euclidian $(n+1)$-dimensional $\mathcal{R}_{n+1}$ forma pătratică

$$A_1(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k + 2\sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i\xi_{n+1} + c\xi_{n+1}^2, \qquad (27)$$

unde $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}$ sînt coordonatele vectorului $x \in \mathcal{R}_{n+1}$ într-o bază ortonormală $e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}$. Acestei forme pătratice îi corespunde un operator simetric $\mathcal{A}_1$, care are în baza $\{e\}$ matricea (26); vom nota cu $A_{(e)}$ această matrice.

Alături de acest operator, considerăm operatorul definit prin egalitățile $\mathcal{E}_1 e_k = e_k$ pentru $k \leqslant n$, $\mathcal{E}_1 e_{n+1} = 0$. Acestuia îi corespunde următoarea matrice (în aceeași bază $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$):

$$E_1 = \begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (28)$$

Notăm cu $\mathcal{R}_n$ subspațiul de bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$; operatorul $\mathcal{E}_1$ în acest subspațiu este evident operatorul identic.

Considerăm acum o transformare izometrică $\mathcal{Q}$ în spațiul $\mathcal{R}_n$; ea transformă baza ortonormală $e_1, e_2, \ldots, e_n$ într-o bază ortonormală $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Construim transformarea izometrică $\mathcal{Q}_1$ în spațiul $\mathcal{R}_{n+1}$ punînd $\mathcal{Q}_1 e_1 = f_1$, $\mathcal{Q}_1 e_2 = f_2, \ldots, \mathcal{Q}_1 e_n = f_n$, $\mathcal{Q}_1 e_{n+1} = e_{n+1} = f_{n+1}$.

Dacă matricea operatorului $\mathcal{Q}$ în spațiul $\mathcal{R}_n$ are forma

$$Q = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \ldots & q_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n1} & q_{n2} & \ldots & q_{nn} \end{Vmatrix},$$

atunci în spațiul $\mathcal{R}_{n+1}$ matricea operatorului $\mathcal{Q}_1$ construit va avea forma

$$Q_1 = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1n} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & \ldots & q_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n1} & q_{n2} & \ldots & q_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Acestei matrici îi corespund următoarele formule de transformare a coordonatelor (8.94):

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= q_{11}\eta_1 + q_{21}\eta_2 + \ldots + q_{n1}\eta_n, \\ \xi_2 &= q_{12}\eta_1 + q_{22}\eta_2 + \ldots + q_{n2}\eta_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= q_{1n}\eta_1 + q_{2n}\eta_2 + \ldots + q_{nn}\eta_n, \\ \xi_{n+1} &= \eta_{n+1} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Operatorul $\mathcal{A}_1$ are în noua bază $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ matricea $A_{(f)} = Q^{-1}A_{(e)}Q$ (5.51); operatorul $\mathcal{E}_1$ are aceeași matrice (28) ca mai sus. Conform 5.52 are loc egalitatea

$$\det(A_{(f)} - \lambda E_1) = \det(A_{(e)} - \lambda E_1).$$

Presupunem că transformarea $\mathcal{Q}$ este cea din 10.42 prin care forma pătratică $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$ se reduce la forma canonică

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\eta_i^2.$$

Din formula (29) rezultă că transformarea $\mathcal{Q}$ reduce forma pătratică (27) de $n+1$ variabile la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\eta_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} l_i\eta_i\eta_{n+1} + c\eta_{n+1}^2.$$

Matricea operatorului $\mathcal{A}_1$, care se transformă la fel ca matricea formei pătratice, capătă după această transformare forma următoare:

$$A_{(f)} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & & & & & l_1 \\ & \lambda_2 & & & 0 & & & l_2 \\ & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & \lambda_r & & & & l_r \\ 0 & & & & 0 & & & l_{r+1} \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 0 & l_n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_r & l_{r+1} & \dots & l_n & c \end{Vmatrix}.$$

Polinomul $\Delta_1(\lambda) = \det(A_{(f)} - \lambda E_1)$ va fi egal cu determinantul

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & l_1 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r-\lambda & 0 & \dots & 0 & l_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & \dots & 0 & l_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -\lambda & l_n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_r & l_{r+1} & \dots & l_n & c \end{vmatrix}.$$

Coeficienții acestui polinom pot fi calculați cu ajutorul minorilor bordați ai matricii $A_{(f)}$, tot așa cum au fost calculați anterior cu ajutorul minorilor bordați ai matricii $A_{(e)} = A_1$.

Observăm că pentru $r < n$ toți minorii bordați ai matricii $A_{(f)}$ de ordin mai mare ca $r+2$ sînt nuli deoarece ei conțin două coloane proporționale. Așadar, pentru $r < n$ coeficienții α_{r+3}, α_{r+4}, ..., sînt nuli.

În plus, pentru $r < n$ în minorii bordați de ordin $r+2$ în afara celor care sînt nuli, este necesar să folosim primele r linii și primele r coloane ale matricii $A_{(f)}$.

În minorii bordați de ordin $(r+1)$ pot să nu fie utilizate aceste r linii și coloane; notăm două cazuri cînd această utilizare are loc:

1) $r = n$; evident, în matricea $A_{(f)}$ există un unic minor de ordin $r+1$, adică de ordin $n+1$, care coincide cu determinantul lui; el conține toate liniile și coloanele matricii $A_{(f)}$.

2) $r < n$, $l_{r+1} = l_{r+2} = \dots = l_n = 0$; în afara celor nuli, există un minor bordat de ordin $r+1$, care se află pe liniile și coloanele $1, 2, \dots, r, n+1$.

10.63. Arătăm acum modul în care se reflectă pe matricea A_1 următoarea etapă de transformări ale ecuației (19) §10.4, care are ca scop să anuleze mărimile $l_1, l_2, \dots, l_r$. După transformările

$$\eta_1' = \eta_1 + \frac{l_1}{\lambda_1}\eta_{n+1},\ \eta_k' = \eta_k\ (k = 2, 3, \dots, n+1)$$

matricea $A_{(f)}$ se transformă în matricea

$$A_{(f)}^{(1)} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & 0 & \dots & 0 & l_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & l_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & l_n \\ 0 & l_1 & \dots & l_r & l_{r+1} & \dots & l_n & c - \dfrac{l_n}{\lambda_1} \end{Vmatrix}.$$

Operația produsă asupra matricii $A_{(f)}$ poate fi descrisă de asemenea astfel: din ultima coloană scădem prima coloană înmulțită cu $\frac{l_1}{\lambda_1}$ și apoi din ultima linie scădem prima linie, de asemenea înmulțită cu $\frac{l_1}{\lambda_1}$. În mod analog se pot

descrie transformările ulterioare, care au ca scop anularea mărimilor $l_2, l_3, \ldots, l_n$; ca rezultat al tuturor acestor transformări matricea $A_{(f)}$ devine

$$A_{(f)}^{(r)} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_r & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & l_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & l_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & l_{r+1} & \ldots & l_n & c' \end{Vmatrix}.$$

Prin aceste transformări nu-și modifică mărimea acei minori bordați ai matricii $A_{(f)}$ în care sînt cuprinse primele r linii și r coloane ale acestei matrici. Considerăm polinomul

$$\Delta_1^{(r)}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_r-\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda & \ldots & 0 & l_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & l_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & l_{r+1} & \ldots & l_n & c \end{Vmatrix} =$$

$$= \alpha'_{n+1} - \alpha'_n\lambda + \ldots + \alpha'_1(-\lambda)^n.$$

Coeficienții acestui polinom se calculează prin minorii bordați ai matricii $A_{(f)}^{(r)}$ după aceleași reguli prin care coeficienții polinomului $\Delta_1(\lambda)$ se exprimă prin minorii bordați ai matricii $A_{(f)}$. Conform proprietăților de nemodificare a minorilor de ordin $r+2$ (pentru $r < n$), arătate mai sus, rezultă că $\alpha'_{r+1} = \alpha_{r+2}$; ca și în cele două cazuri separate indicate, vom avea $\alpha'_{r+1} = \alpha_{r+1}$.

10.64. Considerăm mai întîi cazul $r = n$. Atunci coeficientul α'_{n+1} al polinomului $\Delta_1^{(r)}(\lambda)$ este evident egal cu produsul $\lambda_1\lambda_2, \ldots \lambda_n c$; atunci mărimea c din ecuația canonică (22) este egală cu

$$c = \frac{\alpha'_{n+1}}{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n} = \frac{\alpha_{n+1}}{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n}.$$

10.65. Fie acum $r < n$. Definim coeficientul α_{r+1} al polinomului $\Delta_1^{(r)}(\lambda)$ necesar în cele ce urmează. (Se verifică ușor că și pentru polinomul $\Delta_1^{(r)}(\lambda)$, toți coeficienții α_m pentru $m > r+2$ sînt egali cu zero). Minorii bordați ai matricii de ordin $r+2$, cu excepția celor nuli, sînt de forma

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & l_m \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & l_m & c \end{vmatrix} = -\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_r l_m^2$$

($m = k+1, \ldots, n$) și suma lor, egală cu coeficientul $\alpha'_{r+2} = \alpha_{r+2}$, se exprimă sub forma

$$-\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_r(l_{k+1}^2 + \ldots + l_n^2).$$

Reamintim că o condiție de reducere a ecuației (19) la forma canonică (23) este prezența printre coeficienții $l_{k+1}, \ldots, l_n$ a unuia diferit de zero. Acum putem formula o condiție echivalentă, anume $\alpha_{r+2} \neq 0$ și în același timp putem indica formula pentru calculul coeficientului M al formei canonice (23)

$$M^2 = l_{r+1}^2 + \ldots + l_n^2 = -\frac{\alpha_{r+2}}{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_r}.$$

Dacă $\alpha_{r+2} = 0$, atunci $l_{r+1} = l_{r+2} = \ldots = l_n = 0$ și ecuația se reduce la forma canonică (22). Ajungem astfel la al doilea

caz. Coeficientul $\alpha'_{r+1} = \alpha_{r+1}$ este în acest caz evident egal cu produsul

$$\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_r c,$$

de unde coeficientul c al formei canonice (22) este egal cu

$$\frac{\alpha'_{r+1}}{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_r} = \frac{\alpha_{r+1}}{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_r}.$$

10.66. Indicăm o sinteză a rezultatelor obținute. Pentru aceasta, rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ale polinomului caracteristic $\Delta(\lambda)$ se scriu, ca și pînă acum, punînd la început rădăcinile nenule. Produsul $\lambda_1 \dots \lambda_r$ se notează Λ_r.

Date	Ecuația canonică
$\lambda_n \neq 0$	$\lambda_1\eta_1^2 + \lambda^2\eta_2^2 + \dots + \lambda_n\eta_n^2 + \frac{\alpha_{n+1}}{\Lambda} = 0$
$\lambda_n = 0$, $\alpha_{n+1} \neq 0$	$\lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \dots + \lambda_{n-1}\eta_{n-1}^2 + 2\sqrt{-\frac{\alpha_{n+1}}{\Lambda_{n-1}}}\,\eta_n = 0$
$\lambda_{n-1} \neq 0$, $\alpha_{n+1} = 0$	$\lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \dots + \lambda_{n-1}\eta_{n-1}^2 + \frac{\alpha_n}{\Lambda_{n-1}} = 0$
$\lambda_{n-1} = 0$, $\alpha_n \neq 0$	$\lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \dots + \lambda_{n-2}\eta_{n-2}^2 + 2\sqrt{-\frac{\alpha_n}{\Lambda_{n-2}}}\,\eta_{n-1} = 0$
$\lambda_{n-2} \neq 0$, $\alpha_n = 0$	$\lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \dots + \lambda_{n-2}\eta_{n-2}^2 + \frac{\alpha_{n-1}}{\Lambda_{n-2}} = 0$
.....	.....
$\lambda_2 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$	$\lambda_1\eta_1^2 + 2\sqrt{-\frac{\alpha_3}{\lambda_1}}\,\eta_2 = 0$
$\lambda_1 \neq 0$, $\alpha_3 = 0$	$\lambda_1\eta_1^2 + \frac{\alpha_2}{\lambda_1} = 0.$

§ 10.7. Forme pătratice hermitice

10.71. Multe din teoremele din paragrafele precedente se refac pentru forme pătratice în spațiul complex. Începem cu următoarea teoremă fundamentală:

TEOREMĂ. *Într-un spațiu unitar n-dimensional $\mathcal{C}_n$ orice formă biliniară simetrică hermitică admite o bază canonică formată din n vectori doi cîte doi ortogonali.*

Demonstrație. Operatorul liniar $\mathcal{A}$ care corespunde formei biliniare simetrice hermitice date $A(x, y)$ (9.18 **a**) după formula

$$A(x, y) = (\mathcal{A}x, y),$$

admite în orice bază ortonormală a spațiului $\mathcal{C}_n$ aceeași matrice ca și forma $A(x, y)$, deci hermitic-simetrică ($a_j^{(k)} = \overline{a_k^{(j)}}$, $j, k = 1, \dots, n$). Conform teoremei 9.34, în spațiul $\mathcal{C}_n$ există o bază ortonormală $e_1, \dots, e_n$ formată din vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$. În această bază matricea operatorului $\mathcal{A}$ este diagonală; așadar, în această bază este diagonală și matricea formei $A(x, y)$; astfel baza $e_1, \dots, e_n$ este baza canonică a formei $A(x, y)$ și teorema este demonstrată.

10.72. Din teorema 10.71 rezultă că orice formă pătratică hermitic-simetrică $A(x, x)$ poate fi redusă la forma canonică

$$A(x, x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\xi_j|^2$$

printr-o transformare unitară.

Șirul de operații care conduc la determinarea coordonatelor vectorilor bazei canonice căutate ca și la determinarea numerelor λ_j este același ca în cazul real (10.13).

10.73. Căutăm valorile staționare pe sfera unitate $\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 = 1$ ale unei forme pătratice hermitic-simetrice $A(x, x)$. Avînd în vedere 9.15 **b**, forma $A(x, x)$ ia numai

valori reale. Fie $e_1, \ldots, e_n$ baza canonică ortonormală a formei $A(x, x)$. În această bază avem

$$A(x, x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\xi_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\sigma_j^2 + \tau_j^2); \quad \xi_j = \sigma_j + i\tau_j;$$

$$(x, x) = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} (\sigma_j^2 + \tau_j^2).$$

Aplicînd metoda lui Lagrange, egalăm cu zero derivatele parțiale ale funcției $A(x, x) - \lambda(x, x)$ în raport cu cele $2n$ coordonate reale σ_j și τ_j $(j = 1, \ldots, n)$. Se obțin astfel ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda_j\sigma_j - 2\lambda\sigma_j = 0, \\ 2\lambda_j\tau_j - 2\lambda\tau_j = 0, \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Aceste ecuații sînt satisfăcute de un vector x cu $|x| = 1$ numai dacă λ coincide cu una din valorile $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Fie $\lambda = \lambda_k$; atunci o soluție este vectorul x cu coordonatele $\xi_j = \sigma_j + i\tau_j = 0$ pentru $j \neq k$ și $|\xi_k| = 1$. Așadar, ca și în cazul real (10.21) forma pătratică hermitică $A(x, x)$ ia valori staționare pe vectorii bazei ei canonice ortonormale e_j, cu alte cuvinte, pe vectorii proprii ai operatorului hermitic-simetric $\mathcal{A}$ corespunzător. Valorile însele ale formei în aceste puncte coincid cu coeficienții canonici corespunzători; în particular, maximul formei $A(x, x)$ este cel mai mare din coeficienții λ_j, iar minimul este cel mai mic din acești coeficienți.

10.74. Problema reducerii simultane a două forme pătratice hermitice-simetrice $A(x, x)$ și $B(x, x)$ la forma canonică (dintre care una, de exemplu $B(x, x)$ este pozitiv definită), se reduce la teorema 10.72. Anume, putem considera ca produs scalar forma biliniară hermitică $B(x, x)$. Conform teoremei 10.72 există o bază ortonormală (în sensul produsului scalar introdus), canonică pentru forma $A(x, x)$. În această bază avem

$$A(x, x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\xi_j|^2, \quad B(x, x) = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2,$$

ceea ce trebuia dovedit.

Calculul coordonatelor vectorilor bazei căutate (relativ la o bază oarecare de plecare) și calculul coeficienților $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ se efectuează după aceleași reguli ca și în cazul real (10.32). Pentru argumentare, introducînd notațiile $\xi_j = \sigma_j + i\tau_j$, trebuie scrise formele $A(x, x)$ și $B(x, x)$ ca funcții reale de variabilele reale σ_j și τ_j $(j = 1, \ldots, n)$. Lăsăm cititorului detaliile necesare.

PROBLEME

1. Să se aducă la forma canonică, prin transformări ortogonale, următoarele forme pătratice:

a) $2\xi_1^2 + \xi_2^2 - 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_2\xi_3$;

b) $2\xi_1^2 + 5\xi_2^2 + 5\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_1\xi_3 - 8\xi_2\xi_3$;

c) $2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 2\xi_4^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_4 + 2\xi_2\xi_3 - 4\xi_3\xi_4$;

d) $2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_1\xi_4 - 2\xi_2\xi_3 + 2\xi_2\xi_4 + 2\xi_3\xi_4$.

2. Unde sînt atinse pentru $|x| = 1$ valorile staționare ale formei pătratice

$$A(x, x) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{3} \quad (x = (x_1, x_2, x_3))$$

și care din acestea sînt valori maxime sau minime?

3. Să se arate că fiecare din mărimile $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ poate atinge valorile limită indicate în inegalitățile 10.25 (6).

4. Două forme pătratice $A(x, x)$ și $B(x, x)$ se numesc *comparabile* dacă pentru orice $x \in \mathcal{R}$ avem inegalitatea $A(x, x) \leqslant B(x, x)$. Fie $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ coeficienții canonici ai formei $A(x, x)$, $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$ coeficienții canonici ai formei $B(x, x)$. Să se arate că pentru orice k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ are loc inegalitatea $\lambda_k \leqslant \mu_k$ (Evident, în cazul cînd formele $A(x, x)$ și $B(x, x)$ au o bază canonică comună).

5. Să se determine o pereche comună de direcții conjugate pentru curbele

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1; \quad 2xy = 1.$$

6. Să se construiască o transformare liniară care să reducă ambele forme pătratice

$$A(x, x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2 - 2\xi_1\xi_3 + 3\xi_3^2,$$

$$B(x, x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2\xi_3 - 2\xi_1\xi_3 + 6\xi_3^2$$

la forma canonică și să se indice această formă canonică.

7. Să se arate că o bază în care formele $A(x, x)$ și $B(x, x)$ se scriu sub formă canonică cu coeficienții canonici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ și $\nu_1, \ldots, \nu_n$ respectiv,

este bine determinată pînă la coeficienți numerici, dacă toate rapoartele $\frac{\lambda_1}{\nu_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\nu_n}$ sînt distincte două cîte două.

8. Să se arate că mijloacele coardelor suprafețelor de gradul II paralele cu vectorul $y = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ se află pe un hiperplan $(n-1)$-dimensional (numit hiperplan diametral conjugat cu vectorul y).

9. Care suprafețe de gradul II din spațiul tridimensional al punctelor (x, y, z) sînt date prin ecuațiile:

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$; b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = -1$;

c) $x = y^2 + z^2$; d) $y = x^2 + z^2 + 1$; e) $y = xz$?

10. Să se simplifice (reducă) ecuațiile următoare ale unor suprafețe de gradul II din spațiul tridimensional:

a) $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0$;

b) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 12xy - 4xz - 8yz + 14x + 16y - 12z - 3 = 0$;

c) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 12x - 12y + 6z = 0$,

și să se indice formulele corespunzătoare de transformare a coordonatelor.

11. Să se arate că intersecția unui elipsoid cu semiaxele $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ cu un hiperplan k-dimensional care trece prin centrul acestui elipsoid, este un elipsoid cu semiaxele $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_k$, astfel încît

$$a_1 \geqslant b_1 \geqslant a_{n-k+1},$$

$$a_2 \geqslant b_2 \geqslant a_{n-k+2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_k \geqslant b_k \geqslant a_n.$$

CAPITOLUL 11

ALGEBRE FINIT-DIMENSIONALE ȘI ALGEBRE DE MATRICI

§ 11.1. Noțiuni preliminare

11.11. Am introdus în 6.21 noțiunea de algebră; această denumire a fost dată unui spațiu vectorial peste un corp K în care este definită o operație internă de înmulțire a elementelor (supusă la axiomele 6.21 1)—3)), comutativă sau necomutativă.

Algebrele pe care le-am considerat în capitolul 6 au fost de regulă comutative. Un exemplu important de algebră necomutativă finit-dimensională este algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ a tuturor operatorilor liniari în spațiul $\mathfrak{X}_n$ și a fost amintit doar în treacăt pînă acum. În acest capitol scopul principal este tocmai studiul algebrei $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ și al subalgebrelor sale. Va fi mai comod să considerăm la început algebrele finit-dimensionale abstracte.

11.12. Nu orice algebră admite element unitate (de exemplu orice algebră trivială, cu înmulțirea nulă, 6.22 a). Totuși fiecare algebră poate fi completată la o algebră avînd element unitate în modul următor.

Fie $\mathfrak{A}$ o algebră oarecare. Considerăm mulțimea $\mathfrak{A}^+$ formată din toate sumele formale $a + \lambda$, unde a aparține lui $\mathfrak{A}$ și λ este un număr din corpul K. Evident $\mathfrak{A}^+$ este spațiu vectorial relativ la operațiile

$$(a + \lambda) + (b + \mu) = (a + b) + (\lambda + \mu)$$

și

$$\mu(a + \lambda) = \mu a + \lambda\mu,$$

și, mai mult, chiar o algebră relativ la înmulțirea

$$(a + \lambda)(b + \mu) = (ab + \lambda b + \mu a) + \lambda\mu$$

$(a, b \in \mathcal{A};\ \lambda, \mu \in K)$. Algebra $\mathcal{A}^+$ admite element unitate, anume suma formală dintre elementul nul din $\mathcal{A}$ și numărul 1. În plus, algebra de plecare $\mathcal{A}$ poate fi privită ca inclusă în $\mathcal{A}^+$, identificînd fiecare element $a \in \mathcal{A}$ cu suma formală $a + 0 \in \mathcal{A}^+$.

§ 11.2. Reprezentări ale algebrelor abstracte

11.21. Fie $\mathcal{A}$ o algebră abstractă peste corpul K și $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ algebra tuturor operatorilor liniari acționînd într-un spațiu vectorial $\mathcal{H}$ peste K. Vom considera morfisme ale algebrei $\mathcal{A}$ în algebra $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, notate $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

a. *Definiție.* Orice morfism $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $a \to T_a$ se numește *reprezentare a algebrei $\mathcal{A}$ în spațiul $\mathcal{H}$*. Reprezentarea se numește *trivială* dacă $T_a = 0$ pentru orice $a \in \mathcal{A}$ și *exactă* dacă T este monomorfism (adică dacă $a \neq b$ în algebra $\mathcal{A}$, atunci operatorii T_a și T_b sînt distincți în algebra $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$).

Mulțimea tuturor elementelor $a \in \mathcal{A}$ care sînt transformate prin T în operatorul nul se numește *nucleul* reprezentării T. Nucleul reprezentării triviale coincide cu întreaga algebră $\mathcal{A}$, iar nucleul unei reprezentări exacte constă din elementul nul al algebrei. În cazul general al unei reprezentări oarecare nucleul este un ideal bilateral al algebrei $\mathcal{A}$ (6.25 **d**).

b. *Definiție* Două reprezentări $T' : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}')$ și $T'' : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}'')$ ale algebrei $\mathcal{A}$ se numesc *echivalente* dacă între spațiile vectoriale $\mathcal{H}'$ și $\mathcal{H}''$ poate fi stabilit un izomorfism $U : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}''$ astfel încît pentru orice $a \in \mathcal{A}$, $UT'_a = T''_a U$.

În mod evident, în cazul cînd $\mathcal{H}'$ și $\mathcal{H}''$ sînt finit-dimensionale, echivalența reprezentărilor T' și T'' înseamnă că în anumite baze ale spațiilor $\mathcal{H}'$ și $\mathcal{H}''$ operatorii T'_a și T''_a $(a \in \mathcal{A})$ au aceleași matrici.

c. Fie $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ o reprezentare a algebrei $\mathcal{A}$. Un subspațiu $\mathcal{H}'$ al lui $\mathcal{H}$ se numește *subspațiu invariant al reprezentării* T dacă el este invariant relativ la toți operatorii T_a, $a \in \mathcal{A}$. Considerînd operatorii T_a restrînși numai la $\mathcal{H}'$, obținem o nouă reprezentare $T^{\mathcal{H}'} : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}')$ care va fi numită restricția reprezentării T la $\mathcal{H}'$.

d. Fie $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ o reprezentare a algebrei $\mathcal{A}$ astfel încît $\mathcal{H}$ să se descompună în sumă directă de subspații $\mathcal{H}_r$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$, invariante relativ la reprezentarea T. Notăm cu T^r restricția reprezentării T la $\mathcal{H}_r$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$. În această

situație, se spune că reprezentarea T se descompune în suma directă a reprezentărilor T^r, $1 \leqslant r \leqslant n$.

11.22. Pentru fiecare algebră $\mathcal{A}$ se definește în mod natural o reprezentare $\widetilde{T} : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ în spațiul vectorial $\mathcal{A}$ însuși, care asociază oricărui element $a \in \mathcal{A}$ operatorul $\widetilde{T}_a$ de înmulțire la stînga cu a, definit prin $\widetilde{T}_a(b) = ab$, pentru orice $b \in \mathcal{A}$. O astfel de reprezentare se numește *reprezentarea regulată la stînga a algebrei* $\mathcal{A}$. Evident, subspațiile invariante ale reprezentării regulate la stînga sînt tocmai idealele stîngi din $\mathcal{A}$ (6.23 **a**). Cu ajutorul acestei noțiuni, stabilim următorul rezultat important:

TEOREMĂ. *Orice algebră este izomorfă cu o subalgebră a algebrei* $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *(pentru* $\mathcal{H}$ *convenabil ales).*

Demonstrație. Afirmația din teoremă este evident echivalentă cu următoarea: orice algebră admite o reprezentare exactă.

Fie $\mathcal{A}$ o algebră dată. Așa cum s-a arătat la punctul 11.12, se poate construi algebra $\mathcal{A}^+$ care admite element unitate e și conține $\mathcal{A}$ ca subalgebră. Considerăm reprezentarea ei regulată la stînga $\widetilde{T} : \mathcal{A}^+ \to \mathfrak{B}(\mathcal{A}^+)$. Deoarece pentru orice $a \in \mathcal{A}^+$, $a \neq 0$, $\widetilde{T}_a e = ae = a \neq 0$, această reprezentare este exactă. Așadar, restricția morfismului $\widetilde{T}$ la subalgebra $\mathcal{A}$ a lui $\mathcal{A}^+$ este o reprezentare exactă a algebrei $\mathcal{A}$ în spațiul $\mathcal{H} = \mathcal{A}^+$. Cu aceasta, teorema este demonstrată.

§ 11.3. Reprezentări ireductibile și lema lui Schur

11.31. Dintre reprezentările unei algebre fixate se pot separa unele construite într-un anumit sens, mai simplu.

Orice reprezentare $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ a unei algebre $\mathcal{A}$ admite cel puțin două subspații invariante: $\mathcal{H}$ însuși și subspațiul său nul. Celelalte subspații invariante vor fi numite *proprii*. Cele care nu conțin nici un alt subspațiu de aceeași formă vor fi numite *subspații invariante minimale ale reprezentării* T.

Definiție. O reprezentare netrivială $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ se numește *ireductibilă* dacă ea nu admite subspații invariante proprii.

i **11.32.** Fie $z \in \mathcal{H}$ un vector oarecare; așa cum se vede imediat, mulțimea $\mathcal{H}_z = \{T_a z \in \mathcal{H}: a \in \mathcal{A}\}$ este un subspațiu invariant al reprezentării T. Un vector $z \in \mathcal{H}$ se numește *ciclic* (relativ la reprezentarea T) dacă $\mathcal{H}_z = \mathcal{H}$. Din această definiție și din definiția ireductibilității, rezultă direct teorema următoare:

TEOREMĂ. *O reprezentare care acționează în spațiul $\mathcal{H}$ este ireductibilă dacă și numai dacă orice vector nenul din spațiul $\mathcal{H}$ este ciclic.*

Cu toate simplitatea sa, acest rezultat este foarte util în cele ce urmează.

11.33. Reprezentările ireductibile ale algebrelor peste corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe au următoarea proprietate importantă:

TEOREMĂ (*lema lui Schur*). *Fie $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathbb{C})$ o reprezentare ireductibilă a unei algebre peste corpul $\mathbb{C}$. Atunci orice operator în spațiul $\mathbb{C}$ care comută cu toți operatorii T_a, $a \in \mathcal{A}$, este un multiplu al operatorului identic $\mathcal{E}$.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{S}$ un operator care comută cu toți operatorii T_a, $a \in \mathcal{A}$ și fie x un vector propriu al său (4.95 **b**). Atunci există λ complex astfel încît $\mathcal{S}x = \lambda x$, deci $\mathcal{S}T_a x = T_a \mathcal{S}x = \lambda T_a x$ pentru orice $a \in \mathcal{A}$. Deoarece reprezentarea T este ireductibilă, atunci conform teoremei 11.32 orice vector se scrie sub forma $y = T_a x$, $a \in \mathcal{A}$. De aici rezultă $\mathcal{S}y = \lambda y$ pentru orice $y \in \mathbb{C}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Trebuie notat că în demonstrație am folosit esențial faptul că orice operator liniar al unui spațiu complex admite un vector propriu. Avînd în vedere rolul important al lemei lui Schur, în continuare ne restrîngem la considerarea spațiilor vectoriale complexe și algebrelor peste corpul numerelor complexe.

§ 11.4. Tipuri de bază de algebre finit-dimensionale

Începînd cu acest paragraf, dacă nu se specifică contrariul, vom considera exclusiv algebre finit-dimensionale (adică algebre avînd dimensiune finită ca spațiu vectorial) peste corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe.

Care este structura algebrelor finit-dimensionale și a reprezentărilor lor? Partea principală a acestui capitol va fi consacrată unor rezultate în această direcție. În particular, vor fi definite anumite clase de algebre, a căror structură va fi studiată complet, adică vom descrie toate aceste algebre pînă la izomorfism și toate reprezentările lor pînă la echivalențe; anume, va fi vorba despre clasele algebrelor simple și algebrelor semisimple.

Diversele clase de algebre apar mai ales în considerarea proprietăților specifice ale idealelor și reprezentărilor lor.

11.41. *Definiție.* O algebră netrivială (6.22 **a**) se numește *simplă* dacă ea nu admite ideale bilaterale proprii. Un exemplu simplu de algebră simplă îl constituie algebra $\mathcal{B}(\mathcal{C}_n)$ a tuturor operatorilor liniari într-un spațiu finit-dimensional. Într-adevăr, fie $\mathcal{J}$ un ideal bilateral în algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ și fie $A = \|a_{jk}\| \in \mathcal{J}$ o matrice nenulă astfel încît de exemplu $a_{sq} \neq 0$. Așa cum s-a arătat în 4.44 **c**, prin operații de înmulțire a lui A la dreapta și la stînga cu orice matrici, se obțin matrici din $\mathcal{J}$ și în particular matricea E_{rt} (avînd un singur element nenul, egal cu 1, plasat pe linia r și coloana t) aparține lui $\mathcal{J}$, pentru orice $1 \leqslant r, t \leqslant n$. Prin combinații liniare ale matricilor E_{rt} se obține orice matrice, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ și rezultă deci că $\mathcal{J} = \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$. Așa cum vom vedea mai departe în 11.64, acest exemplu este unic în clasa tuturor algebrelor finit-dimensionale peste corpul numerelor complexe.

TEOREMĂ. *Orice algebră simplă admite o reprezentare ireductibilă exactă.*

Demonstrație (datorată lui Nemirovski). Fie $\mathcal{A}$ o algebră simplă. Considerăm reprezentarea sa regulată la stînga $\widetilde{T}$: $:\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{A})$. Cum $\mathcal{A}$ este finit-dimensională, rezultă că printre subspațiile invariante ale reprezentării $\widetilde{T}$ există un subspațiu minimal $\mathcal{A}'$. Restricția T a reprezentării $\widetilde{T}$ la $\mathcal{A}'$ nu este o reprezentare trivială. Pentru a demonstra acest fapt, este suficient de arătat că pentru orice $b \in \mathcal{A}'$, avem $\mathcal{A}b = \{ab \mid a \in \mathcal{A}\} \neq \{0\}$. Presupunem prin absurd că $\mathcal{A}b = \{0\}$. Atunci se vede ușor că mulțimea $b\mathcal{A} = \{ba \mid a \in \mathcal{A}\}$ este un ideal bilateral în $\mathcal{A}$ și în virtutea ipotezei că $\mathcal{A}$ este simplă, rezultă sau $b\mathcal{A} = \mathcal{A}$, sau $b\mathcal{A} = \{0\}$. Dacă $b\mathcal{A} = \mathcal{A}$, atunci din ipoteza că $\mathcal{A}b = \{0\}$ rezultă că orice produs în $\mathcal{A}$ este nul. În cazul cînd $b\mathcal{A} = \{0\}$ mulțimea $\{\lambda b : \lambda \in \mathbb{C}\}$ este un ideal bilateral

în $\mathcal{A}$ (deoarece $\mathcal{A}b = \{0\}$); cum $\mathcal{A}$ este simplă, acesta va coincide cu $\mathcal{A}$. Aşadar, în ambele cazuri algebra $\mathcal{A}$ este trivială şi deci nu poate fi simplă.

Deci reprezentarea $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{A}')$ nu este trivială. Dar atunci ea va fi ireductibilă (în virtutea minimalităţii) şi pe de altă parte, nucleul ei ca ideal bilateral distinct de întreaga algebră (presupusă simplă) este egal cu idealul nul. De aceea orice reprezentare ireductibilă este exactă, ceea ce demonstrează teorema.

Remarcăm că are loc şi teorema inversă, adică faptul că o algebră finit-dimensională, avînd o reprezentare ireductibilă exactă, este simplă; acest fapt va fi demonstrat la sfîrşitul punctului 11.64.

11.42. O algebră oarecare poate să nu admită reprezentări ireductibile exacte. Este totuşi natural să caracterizăm algebrele ale căror proprietăţi pot fi descrise în termeni de reprezentările lor ireductibile. Ajungem astfel la următoarea clasă de algebre, mai largă decît clasa algebrelor simple:

Definiţie. O algebră se numeşte *semisimplă* dacă pentru orice element al ei diferit de zero există o reprezentare ireductibilă care transformă acest element într-un operator nenul.

Cu alte cuvinte, într-o algebră semisimplă intersecţia tuturor nucleelor reprezentărilor ei ireductibile constă numai din zero.

Conform teoremei 11.41 orice algebră simplă este semisimplă. Pe de altă parte, considerăm algebra n-dimensională ($n > 1$) $\mathcal{C}_n$ a elementelor $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, unde $\alpha_j \in \mathbb{C}$, cu înmulţirea pe coordonate. Această algebră este comutativă; mulţimea acelor $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pentru care de exemplu $\alpha_1 = 0$ este un ideal (bilateral) al ei, deci algebra $\mathcal{C}_n$ nu este simplă. Asociind elementului $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^n$, numărul complex α_k ($1 \leqslant k \leqslant n$) adică echivalent, operatorul de înmulţire cu numărul α_k în spaţiul unidimensional $\mathcal{C}_1$, se obţine o reprezentare ireductibilă a algebrei $\mathcal{C}_n$, care nu transformă în zero orice element al algebrei $\mathcal{C}_n$ cu $\alpha_k \neq 0$. Deoarece pentru orice element nenul al algebrei $\mathcal{C}_n$ există o coordonată nenulă, există o reprezentare ireductibilă care transformă acest element într-un operator nenul. Aşadar, algebra $\mathcal{C}_n$ este semisimplă.

În acest exemplu, algebra $\mathcal{C}_n$ este sumă directă de algebre comutative unidimensionale simple. Este uşor de extins acest exemplu, considerînd suma unor algebre simple necomutative; atunci, aşa cum vom vedea mai jos (11.77), obţinem forma generală a algebrelor finit-dimensionale semisimple peste corpul numerelor complexe.

11.43. Algebrele, avînd proprietăţi oarecum opuse celor ale algebrelor semisimple, sînt definite astfel.

Definiţie. O algebră se numeşte *radicală* dacă orice reprezentare netrivială a ei admite un subspaţiu invariant propriu.

Cu alte cuvinte, algebrele radicale nu admit în general reprezentări ireductibile.

Ca exemplu, considerăm algebra $\mathcal{A}$ a polinoamelor $p(z) = d_1 z + \ldots + d_n z^n$ cu operaţiile uzuale, cu condiţia $z^{n+1} = 0$. Atunci orice element al algebrei $\mathcal{A}$ ridicat la puterea $n+1$ este nul, deci toate elementele lui $\mathcal{A}$ sînt neinversabile. Algebra $\mathcal{A}$ nu admite nici o reprezentare unidimensională netrivială, deoarece orice operator liniar nenul într-un spaţiu unidimensional este inversabil. Fie T o reprezentare netrivială a algebrei $\mathcal{A}$ (care în mod necesar nu este unidimensională) şi fie Z operatorul care corespunde elementului z. Deoarece Z (ca şi z) este neinversabil, există un vector e astfel încît $Ze = 0$. Dar atunci rezultă $p(Z)e = 0$ pentru orice $p(z) \in \mathcal{A}$. Aşadar, pentru reprezentarea T am găsit un subspaţiu invariant netrivial — dreapta definită de vectorul e. Vedem astfel că algebra $\mathcal{A}$ este radicală.

11.44. *Definiţie.* Fie $\mathcal{A}$ o algebră oarecare. *Radicalul* algebrei $\mathcal{A}$ este intersecţia tuturor nucleelor reprezentărilor ireductibile ale algebrei $\mathcal{A}$, dacă acestea există, sau întreaga algebră $\mathcal{A}$ în caz contrar.

Deoarece nucleul oricărei reprezentări este un ideal bilateral al algebrei $\mathcal{A}$ (11.21 a), radicalul este de asemenea un ideal bilateral al algebrei $\mathcal{A}$.

Studiul algebrelor cu radical netrivial (în particular, al celor radicale) este dificil; dăm cîteva rezultate la sfîrşitul capitolului. În schimb algebrele semisimple şi reprezentările lor pot fi studiate complet şi studiul lor poate fi redus la cel al algebrelor simple.

Trecem la considerarea algebrelor simple şi reprezentările lor.

§ 11.5. Structura reprezentării regulate la stînga a unei algebre simple

11.51. Fie deci $\mathcal{A}$ o algebră simplă. Fixăm o reprezentare exactă a sa $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$, care există conform teoremei 11.41. În cele ce urmează, aceasta va fi numită *reprezentare standard.*

TEOREMĂ. *Fie $\widetilde{T} : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ o reprezentare regulată la stînga a unei algebre simple $\mathcal{A}$ și $\mathcal{J}$ un subspațiu invariant minimal al reprezentării $\widetilde{T}$.*
Atunci

a) *restricția $\widetilde{T}^{\mathcal{J}}$ a reprezentării $\widetilde{T}$ la $\mathcal{J}$ este echivalentă cu T;*

b) *subspațiul $\mathcal{J}$ considerat ca subalgebră a lui $\mathcal{J}$ admite element unitate la dreapta.*

Fixăm un anumit element $a \in \mathcal{J}$, $a \neq 0$. Deoarece reprezentarea T este exactă, $T_a x \neq 0$ pentru un anumit $x \in \mathfrak{X}$. Considerăm operatorul liniar $U : \mathcal{J} \to \mathfrak{X}$ definit prin egalitatea $Ub = T_b x$ pentru orice $b \in \mathcal{J}$.

Nucleul operatorului U este, așa cum se vede ușor, un ideal stîng în $\mathcal{A}$ sau, ceea ce este echivalent, un subspațiu invariant al reprezentării $\widetilde{T}$ care este conținut în $\mathcal{J}$ și nu coincide cu acesta. Așadar, nucleul lui U constă numai din elementul nul. Pe de altă parte, imaginea lui U este evident un subspațiu invariant diferit de zero al reprezentării ireductibile T și de aceea coincide cu întreg $\mathfrak{X}$.

Prin urmare, U este un izomorfism al lui $\mathcal{J}$ pe $\mathfrak{X}$. În plus, pentru orice $b \in \mathcal{J}$ și $c \in \mathcal{A}$, avem

$$U\widetilde{T}_c^{\mathcal{J}} b = U(cb) = T_{cb}x = T_c(T_b x) = T_c U_b;$$

așadar, $U\widetilde{T}_c^{\mathcal{J}} = T_c U$. Astfel, am demonstrat că reprezentările $\widetilde{T}^{\mathcal{J}}$ și T sînt echivalente.

Apoi, deoarece U aplică $\mathcal{J}$ pe întreg $\mathfrak{X}$, există $e \in \mathcal{J}$ astfel încît $Ue = T_e x = x$. De aici avem pentru orice $b \in \mathcal{J}$,

$$U(be) = T_{be}x = T_b(T_e x)T_b x = Ub.$$

Dar U este o reprezentare bijectivă, deci $be = b$. Așadar, e este element unitate la dreapta în algebra $\mathcal{J}$, ceea ce completează demonstrația teoremei.

Trebuie observat că drept reprezentare standard am fi putut lua orice reprezentare ireductibilă a unei algebre

simple. De aceea un corolar direct al teoremei demonstrate este faptul că toate reprezentările ireductibile ale unei algebre simple sînt echivalente.

11.52. LEMĂ. *Fie $\mathcal{A}$ o algebră oarecare, $\mathcal{J}_1$ și $\mathcal{J}_2$ ideale stîngi ale ei, care admit respectiv elemente unitate la dreapta e_1 și e_2', astfel încît $ae_1 = 0$ pentru orice $a \in \mathcal{J}_2$. Atunci în $\mathcal{J}_2$ există un element unitate la dreapta e_2, astfel încît $be_2 = 0$ pentru orice $b \in \mathcal{J}_1$.*

Fie $e_2 = e_2' - e_1 e_2'$. Atunci pentru orice $a \in \mathcal{J}_2$ avem $ae_2 = ae_2' - ae_1 e_2' = a$, deoarece $ae_2' = a$ și $ae_1 = 0$. Mai departe, pentru orice $b \in \mathcal{J}_1$ are loc egalitatea $be_2 = be_2' - be_1 e_2' = be_2' - be_2' = 0$, ceea ce demonstrează lema.

11.53. TEOREMĂ. *Orice reprezentare regulată la stînga a unei algebre simple se descompune în sumă directă de reprezentări ireductibile ale acesteia.*

Colecția căutată a subspațiilor invariante minimale ale reprezentării $\widetilde{T} : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ va fi construită inductiv, arătînd la fiecare pas că suma directă a subspațiilor obținute admite, ca algebră, element unitate la dreapta.

Ca un prim subspațiu fixăm orice subspațiu invariant minimal $\mathcal{J}_1$ al reprezentării $\widetilde{T}$. Conform teoremei 11.52, $\mathcal{J}_1$ admite element unitate la dreapta e_1.

Presupunem acum găsite subspațiile invariante minimale $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_k$, astfel încît idealul stîng $\mathcal{J}_k' = \mathcal{J}_1 + \ldots + \mathcal{J}_k$ admite element unitate la dreapta e_k. În cazul cînd $\mathcal{J}_k' = \mathcal{A}$ subspațiile invariante căutate sînt deja construite. În caz contrar, punem $\mathcal{J}_k'' = \{a \in \mathcal{A} \mid ae_k = 0\}$. Așa cum se vede ușor, $\mathcal{J}_k''$ este un subspațiu invariant al reprezentării $\widetilde{T}$, care admite intersecție nenulă cu $\mathcal{J}_k'$. Mai mult, deoarece orice element $a \in A$ se scrie sub forma $a = ae_k + (a - ae_k)$, unde $ae_k \in \mathcal{J}_k'$ și $(a - ae_k) \in \mathcal{J}_k''$, algebra $\mathcal{A}$ se descompune ca sumă directă a lui $\mathcal{J}_k'$ și $\mathcal{J}_k''$.

Subspațiul invariant finit-dimensional $\mathcal{J}_k''$ conține un anumit subspațiu invariant minimal, pe care îl notăm cu $\mathcal{J}_{k+1}$. Idealul $\mathcal{J}_{k+1}$ are conform teoremei 11.52 un element unitate la dreapta e_{k+1}'; deoarece $\mathcal{J}_{k+1} \subseteq \mathcal{J}_k''$, $ae_k = 0$ pentru orice $a \in \mathcal{J}_{k+1}$. Așadar, conform lemei 11.52, în $\mathcal{J}_{k+1}$ există un element unitate la dreapta e_k'' astfel încît $be_k'' = 0$ pentru orice $a \in \mathcal{J}_k'$.

Fie $e_{k+1} = e_k + e_k''$; atunci după cum se observă imediat, e_{k+1} este un element unitate la dreapta în idealul $\mathcal{J}'_{k+1} = \mathcal{J}_1 + \ldots + \mathcal{J}_k + \mathcal{J}_{k+1}$. Cu aceasta este demonstrat pasul inductiv de la k la $k+1$.

Algebra $\mathcal{A}$ este finit-dimensională și de aceea după un număr finit de pași se obține o colecție de subspații invariante minimale $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_m$ ale reprezentării $\widetilde{T}$ care au ca sumă directă întreaga algebră $\mathcal{A}$. Așadar, reprezentarea regulată la stînga a algebrei $\mathcal{A}$ se descompune în sumă directă de reprezentări ireductibile, ceea ce trebuia demonstrat.

11.54. Trebuie notat că în treacăt am stabilit existența în orice algebră simplă a unui element unitate la dreapta. În realitate are loc un rezultat mai tare, anume

TEOREMĂ. *Orice algebră simplă admite element unitate.* Fie $\mathcal{A}$ o algebră simplă și e — elementul unitate la dreapta al ei găsit anterior. Considerăm operatorul T_e în reprezentarea standard $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{X})$. Pentru orice $x \in \mathcal{X}$ și $a \in \mathcal{A}$, avem

$$T_a(T_e x - x) = T_{ae} x - T_a x = 0.$$

Așadar, deoarece T este ireductibilă și fiecare vector nenul este în mod necesar ciclic, rezultă ca $T_e x - x = 0$ pentru orice $x \in \mathcal{X}$; altfel spus, T_e este operatorul identic al spațiului $\mathcal{X}$. Dar atunci $T_a T_e = T_e T_a = T_a$ pentru orice $a \in \mathcal{A}$, ceea ce înseamnă, în virtutea exactității reprezentării T, că $ae = ea = a$. De aici rezultă că e este elementul unitate al lui $\mathcal{A}$ și teorema este demonstrată.

§ 11.6. Structura algebrelor simple

În acest paragraf vom rezolva problema structurii algebrelor simple. Pentru aceasta este foarte utilă noțiunea următoare.

11.61. Fie $\mathcal{X}$ un spațiu vectorial, $\mathcal{A}_0$ o anumită subalgebră a lui $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$. Submulțimea lui $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$ care constă din toți operatorii ce comută cu toți operatorii din $\mathcal{A}_0$ va fi numită *comutatorul* algebrei $\mathcal{A}_0$ și se va nota cu $\overline{\mathcal{A}}_0$.

Așa cum se vede imediat, mulțimea $\overline{\mathcal{A}}_0$ însăși este o subalgebră a lui $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$. Comutatorul acestei noi algebre va fi notat

cu $\overline{\overline{\mathcal{A}}}_0$ și se va numi comutatorul secund al algebrei $\mathcal{A}_0$. Evident, $\mathcal{A}_0 \subseteq \overline{\overline{\mathcal{A}}}_0$.

11.62. Într-o algebră oarecare $\mathcal{A}$, fiecare element $a \in \mathcal{A}$ definește doi operatori din $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$: operatorul de înmulțire la stînga T_a, acționînd după formula $T_a b = ab$ și operatorul de înmulțire la dreapta $\mathfrak{R}_a$, dat prin egalitatea $\mathfrak{R}_a b = ba$. Operatorii de înmulțire la stînga, ca și cei de înmulțire la dreapta formează două subalgebre ale lui $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$, pe care le notăm respectiv $\mathcal{A}_0^l$ și $\mathcal{A}_0^r$.

LEMĂ. *Presupunem că algebra $\mathcal{A}$ admite element unitate. Atunci*

$$\overline{\mathcal{A}}_0^l = \mathcal{A}_0^r \text{ și } \overline{\mathcal{A}}_0^r = \mathcal{A}_0^l.$$

Alegem $\mathbb{S} \in \overline{\mathcal{A}}_0^l$; atunci pentru orice $a, b \in \mathcal{A}$ are loc egalitatea

$$\mathbb{S}(ab) = \mathbb{S} T_a b = T_a \mathbb{S} b = a(\mathbb{S} b).$$

Punînd $b = e$, unde e este elementul unitate din $\mathcal{A}$, se obține $\mathbb{S} a = a \mathbb{S}(e)$. Așadar, operatorul $\mathbb{S}$ este operatorul de înmulțire la dreapta cu elementul $\mathbb{S} e \in \mathcal{A}$, adică $\mathbb{S} \in \mathcal{A}_0^r$.

Așadar, $\overline{\mathcal{A}}_0^l \subseteq \mathcal{A}_0^r$ și cum incluziunea inversă este evidentă, rezultă $\overline{\mathcal{A}}_0^l = \mathcal{A}_0^r$. Egalitatea $\overline{\mathcal{A}}_0^r = \mathcal{A}_0^l$ se demonstrează absolut similar.

11.63. TEOREMĂ. *Fie $\mathcal{A}$ o algebră simplă și $\mathcal{A}_0$ algebra operatorilor reprezentării ei standard $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{X})$. Atunci* $\overline{\overline{\mathcal{A}}}_0 = \mathcal{A}_0$.

Algebra definită mai sus $\mathcal{A}_0^l$ poate fi evident considerată ca algebra operatorilor reprezentării regulate la stînga $\widetilde{T} : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ a algebrei $\mathcal{A}$. Conform teoremei 11.53 această reprezentare se descompune în sumă directă a anumitor reprezentări ireductibile $\widetilde{T}^{\mathcal{J}_j} : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{J}_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, fiecare din aceste reprezentări fiind, conform teoremei 11.51, echivalentă cu cea standard.

Cele spuse anterior se pot rezuma astfel: se poate găsi o bază $x_1, \ldots, x_m$ în spațiul $\mathcal{X}$ și o bază $f_1^{(j)}, \ldots, f_n^{(j)}$ în fiecare din spațiile $\mathcal{J}^j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, astfel încît pentru orice $a \in \mathcal{A}$, ma-

tricea operatorului $\widetilde{T}_a$ în baza $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_n^{(m)}$ a întregului spațiu $\mathcal{A}$ are forma

$$\widetilde{T}_a = \begin{Vmatrix} T_a & & & \\ & T_a & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_a \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

unde în blocurile diagonale se află matricea operatorului T_a în baza $x_1, \ldots, x_n$ și în rest zerouri.

Din regulile de înmulțire a matricilor, rezultă că matricile care comută cu toate matricile de forma (1) sînt matricile de forma

$$\widetilde{S} = \begin{Vmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m1} & \ldots & S_{mm} \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

unde în blocurile (de dimensiune $n \times n$) sînt dispuse matrici care comută cu toate matricile T_a, $a \in \mathcal{A}$.

Considerăm acum un operator $\mathfrak{Q} \in \overline{\overline{\mathcal{A}}}_0$ și matricea lui, P, în baza $x_1, \ldots, x_n$. Atunci este evident că matricea

$$\widetilde{P} = \begin{Vmatrix} P & & & \\ & P & & \\ & & \ddots & \\ & & & P \end{Vmatrix}$$

comută cu toate matricile de forma (2) și, prin urmare, definește în baza $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_n^{(m)}$ a spațiului $\mathcal{A}$ un operator care aparține comutatorului secund al algebrei $\mathcal{A}_0^l$.

O algebră simplă are element unitate conform teoremei 11.54. Așadar, conform lemei 11.62 avem $\overline{\overline{\mathcal{A}}}_0^l = \overline{\mathcal{A}}_0^r = \mathcal{A}_0^l$ și, prin urmare, matricea $\widetilde{P}$ definește în baza $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_n^{(m)}$ un operator $\widetilde{\mathfrak{Q}}$ egal cu $\widetilde{T}_b$ pentru un anumit $b \in \mathcal{A}$. Dar atunci pentru orice b, $\mathfrak{Q} = T_b$ și, prin urmare, $\mathfrak{Q}$ aparține algebrei $\mathcal{A}_0$. Deoarece $\mathfrak{Q}$ este un element arbitrar din $\overline{\overline{\mathcal{A}}}_0$, teorema este demonstrată.

11.64. Sîntem acum în măsură de a demonstra teorema fundamentală a algebrelor simple.

TEOREMĂ (*Prima teoremă de structură*). *Orice algebră simplă este izomorfă cu algebra tuturor operatorilor liniari acționînd într-un anumit spațiu finit-dimensional.*

Fie $\mathcal{A}$ o algebră simplă și $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ reprezentarea ei standard. Este suficient de arătat că algebra $\mathcal{A}_0$ a operatorilor reprezentării T coincide cu $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$.

Deoarece reprezentarea T este ireductibilă, din lema lui Schur rezultă că $\overline{\mathcal{A}}_0$, comutatorul algebrei $\mathcal{A}_0$, constă din operatorii multipli ai operatorului identic. Dar atunci comutatorul secund $\overline{\overline{\mathcal{A}}}_0$ coincide cu întreaga algebră $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$. În același timp, conform teoremei 11.63, avem $\overline{\overline{\mathcal{A}}}_0 = \mathcal{A}_0$. Așadar, $\mathcal{A}_0 = \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$, ceea ce trebuia demonstrat.

Trebuie atrasă atenția asupra următoarei situații: la baza tuturor raționamentelor care au condus la prima teoremă de structură stă faptul că orice algebră simplă admite o reprezentare ireductibilă exactă. Așadar, am demonstrat totodată și faptul că orice algebră care admite o reprezentare ireductibilă exactă este izomorfă cu algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$. De aici rezultă difect că are loc teorema inversă teoremei 11.41: *orice algebră care admite o reprezentare exactă este o algebră simplă.*

§ 11.7. Structura algebrelor semisimple

11.71. În acest paragraf se va arăta că problema structurii algebrelor semisimple se reduce la problema deja studiată a structurii algebrelor simple. Pentru aceasta sînt utile în prealabil cîteva noțiuni noi.

Definiție. Se numește *lanț normal* într-o algebră $\mathcal{A}$ un șir de algebre

$$\mathcal{A} = \mathcal{J}_0 \supseteq \mathcal{J}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{J}_n \supseteq \mathcal{J}_{n+1} = (0),$$

în care fiecare algebră este ideal bilateral în precedenta. *Șir de compoziție* al algebrei $\mathcal{A}$ este un lanț normal în care fiecare din aceste ideale este maximal (adică nu este conținut în nici un ideal bilateral mai mare), iar algebra $\mathcal{J}_n$ nu conține ideale bilaterale proprii.

Se arată ușor că orice algebră finit-dimensională are un șir de compoziție. Într-adevăr, printre idealele bilaterale ale algebrei finit-dimensionale $\mathcal{A}$ există unul maximal $\mathcal{J}_1$. Din aceleași motive algebra $\mathcal{J}_1$ conține un ideal bilateral maximal $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_2$ conține $\mathcal{J}_3$ etc.

Deoarece algebra considerată $\mathcal{A}$ este finit-dimensională, după un număr finit de pași ajungem la o algebră $\mathcal{J}_n$ care nu mai admite ideale proprii. Așadar, lanțul obținut

$$\mathcal{A} = \mathcal{J}_0 \supset \mathcal{J}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{J}_n \supset \mathcal{J}_{n+1} = (0)$$

este evident un șir de compoziție al algebrei $\mathcal{A}$.

11.72. Înainte de a trece la proprietățile speciale ale lanțurilor normale și ale șirurilor de compoziție în algebre semisimple, demonstrăm o afirmație ajutătoare.

LEMĂ. *Pentru orice element a al unei algebre semisimple $\mathcal{A}$ există un element $b \in \mathcal{A}$ astfel încît orice putere a elementului ba este diferită de zero.*

Demonstrație. Conform definiției unei algebre semisimple există o reprezentare ireductibilă $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ astfel încît $T_a \neq 0$. Atunci există $x \in \mathfrak{X}$, $x \neq 0$ astfel încît vectorul $y = T_a x$ să fie diferit de zero. Prin urmare el este un vector ciclic al reprezentării ireductibile T (11.32). De aceea există un element $b \in \mathcal{A}$ astfel încît $T_b y = x$, deci $T_{ba} x = T_b(T_a x) = T_b y = x$. Aceasta înseamnă că nici o putere a operatorului T_{ba} deci nici a elementului $ba \in \mathcal{A}$ nu poate fi egală cu zero, ceea ce demonstrează lema.

11.73. TEOREMĂ. *Orice lanț normal dintr-o algebră semisimplă nu conține algebre triviale diferite de zero.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{A}$ o algebră semisimplă și $\mathcal{A} = \mathcal{J}_0 \supseteq \mathcal{J}_1 \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{J}_n \supseteq \mathcal{J}_{n+1} = (0)$ un lanț normal al ei. Fără a pierde din generalitate, se poate presupune că algebra $\mathcal{J}_n$ conține un element $a \neq 0$. Pentru demonstrația teoremei, este suficient să găsim $c \in \mathcal{J}_n$ astfel încît $ca \neq 0$.

Conform lemei 11.72 există $b \in \mathcal{A}$ astfel încît orice putere a elementului ba să fie diferită de zero. Punem $c_k = (ba)^{2^k-1} b$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). Prin inducție după k se demonstrează că avem $c_k \in \mathcal{J}_{k-1}$. Într-adevăr, pentru $k = 0$, $c_0 = bab \in \mathcal{J}_1$, deoarece $a \in \mathcal{J}_1$, iar posibilitatea pasului de inducție rezultă direct din relațiile evidente $c_{k+1} = c_k a c_k$ și din faptul că $a \in \mathcal{J}_{k+2}$.

Astfel, am arătat că elementul $c = c_{n-1}$ aparține algebrei $\mathcal{J}_n$. Dar $ca = (ba)^{2^{n-1}-1} ba = (ba)^{2^{n-1}} \neq 0$. Teorema este complet demonstrată.

11.74. Demonstrăm cîteva afirmații simple, utilizate în continuare.

LEMĂ. *Fie $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{J}_1 \supseteq \mathcal{J}_2 \supset 0$ un lanț normal al algebrei $\mathcal{A}$ astfel încît algebra $\mathcal{J}_2$ să fie simplă. Atunci $\mathcal{J}_2$ este ideal bilateral în $\mathcal{A}$.*

Demonstrație. Conform teoremei 11.54, algebra $\mathcal{J}_2$ are element unitate e. Deoarece $e \in \mathcal{J}_1$, pentru orice $a \in \mathcal{A}$ elementele ae și ea aparțin lui $\mathcal{J}_1$. Dar atunci pentru orice $b \in \mathcal{J}_2$ avem

$$ab = a(eb) = (ae)b \in \mathcal{J}_2 \quad \text{și} \quad ba = (be)a = b(ea) \in \mathcal{J}_2,$$

ceea ce demonstrează lema.

11.75. Fie $\mathcal{A}$ o algebră oarecare și $\mathcal{J}$ un ideal bilateral care are element unitate. Atunci în $\mathcal{A}$ există un ideal bilateral $\mathcal{Y}$ astfel încît $\mathcal{A}$ să fie suma directă a lui $\mathcal{J}$ și $\mathcal{Y}$.

Fie $\mathcal{Y} = \{a \in \mathcal{A} \mid ae = 0\}$, unde e este elementul unitate al algebrei $\mathcal{J}$. Evident, $\mathcal{Y}$ este un ideal stîng în $\mathcal{A}$; deoarece scriem $b = be + (b - be)$ și $b - be \in \mathcal{J}$ pentru orice $b \in \mathcal{A}$, rezultă că are loc descompunerea $\mathcal{A} = \mathcal{J} + \mathcal{Y}$.

Rămîne de arătat că $\mathcal{Y}$ este un ideal drept în $\mathcal{A}$. Pentru orice $a \in \mathcal{Y}$ și $b \in \mathcal{A}$,

$$ab = abe + a(b - be).$$

Deoarece $be \in \mathcal{J}$, $be = ebe$ și deoarece $ae = 0$,

$$abe = (ae)(be) = 0.$$

Așadar, $ab = a(b - be)$ și ab este produsul a două elemente din $\mathcal{Y}$. Rezultă că $ab \in \mathcal{Y}$ și lema este demonstrată.

11.76. LEMĂ. *Presupunem că algebra $\mathcal{A}$ se descompune în suma directă a idealelor ei bilaterale $\mathcal{J}$ și $\mathcal{Y}$ astfel încît $\mathcal{J}$ să fie un ideal bilateral maximal în $\mathcal{A}$. Atunci algebra $\mathcal{Y}$ nu conține ideale bilaterale proprii.*

Fie $\mathcal{Y}'$ un ideal bilateral în $\mathcal{Y}$ care nu coincide cu $\mathcal{Y}$. Atunci algebra $\mathcal{Y}'' = \mathcal{J} + \mathcal{Y}'$ este un ideal bilateral în $\mathcal{A}$. Dar $\mathcal{J}$ este maximal, deci $\mathcal{Y}'' = \mathcal{J}$. De aici rezultă că $\mathcal{Y}' = (0)$ și lema este demonstrată.

11.77. Formulăm acum teorema fundamentală relativ la structura algebrelor semisimple.

TEOREMĂ (*A doua teoremă de structură*). *Orice algebră semisimplă se descompune în sumă directă de ideale bilaterale, fiecare din acestea fiind o algebră simplă.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{A}$ o algebră semisimplă. Așa cum s-a arătat în 11.71, există un șir de compoziție

$$\mathcal{A} = \mathcal{J}_0 \supset \mathcal{J}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{J}_n \supset \mathcal{J}_{n+1} = (0).$$

Teorema este un caz particular al următoarei afirmații:

(*) *Pentru orice* k, $0 \leqslant k \leqslant n$, *algebra* $\mathcal{J}_{n-k}$ *este sumă de ideale bilaterale ale ei, care sînt algebre simple, și, în plus, are element unitate.*

Afirmația (*) va fi demonstrată prin inducție după k.

Algebra $\mathcal{J}_n$ nu conține ideale bilaterale proprii și conform teoremei 11.73, este diferită de algebra trivială. Așadar, algebra $\mathcal{J}_n$ este simplă și, în particular, ea are element unitate. Aceasta demonstrează (*) pentru $k = 0$.

Presupunem acum că afirmația are loc pentru un anumit k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Aceasta înseamnă în particular că algebra $\mathcal{J}_{n-k}$ conține un element unitate și deci, conform lemei 11.75, $\mathcal{J}_{n-k-1} = \mathcal{J}_{n-k} + \mathcal{J}$ pentru un anumit ideal bilateral $\mathcal{J}$ în $\mathcal{J}_{n-k-1}$.

Deoarece $\mathcal{J}_{n-k}$ este un ideal bilateral maximal în $\mathcal{J}_{n-k-1}$ algebra $\mathcal{J}$ nu conține (conform lemei 11.76) ideale bilaterale proprii. În același timp aplicînd teorema 11.73 lanțului normal

$$\mathcal{A} = \mathcal{J}_0 \supset \mathcal{J}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{J}_{n-k-1} \supset \mathcal{J} = (0),$$

rezultă că această algebră nu este trivială. Prin urmare, ea este simplă.

Conform ipotezei de inducție, algebra $\mathcal{J}_{n-k}$ se descompune în sumă directă de subalgebre simple care sînt ideale bilaterale ale ei. Avînd elemente unitate, aceste subalgebre sînt (conform lemei 11.74) ideale bilaterale și în $\mathcal{J}_{n-k-1}$. Din acest fapt și din egalitățile $\mathcal{J}_{n-k-1} = \mathcal{J}_{n-k} + \mathcal{J}$, rezultă direct că descompunerea cerută în sumă directă de subalgebre simple are loc și pentru algebra $\mathcal{J}_{n-k-1}$.

Rămîne de dovedit existența elementului unitate în algebra $\mathcal{J}_{n-k-1}$. Fie e_1 elementul unitate al algebrei $\mathcal{J}_{n-k}$ (care există conform ipotezei de inducție) și e_2 elementul unitate al algebrei simple $\mathcal{J}$. Deoarece $ab = ba = 0$. pentru orice $a \in \mathcal{J}_{n-k}$, $b \in \mathcal{J}$, elementul $e = e_1 + e_2$ este element unitate în întreaga algebră $\mathcal{J}_{n-k-1}$, așa cum se vede imediat.

În acest mod am demonstrat pasul de inducție și totodată afirmația (*). După cum am observat, teorema noastră este un caz particular al acestei afirmații, anume pentru $k = n$. Cu aceasta teorema este demonstrată.

De remarcat că am demonstrat totodată faptul că *orice algebră semisimplă are element unitate.*

Idealele bilaterale găsite în teoremă, a căror sumă directă dau algebra semisimplă $\mathcal{A}$ vor fi numite în cele ce urmează *componentele simple ale algebrei* $\mathcal{A}$.

11.78. În 11.64 s-a arătat că orice algebră simplă este izomorfă cu o algebră $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ pentru un anumit spațiu finit-dimensional $\mathfrak{X}$ sau, ceea ce este același lucru, cu algebra tuturor matricilor pătratice de un anumit ordin.

Fie acum $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ o colecție de spații finit-dimensionale. Notăm cu $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n)$ mulțimea tuturor sistemelor de forma $a = (a_1, \ldots, a_n)$, unde a_k este operator din algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$ (sau, dacă este mai comod, matricea de dimensiune corespunzătoare). Evident, $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n)$ este o algebră relativ la operațiile „pe coordonate" definite prin egalitățile:

$$a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n);$$

$$\lambda a = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n);$$

$$ab = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n),$$

unde $a, b \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, iar λ este un număr complex

Acestea fiind spuse, teorema 11.77 admite următoarea formulare echivalentă.

Orice algebră semisimplă este izomorfă cu o algebră $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n)$ *pentru o alegere convenabilă a spațiilor* $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$.

Trebuie notat de asemenea că algebrele simple componente ale algebrei $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n)$ constau evident din linii de forma $(0, \ldots, 0, a_k, 0, \ldots, 0)$, unde coordonata k parcurge întreaga algebră $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$ iar pe celelalte locuri sînt zerouri; o astfel de componentă va fi identificată cu algebra corespunzătoare $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$.

11.79. În încheierea acestui paragraf căutăm toate idealele bilaterale ale unei algebre semisimple.

TEOREMĂ. *Orice ideal bilateral al unei algebre semisimple este suma directă a unui anumit număr de componente simple.*

Fie $\mathcal{A}$ o algebră semisimplă; atunci conform 11.78, ea este izomorfă cu o algebră de forma $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_n)$ avînd componentele simple $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Fie acum $\mathcal{J}$ un ideal bilateral în $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_n)$. Notăm cu $\mathcal{J}_k$ intersecția lui $\mathcal{J}$ cu $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$. Deoarece împreună cu fiecare element $a = (a_1, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, ..., a_n)$, $a \in \mathcal{J}$, idealul $\mathcal{J}$ conține și linia $ae_k = (0, ..., 0, a_k, 0, ..., 0)$ unde e_k este elementul unitate din $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$, are loc descompunerea în sumă directă $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + ... + \mathcal{J}_n$.

Dar pentru orice k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\mathcal{J}_k$ este un ideal bilateral în algebra simplă $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$, așa cum se vede imediat; așadar, sau $\mathcal{J}_k = (0)$, sau $\mathcal{J}_k$ coincide cu întreg $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$. De aici rezultă direct afirmația făcută.

§ 11.8. Structura reprezentărilor algebrelor simple și semisimple

Cunoașterea structurii tipurilor studiate de algebră ne permite să determinăm toate reprezentările lor pînă la o echivalență.

11.81. Fie $\mathcal{A}$ o algebră semisimplă; conform celor arătate în paragraful precedent, ea poate fi identificată cu algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_n)$ pentru o anumită alegere a spațiilor $\mathfrak{X}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. De aceea odată cu o algebră dată $\mathcal{A}$ se pun în evidență în mod natural n reprezentări ale ei $T^k : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, ce acționează după formula $T^k_a = a_k \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$ pentru orice $a \in \mathcal{A}$, $a = (a_1, ..., a_k, ..., a_n)$. Deoarece imaginea reprezentării T^k este întreaga algebră $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$, toate aceste reprezentări sînt ireductibile.

TEOREMĂ. *Orice reprezentare ireductibilă a unei algebre semisimple $\mathcal{A}$ este echivalentă cu una din reprezentările T^k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_n)$ o algebră semisimplă și $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ o reprezentare ireductibilă a sa. Considerăm nucleul $\mathfrak{N}(T)$ al reprezentării T. Fiind ideal bilateral în $\mathcal{A}$, acest nucleu este, conform teoremei 11.79, suma directă a anumitor algebre simple componente ale lui $\mathcal{A}$.

Notăm cu $\mathcal{A}_1$ suma directă a celorlalte componente simple ale algebrei $\mathcal{A}$, care nu apar în $\mathfrak{N}(T)$ și fie $T^{(1)} : \mathcal{A}_1 \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$

restricția la $\mathcal{A}_1$ a reprezentării T considerată inițial. Noua reprezentare $T^{(1)}$ este exactă și deoarece imaginile reprezentărilor $T^{(1)}$ și T coincid în mod evident, ea este ireductibilă. Algebra $\mathcal{A}_1$ avînd o reprezentare de această formă trebuie să fie simplă (11.64). Așadar, ea se reduce la un singur sumant direct, adică ea coincide cu $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$ pentru un anumit k, $1 \leqslant k \leqslant n$. De aici, pentru orice $a \in \mathcal{A}$, $a = (a_1, ..., a_k, ..., a_n)$, rezultă imediat că

$$T_a = T^{(1)}_{a_k}, \quad a_k \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k).$$

Conform teoremei 11.51 toate reprezentările ireductibile ale unei algebre simple sînt echivalente; în particular, sînt echivalente $T^{(1)} : \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ și reprezentarea identică $T^{(2)} : \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$. Aceasta înseamnă existența unui izomorfism $U : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_k$ astfel încît $UT^{(1)}_{a_k} = T^{(2)}_{a_k} U$ pentru orice $a_k \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_k)$. Dar conform celor demonstrate $T_a = T^{(1)}_{a_k}$ pentru orice $a \in \mathcal{A}$; pe de altă parte, din definiția reprezentării T^k rezultă că $T^k_a = T^{(2)}_{a_k}$. De aici $UT_a = T^k_a U$ pentru orice $a \in \mathcal{A}$, ceea ce demonstrează echivalența reprezentărilor T și T^k.

11.82. Trecem acum la reprezentările arbitrare ale algebrelor simple și semisimple. Va fi utilă următoarea afirmație cu caracter general.

LEMĂ. *Fie $\mathcal{A}$ o algebră oarecare, $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ o reprezentare a ei, $\mathfrak{X}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ subspațiile invariante minimale ale reprezentării T astfel încît acoperirea lor liniară să coincidă cu $\mathfrak{X}$. Atunci $\mathfrak{X}$ este suma directă a unora din aceste subspații.*

O intersecție de subspații invariante ale reprezentării este ea însăși un subspațiu invariant. De aceea din minimalitatea subspațiilor date rezultă că pentru orice k intersecția subspațiului $\mathfrak{X}_{k+1}$ cu acoperirea liniară a subspațiilor precedente $\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_k$ este sau $\mathfrak{X}_{k+1}$, sau nulă. Așadar, alegînd succesiv dintre subspațiile $\mathfrak{X}_k$ pe cele care nu sînt conținute în acoperirea liniară a celor precedente, obținem subspații care au ca sumă directă întreaga acoperire liniară a subspațiilor $\mathfrak{X}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, adică întreg $\mathfrak{X}$. Lema este astfel demonstrată.

11.83. Conform celei de a doua teoreme de structură, orice algebră semisimplă $\mathcal{A}$ este izomorfă cu o anumită algebră de forma $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_n)$. În continuare ne va fi comod să considerăm realizarea algebrei $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_n)$ ca algebra liniilor

din n matrici de dimensiune corespunzătoare. Pentru un element $a \in \mathcal{A}$, numărul care stă pe locul „i, j" în matricea cu numărul de ordine k a liniei corespunzătoare va fi notat cu $\lambda_{ij}^{(k)}(a)$. Prin $e_{ij}^{(k)}$ vom nota acel element al algebrei $\mathcal{A}$ pentru care $\lambda_{ij}^{(k)}(e_{ij}^{(k)}) = 1$ iar toate celelalte locuri din matricile liniei corespunzătoare sînt completate cu zerouri. Observăm că $\sum_{i,k} e_{ij}^{(k)} = e$, unde e este elementul unitate al algebrei $\mathcal{A}$.

LEMĂ. *Fie $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ o reprezentare a algebrei semisimple $\mathcal{A}$. Presupunem apoi că pentru un element $x \in \mathfrak{X}$ și pentru anumiți indici i și k vectorul $y = T_{e_{ii}^{(k)}} x$ este diferit de zero. Atunci y aparține unui anumit subspațiu invariant minimal al reprezentării T.*

Demonstrație. Punem $\mathcal{Y} = \{T_a y : a \in \mathcal{A}\}$. Deoarece $y = T_{e_{ii}^{(k)}} x$, din regula de înmulțire a matricilor, rezultă că orice element $z_1 \in \mathcal{Y}$ are forma $z_1 = T_b x$ unde b este o anumită combinație liniară a elementelor $e_{ij}^{(k)}$ (i și k fixate). Este suficient să arătăm că în cazul $z \neq 0$ vectorul z_1 este un vector ciclic în restricția reprezentării T la $\mathcal{Y}$.

Fie $z_2 \in \mathcal{Y}$, $z_2 = T_c x$, unde c este o altă combinație liniară a acelorași elemente. Folosind realizarea algebrei $\mathcal{A}$ ca algebră de linii de matrici, găsim un element $a \in \mathcal{A}$ astfel încît $c = ab$. Dar atunci $z_2 = T_c x = T_a(T_b x) = T_a z_1$. Așadar, vectorul z_1 este ciclic și lema este demonstrată.

11.84. TEOREMĂ. *Orice reprezentare a unei algebre semisimple se descompune în sumă directă de reprezentări ireductibile și reprezentarea trivială.*

Fie $\mathcal{A}$ o algebră semisimplă, $T^0 : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X}^0)$ reprezentarea ei. Considerăm operatorul T_e^0 unde e este elementul unitate al algebrei $\mathcal{A}$. Pentru orice $x \in \mathfrak{X}^0$ egalitatea $x = T_e^0 x + (x - T_e^0 x)$ determină în mod evident o descompunere a lui $\mathfrak{X}^0$ în suma directă a subspațiilor $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{X}_0$, invariante relativ la T^0, iar restricția reprezentării T^0 la $\mathfrak{X}_0$ este reprezentarea trivială. Ne rămîne de arătat că reprezentarea $T : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$, restricția reprezentării T^0 la $\mathfrak{X}$, se descompune în sumă directă de ireductibile.

Alegem în $\mathfrak{X}$ o bază $x_1, \ldots, x_m$. Operatorul T_e este operatorul identic în $\mathfrak{X}$ și de aceea, în virtutea egalității $e = \sum_{i,k} e_{ii}^{(k)}$, acoperirea liniară a vectorilor de forma $T_{e_{ii}^{(k)}} x_j$ (pentru toți indicii posibili i, j, k) coincide cu întreg $\mathfrak{X}$. Conform lemei 11.83 orice vector nenul de această formă aparține unui subspațiu invariant minimal al reprezentării T.

Așadar, ne găsim în condițiile lemei 11.82. Dar atunci spațiul $\mathfrak{X}$ se descompune în suma directă a subspațiilor invariante minimale ale reprezentărilor T și, prin urmare, T se descompune în sumă directă de reprezentări ireductibile. Teorema este complet demonstrată.

11.85. Teoremele 11.81 și 11.84 descriu împreună, pînă la echivalențe, toate reprezentările algebrelor semisimple (inclusiv ale algebrelor simple).

Rezultatul obținut arată în particular că operatorii unei reprezentări date a unei algebre simple (considerăm acest caz pentru mai mare claritate), se scriu într-o anumită bază prin matrici de forma

$$\left\| \begin{array}{cc|c} M & 0 & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & M & \\ \hline & 0 & 0 \end{array} \right\|, \tag{3}$$

unde M parcurge toată mulțimea matricilor de dimensiune corespunzătoare. În cazul mai general al unei algebre semisimple, matricile corespunzătoare sînt matrici de forma

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} M_1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & \\ & & M_1 & & \\ \hline & & & M_k & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{array} \right\|, \tag{4}$$

unde matricile bloc $M_1, \ldots, M_k, \ldots$ parcurg independent una de alta toată colecția matricilor de dimensiuni corespunzătoare (în general diferite pentru diferite matrici).

11.86. Am obținut totodată *descrierea tuturor algebrelor simple și semisimple de matrici* (adică ale algebrelor ale căror elemente sînt matrici). Într-adevăr, asociind fiecărei matrici din această algebră operatorul ei (în orice bază), obținem o reprezentare exactă a acestei algebre. De aici, prin utilizarea raționamentelor precedente, rezultă direct următoarea afirmație:

Orice algebră simplă (respectiv semisimplă) de matrici este formată din matrici de forma $P^{-1}LP$ unde P este o matrice nesingulară fixată iar L parcurge mulțimea tuturor matricilor de forma (3) (*respectiv de forma*) (4).

Pentru algebre cu element unitate se obține un rezultat mai precis:

Orice algebră simplă de matrici, avînd element unitate, este formată din matrici de forma $P^{-1}LP$ unde P este o matrice nesingulară fixată iar L parcurge mulțimea tuturor matricilor de forma

$$\left\| \begin{array}{cccc} M & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & M \end{array} \right\|,$$

unde M parcurge colecția tuturor matricilor de dimensiuni corespunzătoare. Orice algebră semisimplă de matrici avînd element unitate este formată din matrici de forma $P^{-1}LP$ unde P este o matrice nesingulară fixată iar L parcurge toate matricile de forma

$$\left\| \begin{array}{c|c|c|c} M_1 & & & \\ \hline & \ddots & & \\ \hline & & M_k & \end{array} \right\|,$$

unde matricile $M_1, \ldots, M_k$ parcurg independent una de alta colecția matricilor de ordine corespunzătoare.

§ 11.9. Alte rezultate

Am încheiat descrierea algebrelor finit-dimensionale simple și semisimple, ca și a reprezentărilor lor. Studiul ulterior al algebrelor finit-dimensionale depășește cadrul acestei lucrări. Este util totuși să indicăm fără demonstrație unele rezultate profunde în această direcție.

11.91. Teorema lui Wedderburn. *Orice algebră finit-dimensională se descompune ca spațiu vectorial în sumă directă a radicalului ei și a unei subalgebre semisimple.*

11.92. *Radicalul unei algebre finit-dimensionale constă numai din elemente nilpotente. Mai mult, pentru orice astfel de algebră există n natural astfel încît produsul oricăror n elemente ale radicalului ei să fie egal cu zero.*

11.93. *Orice reprezentare a unei algebre radicale se scrie într-o anumită bază prin matrici avînd zerouri pe diagonala principală și dedesubtul acesteia (fără ca matricile operatorilor reprezentării să parcurgă toată mulțimea matricilor de acest tip).*

PROBLEME

1. Să se arate că orice ideal stîng al algebrei $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ este mulțimea tuturor operatorilor al căror nucleu conține un anumit subspațiu $\mathfrak{X}'$ al lui $\mathfrak{X}_n$.

2. Să se arate că orice ideal drept al algebrei $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ este mulțimea tuturor operatorilor ale căror imagini sînt conținute într-un anumit subspațiu $\mathfrak{X}'$ al lui $\mathfrak{X}_n$.

3. Să se indice toate idealele stîngi și drepte maxime și minimale ale algebrei $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$.

4. Pentru orice algebră semisimplă $\mathfrak{A}$ de operatori liniari peste spațiul $\mathfrak{C}_n$, să se introducă în $\mathfrak{C}_n$ un produs scalar astfel încît din faptul că $A \in \mathfrak{A}$ să rezulte $A^* \in \mathfrak{A}$.

5. (Reciproca afirmației din problema 4). Dacă pentru o anumită algebră $\mathfrak{A}$ de operatori liniari peste spațiul $\mathfrak{C}_n$ există un produs scalar (x, y) în $\mathfrak{C}_n$ astfel încît din $A \in \mathfrak{A}$ să rezulte $A^* \in \mathfrak{A}$, atunci algebra $\mathfrak{A}$ este semisimplă.

6. Dacă în condițiile problemei 5 intersecția comutatorului $\bar{\mathfrak{B}}$ (11.61), cu algebra $\mathfrak{B}$ conține doar operatorii multipli ai operatorului identic, atunci $\mathfrak{B}$ este o algebră simplă.

7. Să se arate că pentru algebra simplă $\mathfrak{B}$ formată din matrici de forma, 11.85, dispuse în m^2 blocuri

$$\left\| \begin{array}{cccc} \mathcal{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{A} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{A} \end{array} \right\|$$

comutatorul se reprezintă (în aceeași bază) prin toate matricile de forma

$$\left\| \begin{array}{cccc} \lambda_{11}E & \lambda_{12}E & \dots & \lambda_{1m}E \\ \lambda_{21}E & \lambda_{22}E & \dots & \lambda_{2m}E \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1}E & \lambda_{m2}E & \dots & \lambda_{mm}E \end{array} \right\|$$

unde $\lambda_{jk}(j, k = 1, \dots, m)$ sînt numere complexe arbitrare. În particular, intersecția $\mathfrak{B} \subset \bar{\mathfrak{B}}$ constă din matrici, multipli ai matricii unitate.

8. Pentru ce algebră semisimplă de matrici $\mathfrak{B}$ comutatorul ei $\bar{\mathfrak{B}}$ coincide cu $\mathfrak{B}$?

9. Să se descrie toate algebrele semisimple comutative ($\mathcal{A} \subset \bar{\mathfrak{B}}$).

10. Să se descrie toate algebrele semisimple de matrici $\mathfrak{B}$ pentru care $\bar{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$.

11. Să se arate că pentru orice algebră semisimplă $\mathfrak{B}$, avem $\bar{\bar{\mathfrak{B}}} = \mathfrak{B}$.

12. Algebra $\mathfrak{B}$ constă din toate polinoamele de un operator $\mathcal{A}$ (deci este comutativă, $\bar{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$). Să se enunțe criterii pentru egalitatea $\bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$.

13. Dacă o algebră nenulă $\mathfrak{B}$ are toate elementele nilpotente (adică pentru orice $A \in \mathfrak{B}$ există $k = k(A)$ astfel încît $A^k = 0$)), atunci egalitatea $c\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ este imposibilă pentru orice $c \in \mathfrak{B}$.

14. O algebră $\mathfrak{B}$ se numește nilpotentă dacă există un număr p astfel încît produsul oricăror p elemente din $\mathfrak{B}$ este egal cu 0. Să se arate că o algebră $\mathfrak{B}$ care este sumă directă a idealelor ei drepte $\mathfrak{B}_1 + \dots + \mathfrak{B}_m$, este nilpotentă dacă fiecare ideal al ei $\mathfrak{B}_j$ ($j = 1, \dots, m$) este nilpotent.

15. Dacă o algebră finit-dimensională constă din elemente nilpotente să se arate că ea însăși este nilpotentă.

16. Fie $\mathfrak{B}$ o algebră nilpotentă de operatori în spațiul $\mathcal{H}_n$. Fie $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{H}_n$ intersecția tuturor nucleelor operatorilor $A \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{H}_n$ intersecția tuturor subspațiilor pe care operatorii $A \in \mathfrak{B}$ le duc în $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{H}_n$ intersecția tuturor subspațiilor pe care operatorii $A \in \mathfrak{B}$ le duc în $\mathcal{M}_2$ etc. Să se arate că au loc incluziuni stricte

$$0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \dots \subset \mathcal{M}_p = \mathcal{H}_n$$

unde p este indicele de nilpotență al algebrei $\mathfrak{B}$ (adică cel mai mic p astfel încît produsul oricăror p operatori din $\mathfrak{B}$ este nul).

17. Pentru orice algebră nilpotentă $\mathfrak{B}$ de operatori în spațiul $\mathcal{H}_n$ există o bază în care toți operatorii $A \in \mathfrak{B}$ se scriu prin matrici de forma

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1,\,p-1} \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & A_{2,\,p-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{3,\,p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|,$$

unde p este indicele de nilpotență al algebrei $\mathfrak{B}$ (A. Ia. Helemțki).

Capitolul 12

CATEGORII DE SPAȚII FINIT-DIMENSIONALE

§ 12.1. Introducere

12.11. În ultimul timp în diverse domenii ale matematicii au început să joace un rol important conceptul de categorie și unele noțiuni legate de acesta (H. Cartan și S. Eilenberg, *Algebră omologică*, A. Grothendieck, *Câteva probleme de algebră omologică*, A. G. Kuroș, *Bazele teoriei categoriilor*). Colecția mulțimilor și aplicațiilor între mulțimi, colecția spațiilor vectoriale și aplicațiilor liniare, ca și colecția algebrelor și morfismelor între algebre etc. sînt exemple de categorii.

Definiția mai precisă a unei categorii $\mathfrak{C}$ este următoarea. Fixăm o mulțime $\mathfrak{A}$ de indici α. Presupunem că fixăm o colecție $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ de elemente X_α numite *obiectele* categoriei $\mathfrak{C}$ și pentru orice pereche de obiecte X_β, X_α este indicată o mulțime $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}(\mathfrak{C})$ de elemente $A_{\beta\alpha}$ numite *morfisme* de la obiectul X_α la obiectul X_β. În plus, se presupune că pentru orice α, β, γ este definit produsul aplicațiilor $A_{\alpha\beta}$ și $A_{\gamma\alpha}$, care reprezintă un morfism de la X_α la X_γ; în plus, cerem ca acest produs să fie asociativ, adică pentru orice α, β, γ, δ

$$A_{\delta\gamma}(A_{\gamma\beta}A_{\beta\alpha}) = (A_{\delta\gamma}A_{\gamma\beta})\,A_{\beta\alpha}.$$

În particular este definită și mulțimea $\mathfrak{M}_{\alpha\alpha}(\mathfrak{C})$ de morfisme de la obiectul X_α în el însuși. În această mulțime este definit așadar un produs asociativ de morfisme. În plus, se cere ca mulțimea $\mathfrak{M}_{\alpha\alpha}(\mathfrak{C})$ să conțină un element unitate 1_α avînd proprietatea că

$$1_\alpha A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \text{ și } A_{\gamma\alpha}1_\alpha = A_{\gamma\alpha}$$

pentru orice α, β și γ. În cele ce urmează, vom nota $\mathfrak{M}_\alpha$ în loc de $\mathfrak{M}_{\alpha\alpha}$.

Colecția obiectelor X_α și a morfismelor $A_{\beta\alpha}$, mai precis $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}(\mathfrak{C})$, $(\forall)\alpha$, $\beta \in \mathfrak{A}$ avînd proprietățile anterioare formează o *categorie* $\mathfrak{C}$.

Categoria $\mathfrak{C}$ se numește *liniară* dacă pentru orice $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, în mulțimea $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}(\mathfrak{C})$ de aplicații $A_{\beta\alpha}$ sînt definite operații de adunare a aplicațiilor și înmulțiri cu scalari (numere dintr-un corp K) astfel încît mulțimea $\mathfrak{M}_{\beta\alpha}(\mathfrak{C})$ să formeze un spațiu vectorial peste corpul K. Într-o categorie liniară, pentru orice indice α, mulțimea $\mathfrak{M}_\alpha$ formează o algebră cu unitate (peste corpul K).

12.12. În acest capitol considerăm categorii liniare, ale căror obiecte sînt spații vectoriale finit-dimensionale peste corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe, iar morfismele sînt aplicații liniare între astfel de obiecte.

Așadar, pornim de la următoarea definiție. Considerăm o mulțime de spații vectoriale complexe finit-dimensionale $X_\alpha (\alpha \in \mathfrak{A})$. Pentru fiecare α este fixată o algebră $\mathfrak{B}_\alpha$ de operatori liniari care transformă X_α în el însuși. Pentru fiecare pereche β, α este fixată o familie $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$ de operatori liniari $A_{\beta\alpha}$ care transformă X_α în X_β și care conține odată cu orice doi operatori $A_{\beta\alpha}$ și $B_{\beta\alpha}$ suma lor $A_{\beta\alpha} + B_{\beta\alpha}$ și odată cu orice operator $A_{\beta\alpha}$, produsul său $\lambda A_{\beta\alpha}$ cu orice număr complex λ; o astfel de familie de operatori liniari va fi numită în continuare *familie liniară*. În particular, familia liniară $\mathfrak{B}_{\alpha\alpha}$ coincide cu algebra $\mathfrak{B}_\alpha$. Presupunem în plus că pentru orice α, β, γ este îndeplinită condiția

$$\mathfrak{B}_{\gamma\beta}\mathfrak{B}_{\beta\alpha} \subset \mathfrak{B}_{\gamma\alpha}, \tag{1}$$

adică orice produs $A_{\gamma\beta}A_{\beta\alpha} (A_{\gamma\beta} \in \mathfrak{B}_{\gamma\beta},\ A_{\beta\alpha} \in \mathfrak{B}_{\beta\alpha})$ aparține lui $\mathfrak{B}_{\gamma\alpha}$. Colecția spațiilor X_α împreună cu algebrele $\mathfrak{B}_\alpha$ și cu familiile $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$ este numită *categoria spațiilor finit-dimensionale* sau mai simplu categorie și va fi notată cu $\mathfrak{C}$.

Dacă în fiecare spațiu X_α este aleasă cîte o bază oarecare, atunci algebrele $\mathfrak{B}_\alpha$ și familiile liniare $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$ pot fi identificate cu algebre și familii liniare de matrici corespunzătoare, ceea ce vom utiliza în mod sistematic în continuare.

În acest capitol vom studia categoriile de spații vectoriale pentru algebre $\mathfrak{B}_\alpha$ date. Ne mărginim la algebre semisimple $\mathfrak{B}_\alpha$. Conform 11.86 pentru orice algebră semisimplă spațiul X_α poate fi descompus în sumă directă de subspații $X_{\alpha j}$ invariante relativ la toți operatorii $A_{\beta\alpha}$ și în fiecare spațiu $X_{\alpha j}$

algebra $\mathfrak{B}_\alpha$ este algebră simplă cu element unitate, adică într-o anumită bază ea se scrie prin matrici de forma

$$\left\| \begin{matrix} C & & & \\ & C & & \\ & & \ddots & \\ & & & C \end{matrix} \right\|,$$

unde C parcurge întreaga colecție de matrici de ordin corespunzător.

Începem cu studiul cîtorva cazuri particulare care ne vor permite obținerea unor rezultate generale. În § 12.2 se consideră cazul cînd orice algebră $\mathfrak{B}_\alpha$ este algebră completă, adică algebra tuturor operatorilor liniari acționînd în X_α. Cazul contrar cînd fiecare din aceste algebre este algebra operatorilor $\{\lambda X\}$, multipli ai operatorului identic, este analizat în § 12.3. Rezultatele din § 12.4 se referă la cazul algebrelor simple $\mathfrak{B}_\alpha$ care este generalizarea naturală a cazului algebrelor $\{\lambda X\}$. În § 12.5 este analizat cazul cînd fiecare algebră $\mathfrak{B}_\alpha$ este algebra tuturor matricilor diagonale. În § 12.6 este studiat cazul general, care folosește cele spuse în paragrafele precedente.

12.13. Reamintim notațiile și regulile de calcul cu matricile operatorilor liniari care aplică un spațiu vectorial X într-un alt spațiu vectorial Y (4.41 — 4.43). Presupunem că X este un spațiu n-dimensional cu baza $e_1, \ldots, e_n$ și Y un spațiu m-dimensional cu baza $f_1, \ldots, f_m$. Operatorului liniar $\mathfrak{A}$ acționînd de la X la Y îi asociem $m \times n$ — matricea (adică o matrice cu m linii și n coloane)

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

unde în coloana k se află numerele $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}$ care reprezintă coeficienții descompunerii vectorului $\mathfrak{A}e_k \in Y$ după vectorii bazei $f_1, \ldots, f_m$.

Fie apoi Z un spațiu k-dimensional cu baza $g_1, \ldots, g_k$. Unui operator $\mathfrak{B}$ acționînd de la spațiul Y la spațiul Z îi corespunde o $k \times m$ — matrice

$$B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{km} \end{matrix} \right\|.$$

Operatorul $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ acționează de la X la Z. Lui îi corespunde $k \times n$ — matricea

$$C = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{k1} & c_{k2} & \ldots & c_{kn} \end{matrix} \right\|.$$

Această matrice se obține din matricile B și A cu ajutorul operației de înmulțire:

$$c_{pq} = \sum_{j=1}^{m} b_{pj} a_{jq}, \quad p = 1, \ldots, k; \quad q = 1, \ldots, n.$$

12.14. Reamintim următorul fapt care va fi adeseori utilizat (4.44).

LEMĂ. *Fie o $n \times m$-matrice dreptunghiulară (cu n linii și m coloane) $A = \| a_{pq} \|$ $(p = 1, \ldots, n;\ q = 1, \ldots, m)$. Dacă se înmulțește matricea A la dreapta cu o $m \times k$-matrice dreptunghiulară $B = \| b_{rs} \|$ unde toate elementele b_{rs}, cu excepția lui $b_{r_0 s_0}$, sînt egale cu 0, iar $b_{r_0 s_0} = 1$, atunci se obține o $n \times k$-matrice dreptunghiulară F în care toate coloanele cu excepția coloanei s_0 vor fi egale cu zero, iar în coloana s_0 se află elementele coloanei r_0 a matricii A.*

Dacă matricea A se înmulțește la stînga cu o $l \times n$-matrice dreptunghiulară $C = \| c_{rs} \|$ unde toate elementele c_{rs}, cu excepția lui $c_{r_1 s_1}$, sînt egale cu zero, iar $c_{r_1 s_1} = 1$, atunci se obține o $l \times m$-matrice dreptunghiulară, în care toate liniile cu excepția liniei r, vor fi egale cu 0, în timp ce în linia r_1 se vor afla elementele liniei s_1 a matricii A.

12.15. Ca un corolar obținem: dacă o $n \times m$-matrice dreptunghiulară A este înmulțită la dreapta cu o $m \times k$-matrice B și la stînga cu $l \times n$-matricea C cu proprietățile

indicate, atunci în $l \times k$-matricea D va fi diferit de zero (eventual) numai un element, anume cel situat la intersecția liniei r_1 și coloanei s_1 și acest element va fi elementul $a_{s_1 r_0}$ al matricii inițiale A (situat la intersecția liniei s_1 cu coloana r_0).

§ 12.2. Cazul cînd toate algebrele $\mathfrak{B}_\alpha$ date sînt complete

12.21. Fie o categorie $\mathfrak{C}$ de spații vectoriale finit-dimensionale X_α astfel încît algebra $\mathfrak{B}_\alpha$ a operatorilor acționînd în X_α este o algebră completă pentru orice α, adică algebra tuturor operatorilor liniari în X_α. Fixînd arbitrar o bază $e_1, \ldots, e_n$ în spațiul X_1 și $f_1, \ldots, f_n$ în spațiul X_2, putem identifica operatorii din colecțiile $\mathfrak{B}_{11}$, $\mathfrak{B}_{12}$, $\mathfrak{B}_{21}$, $\mathfrak{B}_{22}$ cu matricile corespunzătoare.

Presupunem că dimensiunea spațiului X_1 este egală cu m și că dimensiunea spațiului X_2 este egală cu n. Presupunem apoi că în colecția $\mathfrak{B}_{21}$, există un operator nenul $\mathcal{A}$ și că $n \times m$-matricea sa corespunzătoare $A = \| a_{pq} \|$ are cel puțin un element, de exemplu $a_{p_0 q_0}$ diferit de zero. În acest caz putem presupune $a_{p_0 q_0} = 1$. Din condiția (1) și din ipoteza făcută (aceea că $\mathfrak{B}_1$ și $\mathfrak{B}_2$ sînt algebre complete de matrici), produsul matricii A la dreapta cu orice $m \times m$-matrice pătratică și la stînga cu orice $n \times n$-matrice pătratică aparține familiei $\mathfrak{B}_{21}$. Totuși în virtutea lemei 12.14 ca rezultat al acestei operații putem totdeauna obține o $n \times m$-matrice avînd unicul element nenul, egal cu 1, situat în orice loc dinainte dat. Deoarece combinații liniare convenabile ale acestor matrici sînt egale cu orice $n \times m$-matrice, *$\mathfrak{B}_{21}$ conține toate aceste matrici, adică reprezintă colecția completă de operatori acționînd de la X_1 la X_2.*

12.22. Legăm acum categoria considerată de o anumită mulțime parțial ordonată. Introducem definiția corespunzătoare: o mulțime S se numește *parțial ordonată* dacă pentru anumite perechi de elemente A, B ale lui S este stabilită o relație notată $\leqslant$ (se citește „mai mic sau egal") avînd proprietățile:

a) dacă $A \leqslant B$ și $B \leqslant A$, atunci $A = B$.
b) dacă $A \leqslant B$, $B \leqslant C$, atunci $A \leqslant C$.
c) pentru orice A, $A \leqslant A$.

O noțiune mai generală este cea de mulțime *preordonată* ca fiind o mulțime pe care este definită o relație $\leqslant$ satisfăcînd numai axiomele b) și c). Dacă $A \leqslant B$ și $B \leqslant A$, atunci A și B se numesc *echivalente*, ceea ce se notează cu semnul $A \sim B$. Din faptul că $A \sim B$ și $B \sim C$, rezultă $A \sim C$. Într-adevăr, din $A \leqslant B$, $B \leqslant C$, rezultă conform b) că $A \leqslant C$ iar din $C \leqslant B$, $B \leqslant A$, rezultă $C \leqslant A$, deci $A \sim C$. De aceea relația $\sim$ permite descompunerea întregii mulțimi S în clase $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \ldots$; fiecare clasă conține odată cu un element A toate elementele echivalente cu acesta și elementele A, B ce aparțin la clase diferite sînt neechivalente.

Introducem acum o relație $\leqslant$ între clase. Vom scrie că două clase $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ satisfac $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{V}$ dacă există $A \in \mathfrak{U}$, $B \in \mathfrak{V}$ astfel încît $A \leqslant B$. Această definiție nu depinde de alegerea elementelor $A \in \mathfrak{U}$ și $B \in \mathfrak{V}$; într-adevăr presupunem că $A_1 \in \mathfrak{U}$, $B_1 \in \mathfrak{V}$ astfel încît $A \sim A_1$, $B \sim B_1$. Atunci avem $A_1 \leqslant A \leqslant B \leqslant B_1$, de unde $A_1 \leqslant B_1$, ceea ce trebuia demonstrat. Îndeplinirea proprietăților b), c) din definiția unei mulțimi parțial ordonate pentru clase $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \ldots$ rezultă din îndeplinirea acestor proprietăți pentru elemente $A, B, \ldots$. Arătăm că pentru clase $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \ldots$ are loc și proprietatea a). Dacă $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{V}$ și $\mathfrak{V} \leqslant \mathfrak{U}$, alegem arbitrar $A \in \mathfrak{U}$ și $B \in \mathfrak{V}$. Avem $A \leqslant B$ și $B \leqslant A$, deci A și B sînt echivalente. Dar atunci clasele $\mathfrak{U}$ și $\mathfrak{V}$ coincid, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Așadar, introducînd, așa cum s-a indicat, într-o mulțime preordonată S, o relație de echivalență, ajungem la o mulțime parțial ordonată de clase de echivalență de elemente.

12.23. Ne reîntoarcem la considerarea categoriei $\mathfrak{C}$ de mai sus. Din cele spuse la 12.21 rezultă că pentru perechi de spații (X_1, X_2) avem patru posibilități: a) $\mathfrak{B}_{12}$ și $\mathfrak{B}_{21}$ sînt ambele mulțimi complete de operatori; b) $\mathfrak{B}_{12}$ este completă și $\mathfrak{B}_{21}$ este redusă la zero; c) $\mathfrak{B}_{21}$ este completă și $\mathfrak{B}_{12}$ constă numai din zero; d) $\mathfrak{B}_{12}$ și $\mathfrak{B}_{21}$ sînt reduse la zero.

Dacă $\mathfrak{B}_{12}$ este completă iar relativ la $\mathfrak{B}_{21}$ nu se face nici o ipoteză, vom scrie $X_1 \leqslant X_2$. Un sens analog se dă scrierii $X_2 \leqslant X_1$.

Arătăm că relația $\leqslant$ astfel introdusă transformă categoria $\mathfrak{C}$ într-o mulțime preordonată. Într-adevăr, pentru X_1 dat, avem prin ipoteză că $\mathfrak{B}_{11}$ este o mulțime completă de operatori; de aceea $X_1 \leqslant X_1$. Apoi, dacă $X_1 \leqslant X_2$ și $X_2 \leqslant X_3$, atunci $\mathfrak{B}_{12}$ și $\mathfrak{B}_{23}$ sînt mulțimi complete de operatori liniari

acționînd de la X_1 la X_2 și, respectiv, de la X_2 la X_3. Deoarece toate spațiile considerate au dimensiunea $\geqslant 1$, atunci în mulțimea $\mathfrak{B}_{13}$ există un operator diferit de operatorul nul. Un astfel de operator se poate obține fixînd vectori nenuli $e_1 \in X_1$, $e_2 \in X_2$, $e_3 \in X_3$ ca produsul operatorilor $\mathcal{AB}$, unde $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_{12}$ transformă e_2 în e_1, iar $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{23}$ transformă e_3 în e_2. Conform 12.21 mulțimea $\mathfrak{B}_{13}$ este o mulțime completă de operatori care transformă X_3 în X_1 astfel că $X_1 \leqslant X_3$. Așadar, axiomele b), c) sînt îndeplinite și categoria $\mathfrak{C}$ devine o mulțime preordonată.

12.24. În corespondență cu 12.22 introducem o relație de echivalență definind $X_1 \sim X_2$ dacă $X_2 \leqslant X_1$, $X_1 \leqslant X_2$, adică dacă ambele mulțimi $\mathfrak{B}_{12}$ și $\mathfrak{B}_{21}$ sînt mulțimi complete de operatori liniari corespunzători. Atunci mulțimea spațiilor X_α se descompune în clase de spații echivalente, iar mulțimea acestor clase cu relația $\leqslant$ indicată în 12.22 devine o mulțime parțial ordonată.

Invers, *orice mulțime parțial ordonată $\mathfrak{X}_\alpha$ de clase de spații finit-dimensionale definește o categorie de tipul considerat.* Anume, pentru spațiii X_1 și X_2 care aparțin la aceeași clasă, indicăm mulțimile $\mathfrak{B}_{12}$ și $\mathfrak{B}_{21}$ ca mulțimi complete de operatori; pentru spațiile X_1 și X_3 făcînd parte din clasele $\mathfrak{X}_1$ și $\mathfrak{X}_3$, legate prin relația $\mathfrak{X}_1 < \mathfrak{X}_3$ (adică $\mathfrak{X}_1 \leqslant \mathfrak{X}_3$ dar $\mathfrak{X}_1 \neq \mathfrak{X}_3$), indicăm $\mathfrak{B}_{13}$ ca o mulțime completă și $\mathfrak{B}_{31}$ ca mulțime constînd numai din zero. Dacă X_1 și X_4 aparțin la clase necomparabile, atunci considerăm $\mathfrak{B}_{14}$ și $\mathfrak{B}_{41}$ ca fiind formate numai din zero.

În acest mod, descrierea categoriilor de tip considerat este încheiată.

§ 12.3. Toate algebrele date $\mathfrak{B}_\alpha$ sînt unidimensionale

12.31. Considerăm la început două exemple simple.

a. Fie o categorie $\mathfrak{C}_1$ care constă din două spații X_1 și X_2 avînd aceeași dimensiune. Sistemul $\mathfrak{B}_{21}$ este dat printr-un operator $\mathcal{A}$ care reprezintă biunivoc X_1 pe X_2, împreună cu toți multiplii săi $\lambda\mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Sistemul $\mathfrak{B}_{12}$ este dat printr-un unic operator $\mathcal{B}$, inversul lui $\mathcal{A}$, cu toți multiplii săi $\mu\mathcal{B}$, $\mu \in \mathbb{C}$. În mod evident,

$$\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{21} = (\lambda X), \quad \mathfrak{B}_{21}\mathfrak{B}_{12} = (\lambda X).$$

b. Fie o categorie $\mathfrak{C}_2$ constînd din două spații arbitrare, în care sînt fixate subspații $X_1' \subset X_1$, $X_2' \subset X_2$. Sistemul $\mathfrak{B}_{21}$ constă din toți operatorii care transformă X_1 în X_2' și X_1' în (0). Sistemul $\mathfrak{B}_{12}$ constă din toți operatorii care transformă X_2 în X_1' și X_2' în (0). În mod evident, $\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{21} = 0$, $\mathfrak{B}_{21}\mathfrak{B}_{12} = 0$.

Arătăm că ambele categorii $\mathfrak{C}_1$ și $\mathfrak{C}_2$ epuizează în esență toate categoriile formate din două spații cu $\mathfrak{B}_j = (\lambda\mathcal{E})$ ($j = 1, 2$), și anume, pentru orice categorie $\mathfrak{C}$ are loc alternativa: sau $\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{21} = 0$ (și în acest caz $\mathfrak{B}_{21}\mathfrak{B}_{12} = 0$ iar categoria $\mathfrak{C}$ este conținută într-o categorie de tip $\mathfrak{C}_2$) sau dimensiunile spațiilor X_1 și X_2 sînt egale și categoria $\mathfrak{C}$ este o categorie de tip $\mathfrak{C}_1$.

12.32. Presupunem că este dată o categorie $\mathfrak{C}$ din două spații X_1 și X_2 cu condițiile $\mathfrak{B}_1 = (\lambda X)$, $\mathfrak{B}_2 = (\lambda X)$.

Notăm cu $N_1 \subset X_1$ intersecția nucleelor (4.62) tuturor operatorilor $A_{12} \in \mathfrak{B}_{12}$ și cu $N_2 \subset X_2$ intersecția nucleelor tuturor operatorilor $A_{21} \in \mathfrak{B}_{21}$. Dacă $\mathfrak{B}_{21}X_1 \subset N_2$ și $\mathfrak{B}_{12}X_2 \subset N_1$, atunci avem de a face cu o subcategorie a unei categorii de tip $\mathfrak{C}_2$ în care $X_1' = N_1$, $X_2' = N_2$. De aceea presupunem de exemplu că $\mathfrak{B}_{21}X_1$ nu este conținut în N_2 și există $x_1 \in X_1$ și $A_{21} \in \mathfrak{B}_{21}$ pentru care $A_{21}x_1 = x_2$ nu aparține lui N_2.

Arătăm că toți operatorii $B_{21} \in \mathfrak{B}_{21}$ transformă x_1 într-un vector coliniar cu x_2 și toți operatorii $C_{12} \in \mathfrak{B}_{12}$ transformă x_2 într-un vector coliniar cu x_1.

Într-adevăr, fie $A_{21}x_1 = x_2$, $\mathfrak{B}_{21}x_1 = y_2$. Considerăm un operator $C_{12}^0 \in \mathfrak{B}_{12}$ pentru care $C_{12}^0 x_2 \neq 0$. Atunci $C_{12}^0 x_2 = C_{12}^0 A_{21}x_1 = \lambda x_1$, cu $\lambda \neq 0$. Înlocuind C_{12}^0 printr-un multiplu al său, putem socoti că $\lambda = 1$. Apoi $B_{21}C_{12}^0 x_2 = B_{21}x_1 = y_2$ și în același timp $B_{21}C_{12}^0 x_2 = \mu x_2$; așadar, $y_2 = \mu x_2$. Invers, deoarece $x_1 = C_{12}^0 x_2$ și prin definiția vectorului x_1 el nu este conținut în N_1, avem în mod similar $C_{12}x_2 = \mu x_1$ pentru orice $C_{12} \in \mathfrak{B}_{12}$.

Arătăm că în cazul considerat N_1 și N_2 se reduc la vectorul nul. Fie $z_1 \in N_1$; atunci $A_{21}(x_1 + z_1) = A_{21}x_1 = x_2$, adică vectorul x_1 din construcția precedentă poate fi înlocuit prin $x_1 + z_1$. În acest caz, $C_{12}^0 x_2$ este multiplu și de x_1 și de $x_1 + z_1$, deci x_1 și z_1 sînt coliniari. Deoarece $x_1 \notin N_1$, atunci $z_1 = 0$. Astfel, $N_1 = (0)$. În mod similar, începînd cu x_2 obținem de asemenea că $N_2 = (0)$.

Vedem acum că în locul lui x_1 se poate lua orice vector nenul al spațiului X_1, deoarece întotdeauna există un operator

$A_{21} \in \mathfrak{B}_{21}$ care transformă x_1 într-un element nenul. Aşadar, operatorii familiei $\mathfrak{B}_{21}$ stabilesc o aplicaţie bijectivă între toate dreptele spaţiului X_1 şi o anumită familie de drepte ale spaţiului X_2; mai mult, chiar în familia tuturor dreptelor spaţiului X_2, în virtutea simetriei construcţiei făcute.

Arătăm acum că întreaga familie $\mathfrak{B}_{21}$ este redusă la familia multiplilor unui operator. Fie $x_1 \neq 0$ un vector oarecare în spaţiul X_1 şi x_2 un vector nenul care determină dreapta corespunzînd lui x_1 în spaţiul X_2. Ştim că avem un operator A^0_{21} care transformă x_1 exact în x_2. Orice alt operator $A_{21} \in \mathfrak{B}_{21}$ transformă x_1 în λx_2. Fie mai întîi $A_{21}x_1 = \lambda x_2$ şi $\lambda \neq 0$. Atunci operatorul $B_{21} = \frac{1}{\lambda} A_{21}$ transformă x_1 exact în x_2. Arătăm că B_{21} coincide cu A^0_{21} *peste tot*. Presupunem că avem $A^0_{21}y_1 = y_2$, $B_{21}z_2 \neq y_2$; aceasta este posibil fie pentru $y_2 \neq 0$, $z_2 = \mu y_2$, $\mu \neq 1$, fie pentru $y_2 = 0$, $z_2 \neq 0$. Considerăm un vector nenul $z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Vectorii $A^0_{21}z_1$ şi $B_{21}z_1$ sînt conform celor demonstrate, coliniari; dar în acest caz acest lucru nu poate avea loc, deoarece pentru $y_2 \neq 0$,

$$A^0_{21}(\alpha x_1 + \beta y_1) = \alpha x_2 + \beta y_2, \quad B_{21}(\alpha x_1 + \beta y_1) = \alpha x_2 + \beta\mu y_2,$$

iar pentru $y_2 = 0$,

$$A^0_{21}(\alpha x_1 + \beta y_1) = \alpha x_2, \quad B_{21}(\alpha x_1 + \beta y_1) = \alpha x_2 + \beta z_2,$$

Aşadar, dacă $A_{21}x_1 = \lambda x_2$, $\lambda \neq 0$, atunci $A_{21} = \lambda A^0_{21}$. Fie acum $A_{21}x_1 = 0$; atunci conform celor arătate, $A^0_{21} + A_{21} = A^0_{21}$ şi, prin urmare, $A_{21} = 0$. Astfel, familia $\mathfrak{B}_{21}$ se reduce la familia multiplilor operatorului A^0_{21}. În mod analog, familia $\mathfrak{B}_{12}$ se reduce la familia multiplilor unui operator fixat B_{12}. Produsele $A^0_{21}B^0_{12}$ şi $B^0_{12}A^0_{21}$ sînt diferite de zero şi conform ipotezei, ele dau operatori multipli ai lui $\mathfrak{S}$. De aceea A^0_{21} şi B^0_{12} pot fi socotite operatori inverşi unul altuia; dar aceasta este posibil numai dacă spaţiile X_1 şi X_2 au aceeaşi dimensiune. Am ajuns astfel la următorul rezultat: *Orice categorie care nu este subcategorie a unei categorii de tip* $\mathfrak{C}_2$ *este o categorie de tip* $\mathfrak{C}_1$.

12.33. Categoriile de tip $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ nu epuizează categoriile posibile cu două spaţii şi $\mathfrak{B}_1 = (\lambda\mathfrak{S})$, $\mathfrak{B}_2 = (\lambda\mathfrak{S})$. Într-adevăr, dacă din familia $\mathfrak{B}_{21}$ a unei categorii $\mathfrak{C}$ de tip $\mathfrak{C}_2$ alegem o subfamilie liniară, fără a mări N_1 şi fără a micşora N_2 (de

exemplu, adăugînd la elementele matricilor operatorilor A_{21} o categorie liniară omogenă suplimentară convenabilă), atunci se obţine o categorie $\mathfrak{C}'$ satisfăcînd condiţiile impuse, care nu coincide cu $\mathfrak{C}$. În mulţimea parţial ordonată după incluziune a tuturor categoriilor cu $\mathfrak{B}_j = (\lambda\mathfrak{S})$ $(j = 1, 2)$, categoriile de tip $\mathfrak{C}_2$ se caracterizează prin aceea că ele sînt maximale; cu alte cuvinte, fiecare categorie de tip $\mathfrak{C}_2$, cu excepţia cazurilor singulare, cînd $X'_2 = (0)$ sau $X'_1 = (0)$, nu poate fi extinsă cu păstrarea proprietăţilor categoriilor şi condiţiilor $\mathfrak{B}_j = (\lambda\mathfrak{S})$. Într-adevăr, admitem că o categorie $\mathfrak{C}$ de tip $\mathfrak{C}_2$ poate fi extinsă prin adăugarea unui operator A^0_{21} care ia pentru un anumit $x_1 \in X_1 - X'_1$ valoarea $y_2 \notin X'_2$. Presupunem că $X'_1 \neq 0$. Alegem un operator $B''_{12} \in \mathfrak{B}_{12}$ care transformă y_2 într-un vector nenul $x'_1 \in X'_1$. Atunci $B^0_{12}A^0_{21}x_1 = x'_1$, ceea ce contrazice condiţia pusă.

Presupunem apoi că adăugăm categoriei $\mathfrak{C}$ un operator A_{21} care transformă un vector $x_1 \in X'_1$ nu în zero, ci într-un vector $y'_2 \in X'_2$. Este clar că $X'_2 \neq X_2$, deoarece altfel $X'_1 = \mathfrak{B}_{12}X'_2 = \mathfrak{B}_{12}X_2 = (0)$ şi vectorul indicat x_1 care nu ar fi transformat în zero nu ar putea exista. De aceea în $\mathfrak{B}_{12}$ există un operator B_{12} care transformă vectorul $y_2 \in X_2 - X'_2$ în x_1. Atunci $A_{21}B_{12}y_2 = y'_2$, ceea ce contravine condiţiei.

În mod analog, presupunînd $X'_2 = 0$ obţinem că nu se poate adăuga nici un operator la familia $\mathfrak{B}_{12}$. Astfel, categoria considerată $\mathfrak{E}$ de tip $\mathfrak{C}_2$ este maximală, în ipoteza că $X'_1 \neq 0$ şi $X_2 \neq 0$.

12.34. Cazurile de degenerare trebuie considerate separat. Fie de exemplu $X'_1 = 0$, deci $\mathfrak{B}_{12}$ constă numai din operatorul nul. Dacă acum $X'_2 \neq X_2$, atunci categoria nu este maximală şi în familia $\mathfrak{B}_{21}$ se pot adăuga fără a distruge condiţia $\mathfrak{B}_j = (\lambda\mathfrak{S})$ toţi operatorii care acţionează din X_1 în X_2. Aşadar, se obţine o categorie maximală „trivială" unde $\mathfrak{B}_{12} = (0)$ iar $\mathfrak{B}_{21}$ este un sistem complet de operatori acţionînd de la $\mathfrak{B}_1$ în $\mathfrak{B}_2$. O categorie maximală similară se obţine cu $\mathfrak{B}_{21} = (0)$ şi $\mathfrak{B}_{12}$ sistem complet. Are deci loc rezultatul: o categorie de tip $\mathfrak{C}_2$ este maximală în condiţiile: 1) $X'_1 \neq 0$, $X'_2 \neq 0$; 2) $X'_1 = 0$, $X'_2 = X_2$; 3) $X'_1 = X_1$, $X'_2 = 0$.

12.35. Trecem acum la cazul general al categoriilor formate din orice număr $N \leqslant \infty$ de spaţii $\{X_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{U}$. Are loc o afirmaţie similară alternativei demonstrate în 12.32.

Alternativa. *Dacă* $\mathfrak{B}_1 = \ldots = \mathfrak{B}_k = (\lambda\mathfrak{E})$, *atunci sau produsul* $\mathfrak{B}_{1k}\mathfrak{B}_{k,\,k-1}\ldots\mathfrak{B}_{32}\mathfrak{B}_{21} = 0$, *sau spațiile* $X_1, \ldots, X_k$ *au aceeași dimensiune* și $\mathfrak{B}_{ij} = \{\lambda A_{ij}\}$, *unde* A_{ij} *este un operator inversabil fixat, iar* $A_{1k}\,A_{k,\,k-1}\ldots A_{32}A_{21} = \mathfrak{E}$.

Demonstrație. Admitem că produsul $\mathfrak{B}_{1k}\mathfrak{B}_{k,\,k-1}\ldots\mathfrak{B}_{21}$ conține un operator nenul egal deci cu un $\lambda\mathfrak{E}$, $\lambda \neq 0$. Presupunem că dimensiunea spațiului X_j este egală cu r_j; atunci matricile $A_{1k} \in \mathfrak{B}_{1k}$ ..., $A_{21} \in \mathfrak{B}_{21}$, al căror produs este $\lambda\mathfrak{E}$, au dimensiunile

$$r_1 \times r_k,\ r_k \times r_{k-1},\ \ldots,\ r_3 \times r_2,\ r_2 \times r_1.$$

Considerăm produsul de matrici $A_{1k}A_{k,\,k-1}\ldots A_{32}$. Această matrice avînd dimensiunile $r_1 \times r_2$ acționează așadar de la X_2 la X_1. Considerăm categoria $\mathfrak{C}_0$ formată din două spații X_1, X_2 unde colecțiile de operatori $\mathfrak{B}^0_{12}$ și $\mathfrak{B}^0_{21}$ sînt următoarele:

$$\mathfrak{B}^0_{21} = \mathfrak{B}_{21},\ \mathfrak{B}^0_{12} = \mathfrak{B}_{1k}\mathfrak{B}_{k,\,k-1}\ldots\mathfrak{B}_{32}$$

($\mathfrak{B}^0_{12}$ este acoperirea liniară a produselor corespunzătoare). Deoarece

$$A_{1k}A_{k,\,k-1}\ldots A_{21} = \lambda\mathfrak{E},$$

atunci conform celor demonstrate, X_1 și X_2 au aceeași dimensiune $r_1 = r_2$, $\mathfrak{B}^0_{21} = \mathfrak{B}_{21} = (\lambda A^0_{21})$, unde A^0_{21} este matrice inversabilă; $\mathfrak{B}^0_{12} = (\mu A^{0-1}_{21})$.

Mai departe, avem

$$A^{0-1}_{21}A_{1k}A_{k,\,k-1}\ldots A_{32} = \lambda\mathfrak{E},$$

și raționînd ca mai sus, obținem $r_2 = r_3$, $\mathfrak{B}_{32} = \lambda A^0_{32}$, unde A^0_{32} este o matrice inversabilă. După k pași ajungem la afirmația făcută.

12.36. În continuare, considerînd o categorie formată din N spații, putem presupune că toate produsele ciclice $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}\mathfrak{B}_{\beta\gamma}\ldots\mathfrak{B}_{\delta\alpha}$ sînt egale cu zero; în caz contrar identificăm subspațiile corespunzătoare de aceeași dimensiune.

Considerăm pentru început următoarea categorie concretă, pe care o notăm cu $\mathfrak{C}^N_2$. Alegem arbitrar în X_1, $N-1$ subspații pe care le notăm $X_{12}, \ldots, X_{1N}$. Pentru $j, k, l, \ldots$ distincți doi cîte doi punem

$$X_{1jk} = X_{1j} \cap X_{1k},\quad X_{1jkl} = X_{1j} \cap X_{1k} \cap X_{1l} \text{ etc.},$$

formînd succesiv intersecțiile spațiului X_{1j} cu două, cu trei subspații etc. Dacă N este finit, ultima intersecție va fi

$X_{12\ldots N}$, adică intersecția tuturor celor $N-1$ subspații, iar dacă N este infinit, nu există o ultimă intersecție. Facem aceeași construcție în toate celelalte spații X_2, ... unde indicele întregului spațiu va fi primul indice în notarea tuturor subspațiilor lui. Fiecărui sistem de indici doi cîte doi distincți $j, \ldots, k$ îi corespunde în mod univoc unul din subspațiile evidențiate. Construim familia $\mathfrak{B}_{21}$. Prin definiție ea constă din toți operatorii care transformă X_1 în X_2 astfel încît fiecare din subspațiile $X_{1j\ldots k}$ trece în $X_{21j\ldots k}$ dacă în șirul $j, \ldots, k$ nu există indicele 2, sau în (0) dacă în acest șir există indicele 2. În mod analog construim toate colecțiile $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$.

Arătăm că se obține astfel o categorie.

Fie operatorii $A_{21} \in \mathfrak{B}_{21}$ și $B_{32} \in \mathfrak{B}_{32}$ și operatorul $B_{32}A_{21}$. El transformă spațiul X_1 în X_3. Un subspațiu $X_{1j\ldots k}$ este transformat de operatorul A_{21} în $X_{21j\ldots k}$ iar subspațiul obținut este transformat de operatorul B_{32} în $X_{321j\ldots k} \subset X_{31j\ldots k}$. Așadar, operatorul $B_{32}A_{21}$ este conținut în $\mathfrak{B}_{31}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Dacă avem un lanț de operatori $A_{1j} \ldots A_{kl}$ care transformă spațiul X_1 în el însuși, atunci operatorul care se obține transformă X_1 în $X_{1j\ldots k1} = 0$, ceea ce este compatibil cu condiția $\mathfrak{B}_1 = (\lambda\mathfrak{E})$.

12.37. Arătăm acum că *orice categorie din* $N(\leqslant \infty)$ *spații* $X_1, \ldots$ cu $\mathfrak{B}_j = (\lambda\mathfrak{E})$ *este conținută într-o anumită categorie de tipul* $\mathfrak{C}^N_2$. Notăm prin X_{jk} imaginea completă a spațiului X_k în spațiul X_j sub acțiunea tuturor operatorilor B_{jk} și mai departe, notăm cu $X_{jkl\ldots sm}$ imaginea completă în spațiul X_j a spațiului X_m sub acțiunea tuturor operatorilor de forma $A_{jk}A_{kl}\ldots A_{sm}$ (ordinea indicilor este esențială !). Arătăm că $X_{jkl\ldots sm}$ este conținut în intersecția lui X_{jk}, X_{jl}, ..., X_{jm}. Într-adevăr, dacă $z \in X_{jkl\ldots sm}$, atunci

$$z \in \sum_\alpha A^\alpha_{jk}A^\alpha_{kl}\ldots A^\alpha_{pq}\ldots A^\alpha_{sm}z^\alpha_m,$$

unde $z^\alpha_m \in X_m$, sau

$$z = \sum_\alpha A^\alpha_{jk}\ldots A^\alpha_{pq}y^\alpha_q,$$

unde $y^\alpha_q = \sum_\alpha \ldots A^\alpha_{sm}z^\alpha_m \in X_q$, și deoarece $A^\alpha_{jk}\ldots A^\alpha_{pq} \in \mathfrak{B}_{jq}$, atunci $z \in X_{jq}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Notăm apoi că A_{ij} transformă $X_{j\ldots m}$ în $X_{ij\ldots m}$. Acum este clar de ce categoria considerată este conținută într-o categorie de tipul $\mathfrak{C}_2^N$ a subspațiilor X_{jk} determinate; în particular, toate categoriile maximale trebuie să aibă tipul $\mathfrak{C}_2^N$. Nu este însă clar în ce condiții asupra subspațiilor X_{jk} o categorie de tip $\mathfrak{C}_2^N$ este maximală. (Amintim că în cazul a două spații X_1 și X_2 condițiile necesare și suficiente de maximalitate a categoriei $\mathfrak{C}_2$ constau în aceea că spațiile X_{12} și X_{21} sînt sau ambele nenule sau unul este nul iar celălalt este tot spațiul).

§ 12.4. Toate algebrele date $\mathfrak{B}_\alpha$ sînt simple

În acest caz fiecare algebră $\mathfrak{B}_\alpha$ se scrie într-o anumită bază prin matrici de forma

$$\left\| \begin{matrix} C & & & \\ & C & & \\ & & \ddots & \\ & & & C \end{matrix} \right\|, \tag{2}$$

unde C este una și aceeași matrice de dimensiune fixată r_α, unde în toate $\mathfrak{B}_\alpha$ ea parcurge întreaga colecție a matricilor pătratice cu r_α linii și coloane (11.86).

12.41. Considerăm la început o categorie $\mathfrak{C}$ formată din două spații X_1 și X_2 de dimensiune n_1 și n_2 cu dimensiunile celulelor m_1 și m_2 și numărul lor k_1 și k_2 (astfel încît $n_1 = k_1 m_1$, $n_2 = k_2 m_2$). Matricea $\mathbf{A}_{21}$ a categoriei $\mathfrak{C}$ poate fi descompusă în blocuri în modul următor

$$\mathbf{A}_{21} = \left.\begin{array}{r} m_2\left\{\right. \\ \\ \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k_1} \end{array}}^{m_1} \\ \hline \begin{array}{c|c} A_{21} & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline \begin{array}{c|c|c} A_{k_21} & \ldots\ldots\ldots & A_{k_2k_1} \end{array} \end{array} \right\| \right\} n_2.$$

În mod analog se poate reprezenta matricea $\mathbf{B}_{12}$:

$$\mathbf{B}_{12} = \left.\begin{array}{r} m_1\left\{\right. \\ \\ \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1k_2} \end{array}}^{m_2} \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline \begin{array}{c|c|c} B_{k_11} & \ldots\ldots\ldots & B_{k_1k_2} \end{array} \end{array} \right\| \right\} n_1.$$

Afirmăm următorul fapt: *sau* $\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} = 0$ (*pentru orice* $\mathbf{A}_{21} \in \mathfrak{B}_{21}$ *și* $\mathbf{B}_{12} \in \mathfrak{B}_{12}$), *sau* $k_1 = k_2$ *și toate matricile* A_{jk} *sînt multiplii unei matrici oarecare fixate* A *și la fel, matricile* B_{ij} *sînt multiplii unei matrici oarecare fixate* B; *aici coeficienții multiplilor respectivi formează matrici inverse una alteia de ordine* $k_1 = k_2$.

Vom nota în continuare o categorie de al doilea tip prin $\mathfrak{C}_3$.

Pentru demonstrație, notăm că în categoria $\mathfrak{C}$, odată cu matricile $\mathbf{A}_{21}$ și $\mathbf{B}_{12}$ sînt cuprinse produsele lor (de partea corespunzătoare) cu matrici C_1 și C_2 de forma (2); de aceea, odată cu egalitatea $\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} = C_2$, are loc și egalitatea $\mathbf{A}_{21}C_1\mathbf{B}_{12} = C_2$, cu C_1 matrice oarecare de forma (2). Aplicînd regula de înmulțire a matricilor bloc (4.51), putem scrie egalitățile (în blocuri):

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}CB_{11} + A_{12}CB_{21} + \ldots + A_{1k_1}CB_{k_11} = \\ = A_{21}CB_{12} + A_{22}CB_{22} + \ldots + A_{2k_1}CB_{k_12} = \\ = A_{k_21}CB_{1k_2} + A_{k_22}CB_{2k_2} + \ldots + A_{k_2k_1}CB_{k_1k_2}, \\ A_{11}CB_{12} + A_{12}CB_{22} + \ldots + A_{1k_1}CB_{k_12} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{3}$$

Alegem în locul matricii C matricea avînd unicul element nenul (egal cu 1) situat pe linia r și coloana s ($r \leqslant m_1$, $s \leqslant m_1$). În general, dacă A este orice $m_2 \times m_1$-matrice și B orice $m_1 \times m_2$-matrice, atunci produsul ACB este o $m_2 \times m_2$-matrice de rangul întîi, unde la intersecția liniei p cu coloana q

se află elementul $a_{pr}b_{sq}$. De aceea egalitățile (3) pot fi scrise sub forma

$$\left.\begin{aligned} &a_{pr}^{11}b_{sq}^{11} + a_{pr}^{12}b_{sq}^{21} + \ldots + a_{pr}^{1k_1}b_{sq}^{k_1 1} = \\ &= a_{pr}^{21}b_{sq}^{12} + a_{pr}^{22}b_{sq}^{22} + \ldots + a_{pr}^{2k_1}b_{sq}^{k_1 2} = \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= a_{pr}^{k_2 1}b_{sq}^{1k_2} + a_{pr}^{k_2 2}b_{sq}^{2k_2} + \ldots + a_{pr}^{k_2 k_1}b_{sq}^{k_1 k_2}, \\ &= a_{pr}^{11}b_{sq}^{12} + a_{pr}^{12}b_{sq}^{22} + \ldots + a_{pr}^{1k_1}b_{sq}^{k_1 2} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

unde indicii de sus reprezintă numerele matricilor corespunzătoare.

Egalitățile (4) pot fi scrise sub formă de egalitate matricială astfel

$$\widetilde{A}_{pr}\widetilde{B}_{sq} = \left\| \begin{matrix} a_{pr}^{11} & a_{pr}^{12} & \ldots & a_{pr}^{1k_1} \\ a_{pr}^{21} & a_{pr}^{22} & \ldots & a_{pr}^{2k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{pr}^{k_2 1} & a_{pr}^{k_2 2} & \ldots & a_{pr}^{k_2 k_1} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} b_{sq}^{11} & b_{sq}^{12} & \ldots & b_{sq}^{1k_2} \\ b_{sq}^{21} & b_{sq}^{22} & \ldots & b_{sq}^{2k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{sq}^{k_1 1} & b_{sq}^{k_1 2} & \ldots & b_{sq}^{k_1 k_2} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \overbrace{\lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda}^{k_2} \end{matrix} \right\} k_2.$$

În mod analog are loc și egalitatea

$$\widetilde{B}_{sq}\widetilde{A}_{pr} = \left\| \begin{matrix} b_{sq}^{11} & b_{sq}^{12} & \ldots & b_{sq}^{1k_2} \\ b_{sq}^{21} & b_{sq}^{22} & \ldots & b_{sq}^{2k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{sq}^{k_1 1} & b_{sq}^{k_1 2} & \ldots & b_{sq}^{k_1 k_2} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_{pr}^{11} & a_{pr}^{12} & \ldots & a_{pr}^{1k_1} \\ a_{pr}^{21} & a_{pr}^{22} & \ldots & a_{pr}^{2k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{pr}^{k_1 1} & a_{pr}^{k_1 2} & \ldots & a_{pr}^{k_1 k_1} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \overbrace{\mu & & & & \\ & \mu & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \mu}^{k_1} \end{matrix} \right\} k_1.$$

Vedem că matricile $\widetilde{A}_{pr}$ și $\widetilde{B}_{sq}$ (p, r, s, q fiind parametri ai acestor matrici) formează o categorie legînd un spațiu E_1 de dimensiune k_1 de un spațiu E_2 avînd dimensiunea k_2, cu condițiile $R_1 = (\lambda Y)$, $R_2 = (\mu Y)$. Putem acum aplica alternativa stabilită în 12.32. Anume, dacă $k_1 \neq k_2$, atunci întotdeauna $\lambda = 0$, $\mu = 0$; dacă admitem că pentru un sistem de indici p, q, r, s se obține $\lambda \neq 0$ (sau $\mu \neq 0$), atunci $k_1 = k_2$ și toate matricile $\widetilde{A}_{pr}$ se reprezintă prin multiplii ai unei matrici inversabile și toate matricile $\widetilde{B}_{sq}$ sînt multipli ai matricii inverse.

$$\widetilde{A}_{pr} = \lambda_{pr}\widetilde{A}, \quad \widetilde{B}_{sq} = \mu_{sq}\widetilde{B}.$$

Matricea $\widetilde{A}_{pr}$ constă din elementele matricii A_{ij} care se află la intersecția liniei p cu coloana q. Evident are loc relația

$$a_{pr}^{ij} = \lambda\widetilde{a}^{ij},$$

unde $\widetilde{a}^{ij}$ sînt elementele matricii $\widetilde{A}$. Ajungem atunci la faptul că *toate matricile A_{ij} sînt multipli ai unei matrici fixate $A = \| \lambda_{pr} \|$ cu coeficienții a^{ij}*. O formă analoagă au matricile B_{ij}, ceea ce completează demonstrația afirmației făcute.

12.42. Așadar, dacă $\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} \neq 0$, atunci $k_1 = k_2$ și categoria $\mathfrak{C}$ are forma

$$\mathbf{A}_{21} = \left\| \begin{matrix} \widetilde{a}^{11}\Lambda & \widetilde{a}^{12}\Lambda & \ldots & \widetilde{a}^{1k_1}\Lambda \\ \widetilde{a}^{21}\Lambda & \ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots & & & \\ \widetilde{a}^{k_1 1}\Lambda & & & \widetilde{a}^{k_1 k_2}\Lambda \end{matrix} \right\|,$$

$$\mathbf{B}_{12} = \left\| \begin{matrix} \widetilde{b}^{11}M & \widetilde{b}^{12}M & \ldots & \widetilde{b}^{1k_1}M \\ \widetilde{b}^{21}M & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & & & \\ \widetilde{b}^{k_1 1}M & \ldots & \ldots & \widetilde{b}^{k_1 k_1}M \end{matrix} \right\|.$$

Matricile $\Lambda = \| \lambda_{pq} \|$ și M sînt dreptunghiulare ($1 \leq p \leq m_2$, $1 \leq q \leq m_1$). Printre matricile Λ care participă în categoria considerată există o matrice nenulă Λ_0 (deoarece $\mathfrak{B}_{21}\mathfrak{B}_{12} \neq 0$) și de aceea printre ele se află orice $m_2 \times m_1$-matrice, deoarece dintr-o matrice nenulă, prin înmulțire

la dreapta cu C_2 și la stînga cu C_1 se poate obține orice astfel de matrice. Astfel, dacă $\mathfrak{B}_{21}\mathfrak{B}_{12} = 0$, atunci familia R_{21} constă din matrici de forma

$$\left\| \begin{array}{ccc} \overline{|\widetilde{a}^{11}\Lambda|} & \dots & \overline{|\widetilde{a}^{1k_1}\Lambda|} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ \overline{|\widetilde{a}^{k_1 1}\Lambda|} & \dots & \overline{|\widetilde{a}^{k_1 k_1}\Lambda|} \end{array} \right\|, \tag{5}$$

unde $\widetilde{A} = \| \widetilde{a}^{ij} \|$ este o matrice inversabilă fixată iar Λ parcurge întreaga familie a $m_2 \times m_1$-matricilor.

Un tablou general similar va avea loc dacă $\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{21} \neq 0$. Este clar în acest moment că neegalitățile $\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{21} \neq 0$ și $\mathfrak{B}_{21}\mathfrak{B}_{12} \neq 0$ au loc simultan.

12.43. Rezultatul obținut poate fi formulat în termeni de produse tensoriale. Acest punct de vedere permite totodată clarificarea unor situații complementare. Mai întîi sînt necesare cîteva pregătiri.

Fixăm un spațiu k-dimensional X și o bază $e_1, \dots, e_k$ și încă un spațiu m-dimensional Y cu baza $f_1, \dots, f_m$. *Produsul tensorial* $X \times Y = Z$ al spațiilor X și Y este mulțimea tuturor sumelor formale finite de forma

$$\sum_{n=1}^{p} x_n \times y_n,$$

unde $x_n \in X$, $y_n \in Y$; se presupune de asemenea că

$$[x_1 \times y] + [x_2 \times y] = [(x_1 + x_2) \times y],$$

$$[x \times y_1] + [x \times y_2] = [x \times (y_1 + y_2)].$$

$$\sum_{n=1}^{p} \lambda_n x_n \times y_n = \sum_{n=1}^{p} x_n \times \lambda_n y_n = \sum_{n=1}^{p} \lambda_n [x_n \times y_n].$$

De aici rezultă că $X \times Y$ este un spațiu vectorial de dimensiune km, avînd o bază formată din vectorii $e_i \times f_j$ ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, m$).

Așadar, vectorii spațiului Z sînt de forma

$$g = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} [e_i \times f_j];$$

Putem transforma această reprezentare, făcînd mai întîi însumarea după i; se obține atunci $g = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{k} c_{ij} e_i \times f_j \right] = \sum_{j=1}^{m} x_j \times f_j$, unde $x_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ij} e_i$ sînt vectori oarecare (nu neapărat din bază) ai spațiului X.

12.44. Presupunem fixați un operator $\mathfrak{A}$ acționînd de la un spațiu X_1 la un spațiu X_2 și un operator $\mathfrak{B}$ acționînd de la un spațiu Y_1 la un spațiu Y_2. Definim produsul tensorial $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ ca operatorul acționînd de la spațiul $Z_1 = X_1 \times Y_1$ la spațiul $Z_2 = X_2 \times Y_2$ după formula următoare (în care indicele suplimentar este numărul spațiului)

$$\mathfrak{C} [e_i^1 \times f_j^1] = \mathfrak{A} e_j^1 \times \mathfrak{B} f_j^1. \tag{6}$$

Dacă $\mathfrak{A} e_i^1 = \sum a_{i\lambda} e_\lambda^2$ și $\mathfrak{B} f_j^1 = \sum b_{j\mu} f_\mu^2$, atunci formula (6) se scrie sub forma

$$\mathfrak{C} [e_i^1 \times f_j^1] = \sum_{\lambda=1}^{k_2} \sum_{\mu=1}^{m_2} a_{i\lambda} b_{j\mu} [e_\lambda^2 \times f_\mu^2].$$

Clarificăm acum structura matricii operatorului $\mathfrak{C}$ relativ la bazele $e_i^1 \times f_j^1$ și $e_k^2 \times f_l^2$ ordonate în $X_1 \times Y_1$ în modul următor

$$e_1^1 \times f_1^1;\ e_2^1 \times f_1^1, \dots, e_{k_1}^1 \times f_1^1;\ e_1^1 \times f_2^1, e_2^1 \times f_2^1, \dots, e_{k_1}^1 \times$$

$$\times f_2^1, \dots e_1^1 \times f_{m_1}^1, e_2^1 \times f_{m_1}^1, \dots, e_{k_1}^1 \times f_{m_1}^1,$$

și analog în spațiul $X_2 \times Y_2$. Conform 12.13 matricea C are forma

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & \dots & a_{1k_2}b_{11} & \dots & a_{11}b_{1m_2} & a_{12}b_{1m_2} & \dots & a_{1k_2}b_{1m_2} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & \dots & a_{2k_2}b_{11} & \dots & a_{21}b_{1m_2} & a_{22}b_{1m_2} & \dots & a_{2k_2}b_{1m_2} \\ \dots\dots & & & & & & & & \\ a_{k_1 1}b_{11} & a_{k_1 2}b_{11} & \dots & a_{k_1 k_2}b_{11} & \dots & a_{k_1 1}b_{1m_2} & a_{k_1 2}b_{1m_2} & \dots & a_{k_1 k_2}b_{1m_2} \\ \dots\dots & & & & & & & & \\ a_{11}b_{m_1 1} & a_{12}b_{m_1 1} & \dots & a_{1k_2}b_{m_1 1} & \dots & a_{11}b_{m_1 m_2} & a_{12}b_{m_1 m_2} & \dots & a_{k_2 k_2}b_{m_1 m_2} \\ \dots\dots & & & & & & & & \\ a_{k_1 1}b_{m_1 1} & a_{k_1 2}b_{m_1 1} & \dots & a_{k_1 k_2}b_{m_1 1} & \dots & a_{k_1 1}b_{m_1 m_2} & a_{k_1 2}b_{m_1 m_2} & \dots & a_{k_1 k_2}b_{m_1 m_2} \end{array} \right\|$$

sau folosind scrierea-bloc

$$C = \left\| \begin{matrix} Ab_{11} & \dots & Ab_{1m_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ Ab_{m_1 1} & & Ab_{m_1 m_2} \end{matrix} \right\|.$$

12.45. Aplicînd 12.44 și 12.41, se observă că operatorii algebrei $\mathfrak{B}_1$ considerată mai sus sînt operatori în produsul tensorial al spațiului m_1-dimensional X_1 cu spațiul k_1-dimensional Y_1 care sînt produsele tensoriale ale oricărui operator $\mathcal{C} \in \mathfrak{B}(X_1)$ cu operatorul identic $\mathcal{E} \in \mathfrak{B}(Y_1)$.

Operatorii sistemului $\mathfrak{B}_{21}$ considerat mai sus sînt produsele tensoriale ale oricăror operatori $A_{21} \in \mathfrak{B}(X_2, X_1)$ cu un operator inversabil fixat $A_{21} \in \mathfrak{B}(Y_2, Y_1)$ și în mod similar, operatorii sistemului $\mathfrak{B}_{12}$ sînt produsele tensoriale ale oricăror operatori $M_{12} \in \mathfrak{B}(X_1, X_2)$ prin $\mathcal{A}^{-1}$.

12.46. Pentru produsele tensoriale de operatori are loc în mod evident următoarea formulă

$$(\mathcal{A} \times \mathfrak{B})\,(\mathcal{C} \times \mathfrak{D}) = (\mathcal{A}\mathcal{C}) \times (\mathfrak{B}\mathfrak{D}).$$

De aceea, înmulțind operatori din categoriile $\mathcal{A}_{21}$ și $\mathfrak{B}_{12}$, obținem în particular

$$(\Lambda \times \widetilde{\mathcal{A}})\,(M \times \widetilde{\mathcal{A}^{-1}}) = (\Lambda M) \times (\widetilde{\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}}) = (\Lambda M) \times \mathcal{E} \in \mathfrak{B}_1,$$

de unde rezultă îndeplinirea proprietăților unei categorii.

12.47. Căutăm spațiile invariante ale algebrei operatorilor $\mathfrak{B} = \{\mathcal{C} \times \mathfrak{E}\}$ acționînd în spațiul $Z = X \times Y$. Un astfel de subspațiu invariant este produsul tensorial $X \times Y_0$, unde $Y_0 \subset Y$ este orice subspațiu, deoarece

$$(\mathcal{C} \times \mathfrak{E})\,(X \times Y_0) = \mathcal{C}X \times \mathfrak{E}Y_0 (X \times Y_0),$$

Arătăm că nu există alte subspații invariante în spațiul Z. Într-adevăr, fie $z = \sum x_j \times y_i$ orice vector din spațiul Z. Se poate presupune că vectorii x_j sînt liniar independenți. Considerăm operatorul $\mathcal{C}$ care transformă vectorii x_j în vectori dați $\bar{x}_j \in X$. Atunci

$$(\mathcal{C} \times \mathfrak{E}) \sum x_j \times y_i = \sum \bar{x}_j \times y_j.$$

Astfel, în orice subspațiu invariant relativ la toți operatorii $\mathcal{C} \times \mathfrak{E}$, odată cu orice vector $\sum x_j \times y_j$ este conținut orice vector $\sum \bar{x}_j \times y_j$, de unde rezultă afirmația făcută.

Dacă aplicăm subspațiului invariant $X_1 \times Y_{10}$ în $Z = X_1 \times Y_1$ un operator din categoria $\Lambda \times \widetilde{\mathcal{A}}$, atunci cum matricea Λ este arbitrară, rezultă ca imagine în spațiul $Z_2 = X_2 \times Y_2$, subspațiul $\Lambda X_1 \times \mathcal{A} Y_{10} = X_2 \times Y_{20}$. Astfel, *operatorii din categorie stabilesc o corespondență biunivocă între subspațiile invariante din spațiile Z_1 și Z_2 și simultan între subspațiile uzuale ale spațiilor Y_1 și Y_2.*

12.48. Tot ce s-a spus rămîne adevărat în cazul cînd $\mathfrak{B}_{21}\mathfrak{B}_{12} \neq 0$ (sau echivalent, pentru $\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{21} \neq 0$). Dacă $\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{21} = \mathfrak{B}_{21}\mathfrak{B}_{12} = 0$, atunci schema expusă nu funcționează și în general matricea categoriei nu constă din blocuri multipli ai unei matrici fixate Λ. Ne găsim în condițiile 12.32 și putem aplica rezultatul corespunzător: *categoria este o parte a unei categorii de tipul $\mathfrak{C}_2$.* În continuare vom preciza acest fapt.

12.49. Trecem la cazul unei categorii formată din orice număr de spații X_α cu algebrele $\mathfrak{B}_\alpha$ de tipul considerat. Numim două spații Z_1 și Z_2 *înrudite* dacă $\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{21} \neq 0$; așadar, matricile $\mathfrak{B}_{12}$ au forma (5). Este clar că relația de înrudire este reflexivă, simetrică îi transitivă; dacă Z_1 este înrudit cu Z_2 și Z_2 este înrudit cu Z_3, atunci la fel este Z_1 cu Z_3, deoarece matricea Λ fiind arbitrară, în produsul $\mathfrak{B}_{32}\mathfrak{B}_{21}$ există matrici nenule.

De aceea întreaga colecție a spațiilor X_α poate fi descompusă în clase disjuncte de spații înrudite două cîte două. Dacă X_1 și X_2 aparțin la clase distincte, atunci $\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{B}_{21} = \mathfrak{B}_{21}\mathfrak{B}_{12}, = 0$.

În acest moment putem repeta, cu unele modificări, schema 12.36. Admitem că spațiile considerate sînt descompuse în clase $G_1, \dots, G_r, \dots$ de spații înrudite două cîte două. Spațiile care intră în clasa G_r au forma $X_{rj} \times Y_r$ unde Y_r este de fapt un spațiu în care acționează operatori inversabili. Considerăm numai spațiile Y_r și construim cu ajutorul lor categoria $\mathfrak{C}_2^N$ așa cum s-a arătat în 12.36, astfel încît să fie îndeplinită condiția $\mathfrak{B}_{is}\mathfrak{B}_{si} = 0$ (alegem arbitrar subspațiile $Y_{r\nu}$ și construim intersecțiile $Y_{r\nu\mu}$, $Y_{r\nu\mu_\tau}$, ...). Această categorie este formată din operatorii A_{is} care aplică Y_s în $Y\Delta_i$

și care transformă subspațiile $Y_{s\nu\mu}, \ldots \subset Y_s$ în subspațiile $Y_{is\nu\mu}, \ldots \subset Y_i$. Categoria pe care o notăm cu $\mathfrak{C}_4^N$ pentru spațiile Z_j se construiește astfel: dacă Z_j și Z_k sînt înrudite, atunci operatorii $A_{jk} \in \mathfrak{B}_{jk}$ sînt descriși mai sus; dacă $Z_j = X_j \times Y_j$ și $Z_k = X_k \times Y_k$ aparțin la clase distincte, atunci operatorii A_{jk} sînt operatori care transformă Z_k în Z_j și totodată subspațiul invariant $X_k \times Y_{k\nu\mu} \ldots$ în subspațiul invariant $X_j \times Y_{jh\nu\mu} \ldots$

Arătăm că orice categorie $\mathfrak{C}$ cu inele simple $\mathfrak{B}_j$ este conținută într-o categorie de tip $\mathfrak{C}_4^N$. Presupunem că $Z_k = X_k \times Y_k$ și $Z_j = X_j \times Y_j$ aparțin la clase distincte de spații înrudite. Fie Z_{jk} imaginea completă a spațiului Z_k în spațiul Z_j sub acțiunea tuturor operatorilor familiei $\mathfrak{B}_{jk}$. Evident, Z_{jk} este subspațiu invariant în Z_j, deci are forma $X_j \times Y_{jk}$, unde Y_{jk} este un anumit subspațiu în Y_j. Notăm prin $Z_{jkl \ldots sm}$ imaginea completă în Z_j a spațiului Z_m sub acțiunea tuturor operatorilor de forma $A_{jk}A_{kl} \ldots A_{sm}$. Acesta este de asemenea un subspațiu invariant și se arată ușor, ca în 12.36, că el este conținut în intersecțiile $Z_{jk}, \ldots, Z_{jm}$. Așadar, categoria considerată este o parte a unei categorii de forma $\mathfrak{C}_4^N$, ceea ce am afirmat anterior.

§ 12.5. Toate algebrele date $\mathfrak{B}_\alpha$ sînt algebre complete de matrici diagonale

În acest caz în fiecare din spațiile considerate X_α se evidențiază cîte o bază fixată, relativ la care toate matricile operatorilor $A_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha$ sînt diagonale. Cu ajutorul unor astfel de baze, operatorii $A_{\beta\alpha} \in \mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ se reprezintă prin matrici (în general dreptunghiulare) și problema pusă inițial poate fi formulată ca o problemă de teoria matricilor.

12.51. Considerăm mai întîi o categorie $\mathfrak{C}$ formată din două spații X_1 și X_2. Fie orice operator $A_{12} \in \mathfrak{B}_{12}$; conform definiției categoriei, produsul

$$B_{12} = A_1 A_{12} B_2 \tag{7}$$

aparține de asemenea lui $\mathfrak{B}_{12}$, dacă A_1 și B_2 sînt matrici diagonale corespunzătoare.

Alegem drept A_1 matricea cu unicul element nenul, egal cu 1, aflat la intersecția liniei j și coloanei j, iar drept B_2 matricea cu unicul element nenul 1 situat la intersecția liniei k și coloanei k. Atunci conform 12.14 în matricea B_{12} va fi nenul cel mult elementul situat pe linia j și coloana k și acest element este tocmai a_{jk} din matricea A_{12}. Astfel, operația (7) înlocuiește în matricea A_{12} toate elementele prin zero, cu excepția elementului a_{jk} pe care îl lasă neschimbat.

De aici rezultă următorul fapt relativ la structura sistemului $\mathfrak{B}_{12}$: *sistemul $\mathfrak{B}_{12}$ reprezintă colecția tuturor matricilor ale căror elemente de pe o mulțime fixată de locuri sînt arbitrare, în timp ce toate celelalte elemente sînt egale cu zero.*

12.52. Vom nota în matricile sistemului $\mathfrak{B}_{12}$ o mulțime fixată de locuri, pe care se distribuie orice elemente, prin S_{12}.

Vom clarifica mai întîi modul cum sînt legate mulțimile S_{12} și S_{21}. Alegem o matrice $A_{12} \in \mathfrak{B}_{12}$ cu unicul element nenul, egal cu 1, situat la intersecția liniei j_1 cu coloana k_1 $(j_1, k_1) \in S_{12}$ și orice matrice $B_{21} \in \mathfrak{B}_{21}$ cu toate elementele eventual nenule pe locurile S_{21}. Produsele $C_1 = A_{12}B_{21}$ și $D_2 = B_{21}A_{12}$ vor fi atunci matrici diagonale. Pe de altă parte, conform 12.13 rezultă: în C_1 toate liniile sînt egale cu 0 în afară de linia j_1, iar în linia j_1 se află elementele liniei k_1 a matricii B_{21}. Deoarece trebuie să se obțină o matrice diagonală, rezultă că în linia k_1 a matricii B_{21} toate elementele cu excepția celor de pe coloana j_1 sînt nule. În D_2 toate coloanele sînt nule în afară de coloana k_1, iar în coloana k_1 se află elementele coloanei j_1 a matricii A_{12}; pe lîngă aceasta, deoarece trebuie să se obțină o matrice diagonală, atunci în coloana j_1 a matricii A_{12} toate elementele sînt egale cu 0 în afara celui de pe linia k. Astfel, *dacă* $(j_1, k_1) \in S_{12}$, *atunci în matricile clasei* $\mathfrak{B}_{12}$ *toate elementele coloanei* j_1 *și liniei* k_1, *în afara intersecției acestora, sînt egale cu* 0. Aceasta este suficient pentru ca din cunoașteream ultimii S_{12} să se poată preciza structura mulțimii S_{21}. Intervertind liniile cu coloanele pentru matricile din $\mathfrak{B}_{12}$ (ceea ce revine la o permutare a elementelor în bazele spațiilor X_1, X_2), reușim ca de la început să intre liniile și coloanele în care nu există reprezentanți ai mulțimii S_{12}; apoi liniile și coloanele în care se află cîte un

reprezentant al acestei mulțimi și, în fine, liniile și coloanele în care sînt cel puțin doi reprezentanți ai mulțimii:

$$A_{12} \sim \begin{array}{c|ccc|} & 1 & \nu & \delta & s \\ 1 & 0\ \ldots & 0\ \ldots & 0\ \ldots & \\ & 0\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ \alpha & & & & \\ & 0\ \ldots & 1\ \ldots & 0\ \ldots & \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ & 0\ \ldots & \ldots\ 1 & 0\ \ldots & \\ \beta & & & & \\ & 0\ \ldots & \ldots\ldots & 1\ 1\ldots & \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & 1\ \ldots & \\ m & 0\ \ldots & 0\ \ldots & 1\ \ldots & \end{array} . \qquad (8)$$

Pe această schemă locurile ocupate de mulțimea S_{12} sînt marcate cu unități iar celelalte cu zerouri.

Construim acum matricea $B_{21} \in \mathfrak{B}_{21}$, care are n linii și m coloane:

$$B_{21} \sim \begin{array}{c|ccc|} & 1 & \alpha & \beta & m \\ 1 & \ldots\ldots & 0\ \ldots & 0\ \ldots & \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ \nu & & & & \\ & 0\ \ldots & 1\ \ldots & 0\ \ldots & \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ & 0\ \ldots & \ldots\ 1 & 0\ \ldots & \\ \delta & & & & \\ & 0\ \ldots & \ldots\ldots & 0\ \ldots & \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ n & 0\ \ldots & 0\ \ldots & 0\ \ldots & \end{array} . \qquad (9)$$

Deoarece în matricea A_{12} la intersecția unei linii $\alpha + 1$ cu coloana $\nu + 1$ se află 1, în matricea B_{21} la intersecția coloanei $\alpha + 1$ cu linia $\nu + 1$ se află 1 și, în orice caz, toate celelalte elemente ale acestei linii și coloane sînt egale cu 0. Același lucru se referă și la toate liniile cu numere de ordine de la $\nu + 1$ la δ și coloane cu numere de ordine de la $\alpha + 1$ la β. Dacă în coloana $\delta + 1$ a matricii A_{12} se află două unități, atunci toate elementele liniei corespunzătoare a matricii B_{21} sînt egale cu 0. Același lucru se referă la toate coloanele începînd cu coloana δ în care se află două unități. Dacă

într-o coloană a matricii A_{12} apare o singură unitate, atunci apar două unități în linia corespunzătoare cu număr de ordine strict mai mare decît β, deci coloana cu același număr din matricea B_{21} are toate elementele egale cu zero. În definitiv întreg colțul din dreapta jos al matricii B_{21} este format numai cu zerouri. Într-adevăr dacă se consideră locul (j, k) în acest colț și locul corespunzător (k, j) în matricea A_{12}, atunci linia k sau coloana j are în A_{12} cel puțin două unități (altfel am fi plasat această linie și această coloană mai înainte). Astfel, coloana k sau linia j în B_{21} este formată în întregime din zerouri; deci pe locul (j, k) trebuie să se afle zero. Colțul din stînga jos și cel din dreapta sus din matricea B_{21} sînt de asemenea formate din zerouri; într-adevăr, dacă în matricea B_{21} ar exista 1 în colțul din stînga jos, de exemplu pe locul (j, k), atunci din simetria construcției în matricea A_{12} toate elementele coloanei j în afara celui de pe linia k (adică din colțul dreapta sus al matricii A_{12}!) trebuie să fie egale cu zero. În aceasta coloană se află în mod necesar unități în colțul din dreapta jos. În ceea ce privește colțul din stînga sus al matricii B_{21}, elementele lui pot fi arbitrare.

Este limpede că putem extinde categoria considerată adăugînd la mulțimea S_{12} toate elementele colțului din dreapta jos al matricii (8) (dacă S_{12} nu conține deja aceste elemente), iar la mulțimea S_{21} adăugînd toate elementele colțului din stînga sus din matricea (9). După această operație, categoria $\mathfrak{C}$ devine maximală deoarece nu se poate extinde S_{12} fără a micșora S_{21}.

În limbaj geometric, o categorie maximală din două subspații este construită astfel: spațiul X_1 este descompus în sumă directă a trei subspații X_1^0, X_1^1, X_1^2 și X_2 este descompus în sumă directă a trei subspații X_2^0, X_2^1, X_2^2 astfel încît $\dim X_1^1 = \dim X_2^1$; acțiunea operatorului A_{12} transformă X_1^0 în 0, X_1^1 într-o matrice diagonală în X_2^1, X_1^2 se transformă arbitrar în X_2^2, iar acțiunea operatorului B_{21} constă în aceea că X_2^0 este transformat arbitrar în X_1^0, X_2^1 într-o matrice diagonală în X_1^1, iar X_2^2 este transformat în 0. O categorie oarecare (care nu este maximală) diferă de o categorie maximală prin aceea că operatorii care transformă X_1^2 în X_2^2 nu sînt arbitrari, ci le corespund matrici cu anumite locuri marcate pentru zerouri. Același lucru se poate spune despre operatorii care transformă X_2^0 în X_1^0; prin aceasta între locurile acestor zerouri poate să nu fie nici o legătură.

12.53. Ne ocupăm acum de descrierea unei categorii $\mathfrak{C}$ cu orice număr de spații X_α.

Mai întîi, este clar că orice subcategorie a categoriei $\mathfrak{C}$ formată de o pereche de spații X_α, X_β și sistemele corespunzătoare $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$ și $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ este construită așa cum a fost descris mai sus: în matricile acestor sisteme se evidențiază mulțimi $S_{\beta\alpha}$ și $S_{\alpha\beta}$ iar $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$ constă din toate matricile pentru care pe locurile din mulțimea $S_{\beta\alpha}$ se află numere oarecare și în afara acestei mulțimi se află zerouri (și similar pentru sistemul $\mathfrak{B}_{\beta\alpha}$). Vom nota prin S orice submulțime de locuri în mulțimea matricilor de dimensiune fixată $m \times n$. Mulțimea elementelor de pe diagonalele principale ale matricilor pătratice va fi notată cu D.

Mulțimea tuturor $m\times n$-matricilor avînd pe locurile din S elemente oarecare și în afara lui S — zerouri, va fi notată prin $\mathfrak{B}_{mn}(S)$. Presupunem că avem o mulțime S_1 definită pe $m \times n$-matrici și o mulțime S_2 definită pe $n \times p$-matrici.

Definim pe $m \times p$-matrici mulțimea S (numită produsul S_1S_2) formată din toate acele locuri în $m \times p$-matrici pe care se pot obține elemente nenule în produsul $\mathfrak{B}_{mn}(S_1)\,\mathfrak{B}_{np}(S_2)$. Altfel spus, locul (j, k) aparține mulțimii S_1S_2 dacă și numai dacă există j astfel încît (i, j) să aparțină lui S_1, iar (j, k) să aparțină lui S_2.

Fie $S_{11}, \ldots, S_{1r}$ o colecție de mulțimi pe $m \times n$-matrici și $S_{21}, \ldots, S_{2q}$ o colecție de mulțimi pe $n \times p$-matrici. Din definiția produsului se deduce ușor formula generală

$$\bigcup_{j=1}^{r} S_{1j} \bigcup_{i=1}^{q} S_{2i} = \bigcup_{j=1}^{r} \bigcup_{i=1}^{q} S_{1j}S_{2i}. \tag{10}$$

Cu ajutorul operației de produs de S-mulțimi condițiile din definiția unei categorii se scriu

$$S_{\alpha\beta}S_{\beta\alpha} \subset D, \quad S_{\alpha\beta}S_{\beta\gamma} \subset S_{\alpha\gamma}. \tag{11}$$

12.54. Construim acum o familie de categorii concrete. A da o categorie $\mathfrak{C}$ înseamnă a indica toate familiile $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}$ sau echivalent, în cazul considerat, a indica toate mulțimile $S_{\alpha\beta}$. Alegem S_{21} arbitrar și apoi S_{12} astfel încît $S_{21}S_{12} \subset D$, $S_{12}S_{21} \subset D$; procedeul a fost descris mai sus. Admitem că sînt deja construite S_{jk} pentru toți j și k mai mici decît n, cu îndeplinirea proprietăților (11) ale unei categorii. Arătăm cum se construiesc S_{jn} și S_{nj} pentru $j < n$. Alegem S_{n1} arbitrar iar S_{1n} cu îndeplinirea condițiilor $S_{1n}S_{n1} \subset D$, $S_{n1}S_{1n} \subset D$.

Presupunem deja alese S_{jn} și S_{nj} pentru toți $j < k$ cu îndeplinirea condițiilor (11) și rămîne să alegem S_{nk} și S_{kn}. Pentru mulțimile căutate S_{nk} și S_{kn} trebuie îndeplinite condițiile care decurg din (11):

a) $S_{nk}S_{kn} \subset D$, $S_{kn}S_{nk} \subset D$;

b) $S_{jk}S_{kn} \subset S_{jn}$, $S_{kn}S_{nj} \subset S_{kj}$, $S_{in}S_{nk} \subset S_{ik}$, $S_{nk}S_{ik} \subset S_{ni}$;

c) $S_{kn} \supset S_{ki}S_{in}$, $S_{nk} \supset S_{nj}S_{jk}$.

Condițiile a), b) limitează superior mulțimile S_{nk} și S_{kn}, iar condiția c) dă o limitare inferioară a lor. Arătăm că toate aceste condiții sînt compatibile. Punem de exemplu

$$S_{kn} = \bigcup_{i=1}^{n-1} S_{ki}S_{in}, \quad S_{nk} = \bigcup_{j=1}^{n-1} S_{nj}S_{jk}.$$

Atunci, conform ipotezei de inducție, în virtutea formulei (10), avem

$$S_{nk}S_{kn} = \bigcup_{j=1}^{n-1} S_{nj}S_{jk} \bigcup_{i=1}^{n-1} S_{ki}S_{in} = \bigcup_{j=1}^{n-1}\bigcup_{i=1}^{n-1} S_{nj}S_{jk}S_{ki}S_{in} \subset$$

$$\subset \bigcup_{j=1}^{n-1}\bigcup_{i=1}^{n-1} S_{nj}S_{ji}S_{in} \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} S_{ni}S_{in} \subset D,$$

$$S_{jk}S_{kn} = S_{jk}\bigcup_{i=1}^{n-1} S_{ki}S_{in} = \bigcup_{i=1}^{n-1} S_{jk}S_{ki}S_{in} \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} S_{ji}S_{in} \subset S_{jn}.$$

Am probat prima din relațiile a) și prima din relațiile b). Este clar că pentru celelalte se fac considerații similare. Așadar, inducția este completă și construcția făcută este corectă.

Se subînțelege că se poate construi o categorie cu ajutorul oricăror S_{kn} și S_{nk} îndeplinind condițiile a) — c) și nu numai pentru tipul special pe care l-am folosit în demonstrația compatibilității acestor condiții. Astfel obținem o familie largă de categorii concrete, în fiecare din ele mulțimile S_{n1} fiind arbitrar fixate, iar toate celelalte mulțimi $S_{\alpha\beta}$ satisfăcînd condițiile a) — c).

12.55. Arătăm că *orice categorie* $\mathfrak{C}$ *cu condițiile* $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}\mathfrak{B}_{\beta\alpha} \subset \mathfrak{B}(D)$ *aparține acestei familii*. Într-adevăr, în acea categorie sînt determinate mulțimile S_{n1} și S_{1n} pentru toți n;

toate celelalte mulțimi S_{nk} și S_{kn} trebuie să satisfacă condițiile a) — c) și aceasta înseamnă că $\mathfrak{C}$ aparține categoriilor descrise. Ar fi interesant de indicat forma categoriilor maximale ale familiilor indicate.

§ 12.6. Categorii și sume directe

12.61. Fie o categorie $\mathfrak{C}$ cu spațiile de bază X_j, algebrele $\mathfrak{B}_j$ și sistemele $\mathfrak{B}_{jk}$. Arătăm cum se poate construi o categorie în care spațiile de bază să fie sumele directe ale spațiilor X_j (în combinații oarecare) și algebrele de bază — sumele directe corespunzătoare ale algebrelor $\mathfrak{B}_j$. Fie X_j suma directă a spațiilor $X_j^1, \ldots, X_j^{k_j}$, $\mathfrak{B}_j$ suma directă a algebrelor corespunzătoare $\mathfrak{B}_j^1, \ldots, \mathfrak{B}_j^{k_j}$ (adică un operator $\overline{\mathcal{A}} \in \overline{\mathfrak{B}}_j$ în spațiul X_j^s acționează ca oricare din operatorii algebrei $\mathfrak{B}_j^s$). Trebuie definit operatorul $\overline{\mathcal{A}}_{ji} \in \mathfrak{B}_{ji}$. Dăm $\overline{\mathcal{A}}_{ji}$ cu ajutorul matricii-bloc

$$\overline{A}_{ji} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{ji}^{11} & A_{ji}^{12} & \ldots & A_{ji}^{1k_i} \\ A_{ji}^{21} & A_{ji}^{22} & \ldots & A_{ji}^{2k_i} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{ji}^{k_j 1} & A_{ji}^{k_j 2} & \ldots & A_{ji}^{k_j k_i} \end{array} \right\|, \qquad (12)$$

unde blocul A_{ji}^{pq} corespunde unui operator oarecare al categoriei, care acționează de la spațiul X_i^q la X_j^p, $p = 1, \ldots, k_j$; $q = 1, \ldots, k_i$. Arătăm că se obține astfel o categorie. Într-adevăr, dacă

$$\overline{B}_{ie} = \left\| \begin{array}{cccc} B_{ie}^{11} & B_{ie}^{12} & \ldots & B_{ie}^{1k_e} \\ B_{ie}^{21} & B_{ie}^{22} & \ldots & B_{ie}^{2k_e} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ B_{ie}^{k_i 1} & B_{ie}^{k_i 2} & \ldots & B_{ie}^{k_i k_e} \end{array} \right\|,$$

atunci

$$\overline{A}_{ji}\overline{B}_{ij} = \left\| \begin{array}{ll} A_{ji}^{11}B_{ie}^{11} + A_{ji}^{12}B_{ie}^{21} + \ldots + A_{ji}^{1k_i}B_{ie}^{k_i 1} & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array} \right\|$$

și toate sumele de produse care se obțin aparțin din nou sistemelor corespunzătoare conform definiției categoriei $\mathfrak{C}$. Astfel, se obține o nouă categorie $\overline{\mathfrak{C}}$, pe care o vom numi *extinderea* categoriei $\mathfrak{C}$.

12.62. Are loc și afirmația inversă: dacă spațiile de bază X_j care figurează într-o anumită categorie sînt sume directe ale unor spații X_j^i, $i = 1, \ldots, k_j$ și algebrele corespunzătoare $\overline{\mathfrak{B}}_j$ sînt sume directe ale algebrelor $\mathfrak{B}_j^i$, $i = 1, \ldots, k_j$ de operatori acționînd în X_j^i, atunci întreaga categorie $\mathfrak{C}'$ este extinderea $\overline{\mathfrak{C}}$, în sensul indicat, a unei categorii $\mathfrak{C}$, construită pornind de la spațiile X_j^i și de la algebrele $\mathfrak{B}_j^i$.

Într-adevăr, presupunem că avem o categorie $\mathfrak{C}$ de tipul indicat. Într-o bază aleasă în subspațiile X_j^i, matricea $\overline{A}_j$ a algebrei $\mathfrak{B}_j$ are forma cvasidiagonală

$$\overline{A}_j = \left\| \begin{array}{cccc} A_j^1 & & & \\ & A_j^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_j^{k_j} \end{array} \right\|,$$

unde matricea pătratică A_j^i are r_j^i linii și coloane.

Matricea $\overline{A}_{ji}$ din categoria $\mathfrak{C}$ se poate reprezenta sub forma unei matrici-bloc

$$\overline{A}_{ji} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{ji}^{11} & A_{ji}^{12} & \ldots & A_{ji}^{1k_i} \\ A_{ji}^{21} & A_{ji}^{22} & \ldots & A_{ji}^{2k_i} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{ji}^{k_j 1} & A_{ji}^{k_j 2} & \ldots & A_{ji}^{k_j k_i} \end{array} \right\|,$$

unde blocul A_{ji}^{pq} are r_j^p linii și r_i^q coloane. Blocul A_{ji}^{pq} corespunde în mod natural unui operator care transformă spațiul X_i^q în spațiul X_j^p.

Folosind toți acești operatori construim o nouă categorie $\mathfrak{C}_{ji}^{pq}$, pentru care spațiile de bază vor fi spațiile X_i^q, algebrele de bază — algebrele $\mathfrak{B}_i^q$ și sistemele de bază — sistemele $\mathfrak{B}_{ji}^{pq}$ de operatori definiți prin matricile A_{ji}^{pq}. Arătăm că această colecție de obiecte formează o categorie.

Fie un operator A_{ji}^{pq} ce acționează de la X_i^q la X_j^p și un operator A_{kj}^{rp} ce acționează de la X_j^p la X_k^r; arătăm că produsul lor A_{kj}^{rp} aparține clasei $\mathfrak{B}_{ki}^{rq}$. Într-adevăr, în categoria $\mathfrak{C}$ există o matrice în care toate blocurile în afara blocului (p, q) sînt egale cu zero, iar blocul cu indici (p, q) este ocupat de matricea A_{ji}^{pq} și există o altă matrice cu unicul bloc nenul A_{kj}^{rp}. Produsul acestor matrici aparține categoriei $\mathfrak{C}$ și în acest

produs există un unic bloc nenul $A_{kj}^{rp}A_{ji}^{pq}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Așadar, toate condițiile din definiția unei categorii sînt îndeplinite. Operatorii care acționează de la spațiul X_j^i la spațiul X_j^s (cu același indice inferior) nu sînt încă definiți; totuși pot fi considerați nuli toți acești operatori și categoria este bine definită.

12.63. Deoarece orice algebră semisimplă de operatori acționînd în spațiul X_j permite să descompunem spațiul X_j într-o sumă directă de spații X_j^i în care acționează deja o algebră simplă, vedem că structura unei categorii generale cu algebre semisimple se reduce la structura unei categorii cu algebre simple. (Această problemă a fost considerată în § 12.4). Într-o bază corespunzătoare matricea oricărui operator $\mathfrak{U}_{ji}$ al categoriei $\mathfrak{E}$ are forma (11), unde fiecare din blocuri A_{ji}^{pq} este un operator al familiei $\mathfrak{B}_{ji}^{pq}$ al unei categorii $\mathfrak{E}_{ji}^{pq}$ cu spațiile de bază X_j^q și X_i^q și algebrele simple $\mathfrak{B}_j^q$ și $\mathfrak{B}_i^q$. Anumite blocuri de matrici $\mathfrak{U}_{ji} \in \mathfrak{B}_{ji}$ pot fi identic nule (pentru toate $\mathfrak{U}_{ji}$). Dacă notăm mulțimea lor prin S_{ji}, se pune întrebarea cum sînt legate între ele aceste mulțimi pentru diverși indici j, i. O problemă similară în cazul blocurilor unidimensionale a fost considerată în § 12.5. Metoda folosită acolo poate fi utilizată și în acest caz și conduce la următorul rezultat: *Dacă o categorie definită prin intersecția liniei-bloc j și coloanei-bloc i a unei matrici $\mathfrak{U}_{21} \in \mathfrak{B}_{21}$ este de tipul* $\mathfrak{E}_1$ (12.31) *sau* $\mathfrak{E}_3$ (12.41), *adică este legată prin matrici inversabile atunci în linia-bloc i și în coloana-bloc j din matricea $\mathfrak{U}_{12}$ toate blocurile în afara celor care se găsesc la intersecția acestora determină categorii nule.* În cazul cînd categoria indicată este de tipul $\mathfrak{E}_2$ (12.31), atunci în blocurile indicate se găsesc matrici dintr-o categorie de tipul $\mathfrak{E}_2$ ale căror produse cu cea dată sînt nule.

Aceasta permite obținerea structurii unei categorii generale, ca în § 12.5. A.Ia. Helemțki a determinat categoriile care corespund algebrelor nilpotente $\mathfrak{B}$.

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII LA PROBLEME

Capitolul 1

1. Răspuns. a) +, b) +.

2. Răspuns. $a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}$, $a_{41}a_{12}a_{33}a_{34}$, $a_{31}a_{42}a_2\ a_{44}$.

3. Răspuns. $(-1)^{n(n-1)/2}$.

4. Indicație. Se consideră determinantul ale cărui elemente sînt toate egale cu 1.

5. Răspuns. $\Delta = (mq - np)(ad - bc)$.

6. Indicație. Se înmulțește prima coloană cu 10^4, a doua cu 10^3, a treia cu 10^2, ultima cu 10^1 și se adaugă toate acestea la ultima coloană; se folosește apoi corolarul 1.45.

7. Răspuns. $\Delta_1 = -29400000$, $\Delta_2 = 394$.

8. Indicație. Evident, $P(x)$ este polinom de gradul 4. Se poate evalua coeficientul termenului de grad maxim, apoi se pot determina rădăcinile sale din condiția de coincidență a liniilor determinantului.

Răspuns. $P(x) = -3(x^2 - 1)(x^2 - 4)$.

9. Indicație. Se adună toate coloanele la prima coloană.

Răspuns. $\Delta = [x + (n-1)a](x - a)^{n-1}$.

10. Indicație. Înlocuind x_n cu x și folosind ideea de rezolvare a problemei 8 se obține relația

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x) = \Delta(x_1 \ldots, x_{n-1})(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}).$$

Răspuns. $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \ldots (x_n - x_1) \ldots$ $\ldots (x_n - x_{n-1})$.

11. Răspuns. $C_1 = 0$, $C_2 = 2$, $C_3 = -2$, $C_4 = 0$, $C_5 = 3$.

12. Răspuns.

$$\sum M_{j_1, j_2, \ldots, j_k}^{i_1, i_2, \ldots, i_k} \bar{A}_{j_1, j_2, \ldots, j_k}^{i'_1, i'_2, \ldots, i'_k} = 0,$$

unde $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ și $i'_1 < i'_2 \ldots < i'_k$ sînt fixate și cel puțin unul din indicii i_α nu coincide cu indicele corespunzător i'_α.

13. Indicație. Este suficient ca determinantul corespunzător de ordin 4 să fie diferit de zero.

14. Indicație. Se folosesc rezultatele 1.96 – 1.97.

Capitolul 2

1. Răspuns. Nu, deoarece în această mulțime nu se poate înmulți cu -1.

2. Răspuns. Nu, deoarece în această mulțime nu se pot aduna doi vectori simetrici față de dreapta dată.

3. Răspuns. Da. În particular, vectorul „nul" din spațiul P este numărul $1 \in P$.

4. Indicație. Folosiți 1.96.

5. Indicație. Presupunînd o relație de dependență

$$C_1 t^{\alpha_1} + C_2 t^{\alpha_2} + \ldots + C_k t^{\alpha_k} = 0,$$

împărțiți cu t^{α_k} și derivați relația, apoi folosiți inducția după k.

6. Indicație. Dovediți că vectorul nul admite de asemenea o descompunere unică după vectorii sistemului $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Deduceți de aici independența liniară a vectorilor acestui sistem.

7. Răspuns. Da, dintr-un vector, anume orice element $x \in P$, distinct de 1.

8. Răspuns. 1.

9. Răspuns. Intersecția este dreapta de intersecție a celor două plane în sens uzual. Suma este întregul spațiu.

10. Folosiți 2.34.

11. Răspuns. Nu. El trebuie înlocuit cu orice alt vector al acestui hiperplan.

12. Răspuns. În interpretare punctuală: orice hiperplan conține odată cu orice două puncte distincte ale sale dreapta trecînd prin acele puncte.

13. Răspuns. În cazul general $p + q + 1$, dacă acest număr nu depășește dimensiunea spațiului întreg.

14. Răspuns. $p + q + r + 2$ dacă acest număr nu depășește dimensiunea spațiului întreg.

15. Răspuns. Asociați oricărui număr strict pozitiv logaritmul său.

Capitolul 3

1. Indicație. Într-o matrice de rang 1 coloanele sînt proporționale.

2. Indicație. Este necesar de descris condiția de apartenență a vectorului y la subspațiul L astfel încît să participe numai minorii de ordin k din matricea A. Dar $y \in L$ atunci și numai atunci cînd matricea B obținută adăugînd la matricea A coloana coordonatelor vectorului y, are rangul k sau, ceea ce este echivalent, orice minor de ordinul $k+1$ al ei este egal cu zero. Dezvoltînd orice minor de ordin $k+1$ al matricii B după ultima coloană, se poate obține un anumit sistem de ecuații relativ la coordonatele vectorului y cu coeficienți minori de ordin k ai matricii A.

3. Indicație. Folosiți 1.51–1.52.

4. Răspuns. $x = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$, unde $c_1 = -16 + c_3 + c_4 + 5c_5$, $c_2 = 23 - 2c_3 - 2c_4 - 6c_5$.

5. Răspuns. Dacă $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \neq 0$, atunci

$$x = -\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}, \quad y = \frac{1}{\lambda + 2}, \quad z = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2},$$

Dacă $\lambda = 1$ sistemul are o soluție depinzînd de doi parametri. Dacă $\lambda = -2$, sistemul este incompatibil.

6. Răspuns. Dacă matricile $\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \right\|$ și $\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\|$ au același rang.

7. Răspuns. Matricile $\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \ldots & \ldots \\ a_n & b_n \end{matrix} \right\|$ și $\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n \end{matrix} \right\|$ au același rang.

8. Răspuns.

$$x^{(1)} = (1, -2, 1, 0, 0),$$
$$x^{(2)} = (1, -2, 0, 1, 0),$$
$$x^{(3)} = (5, -6, 0, 0, 1).$$

9. Răspuns. De exemplu,

$$x = \left\| \begin{matrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| + c_1 \left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| + c_2 \left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| + c_3 \left\| \begin{matrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|,$$

Aici în prima coloană sînt scrise coordonatele vectorului x_0 — o soluție particulară a sistemului neomogen; în celelalte coloane se află coordonatele vectorilor $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ care formează un sistem fundamental normal de soluții ale sistemului omogen corespunzător.

10. Răspuns. Rangul lui A_1 este egal cu 3; un minor principal se află în colțul din stînga sus. Rangul lui A_2 este egal cu 5 și un minor principal coincide cu determinantul matricii.

11. Indicație. Purtați minorul M în colțul din stînga sus și apoi aplicînd procedura 3.62, arătați că începînd cu coloana $r+1$ coloanele matricii A pot fi făcute nule.

12. Indicație. Dacă $P \neq 0$, căutați matricea A sub forma

$$\left\| \begin{matrix} P & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{matrix} \right\|.$$

13. Indicație. Sau rangul matricii $\| a_{jk} \|$ este egal cu n sau el este mai mic decît n.

14. Indicație. Folosiți teorema Kronecker-Capelii.

15. Indicație. Folosiți rezultatul teoremei 14.

16. Indicație. Vezi 6.63 (18).

Capitolul 4

1. Răspuns. De asemenea n.
2. Răspuns. c) și g).
3. Răspuns. Da.
4. Răspuns.

$$\text{a) } A_{(e)} = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{Vmatrix}; \quad A_{(x)} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

5. Răspuns. $AB\ AB \neq A^2B^2$.
6. Răspuns. $AB - BA = E$.
7. Răspuns. $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$,

$$(A + B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3.$$

8. Indicație. Aplicați metoda inducției.
9. Răspuns. Dimensiunea spațiului este egală cu mn. Drept operatori de bază se pot lua aceia cărora le corespund matrici A_{ij} cu unicul element nenul situat la intersecția liniei i cu coloana j.
10. Răspuns.

$$AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

11. Răspuns. $A^n = \begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $B^n = \begin{Vmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{Vmatrix}$.
12. Răspuns. $A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & -a \end{Vmatrix}$, unde $bc = -a^2$.
13. Răspuns.

$$\text{a) } \begin{Vmatrix} -9 & -2 & -10 \\ 6 & 14 & 8 \\ -7 & 5 & -5 \end{Vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

15. Indicație. Găsiți urma celor doi membri ai egalității.
16. Indicație. Trei ecuații pentru elementele necunoscute ale matricilor A și B conduc la ecuații pentru trei minori ai matricii necunoscute cu două linii și trei coloane. Se folosește problema 12 din capitolul 3.
17. Indicație. Se folosește 4.54.
18. Indicație. Se scriu elementele minorului M prin elemente care se găsesc în primele r linii și se aplică teorema 4.54.
19. Indicație. Se folosește soluția problemei 18.
20. Indicație. Vezi 4.54.
21. Răspuns.

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^{-1} = C.$$

23. Răspuns. Dacă A este matricea nulă, atunci X este arbitrară. Dacă $\det A \neq 0$, atunci X este matricea nulă. Dacă $\det A = 0$, $A \neq 0$, atunci liniile ei sînt proporționale; fie $\alpha : \beta$ raportul elementelor corespunzătoare ale primei și celei de a doua linii ale matricii A; atunci

$$X = \begin{Vmatrix} -\beta p & \alpha p \\ -\beta q & \alpha q \end{Vmatrix}$$

pentru orice p și q.

24. Indicație. Se folosesc 1.51—1.52.
25. Răspuns. Nu.
26. Indicație. De exemplu, $\mathcal{A}_1[a_0 + a_1 t + \ldots] = \mathcal{A}[a_0 + a_1 t + \ldots + \lambda a_0]$.
27. Indicație. Operatorul $\mathcal{A}$ transformă vectori liniari independenți în vectori liniar independenți.
28. Indicație. Se aplică egalitatea $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ unui vector propriu al operatorului $\mathcal{B}$.
31. Indicație. Se folosește rezultatul problemei 30.
32. Indicație. Alegînd convenabil operatorul $\mathcal{B}$ și folosind problema 28, se reduce rezolvarea la problema 31.
34. Indicație. Se folosește descompunerea operatorului $\mathcal{A}^2 - \mu^2\mathcal{E}$ în factori.
35. Răspuns. a) $\lambda_1 = 2, f_1 = (1, 0, 0); \lambda_2 = 1, f_2 = (1, 0, 1); \lambda_3 = -1, f_3 = (0, 1, -1)$; b) $\lambda_1 = -1; f_1 = (1, 0, 0); \lambda_2 = \lambda_3 = 1, f_2 = (1, 0, 1); f_3 = (0, 1, 1)$; c) $\lambda_1 = 2, f_1 = (1, 0, 0)$; d) $\lambda_1 = 1, f_1 = (1, 0, 0, -1); f_2 = (0, 1, 0, 0)$.
36. Indicație. Incluziunea $T(\mathcal{A}^k) \subset N(\mathcal{A}^m)$ este necesară și suficientă pentru egalitatea $\mathcal{A}^{k+m} = 0$.
37. Indicație. Fie $f_1, \ldots, f_r$ o bază în domeniul de valori al unui operator $\mathcal{A}$ astfel încît pentru orice $x \in K_n$ să avem

$$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^{r} a_j(x) f_j,$$

Se pune $\mathcal{A}_j x = a_j(x) f_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Capitolul 5

1. Indicație. Primul vector al noii baze este x.
2. Indicație. Se alege o nouă bază $f_1, f_2, \ldots, f_n$ astfel încît primii k vectori să formeze o bază a subspațiului K'. Se scrie condiția $x \in K'$ printr-un sistem de ecuații în coordonatele în noua bază. Folosind formulele de trecere se construiește sistemul corespunzător de ecuații în baza de plecare.
3. Indicație. Se folosește definiția unui hiperplan și problema 2.
4. Răspuns. Matricea transformării căutate este $C = BA^{-1}$.
5. Indicație. Fie $e_1, \ldots, e_n$ o bază oarecare în $\mathcal{K}_n$ și $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k$, unde $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sînt coordonatele vectorului x. Formulele de transformare a coordonatelor încep cu ecuațiile

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k.$$

6. Indicație. Se folosesc 4.83 și invarianța polinomului caracteristic (5.53).

7. Indicație. Se alege o bază astfel încît primii ei m vectori să aparțină subspațiului $\mathfrak{R}^{(\lambda_0)}$. Arătați că pentru această bază polinomul $\det \| A_{(f)} - \lambda E \|$ are factorul $(\lambda - \lambda_0)^m$. Folosiți apoi invarianța polinomului caracteristic (5.53).

Capitolul 6

1. Răspuns. În baza x, $x_{n-1}, \ldots, x_1$.

2. Indicație. Vezi 6.44.

3. Răspuns.

$$\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

4. Răspuns. Nu: $E_2(A) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$, $E_2(B) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda - 2)$.

5. Răspuns. $E_{n-1}(A_1) = E_{n-1}(A_2) = (1 - \lambda)^n$, $E_{n-2}(A_1) = E_{n-2}(A_2) = 1$;

$$E_{n-1}(A_3) = (n - \lambda)^n, \quad E_{n-2}(A_3) = 1;$$

$$E_{n-1}(A_4) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - k), \quad E_{n-2}(A_4) = 1.$$

6. Indicație. $E_{n-1}(A) = (\alpha - \lambda)^n$, $E_{n-2}(A) = 1$.

7. Răspuns. O matrice diagonală pe diagonalele căreia se află anumite rădăcini ale polinomului $P(\lambda)$.

8. Răspuns. Pe diagonalele celulelor jordaniene se află unele din rădăcinile polinomului $P(\lambda)$ și dimensiunile celulelor nu sînt mai mari decît multiplicitățile rădăcinilor corespunzătoare.

9. Indicație. Vectorii x, Ax, A^2x sînt liniar dependenți.

10. Răspuns. Polinoamele de $A_m(a)$.

11. Răspuns. Matrici de forma

$$B_{mn} = \begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & & b_n \\ 0 & b_1 & b_2 & \ldots & & b_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_1 & \ldots & b_{n-m+1} \end{Vmatrix} \quad (n \geqslant m)$$

sau

$$B_{mn} = \begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ 0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \quad (n \leqslant m).$$

12. Răspuns. Matrici de forma

$$\begin{Vmatrix} B_{m_1m_2} & B_{m_1m_2} & \ldots & B_{m_1m_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{m_km_1} & B_{m_km_2} & \ldots & B_{m_km_k} \end{Vmatrix},$$

unde blocurile $B_{m_jm_j}$ sînt indicate în problemele 10 și 11.

13. Răspuns. Matrici de forma

$$\begin{Vmatrix} B_{m_1m_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_{m_2m_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & B_{m_km_k} \end{Vmatrix}.$$

14. Răspuns. Pentru orice grup de celule Jordan avînd același polinom caracteristic — blocul indicat în problema 12. Celelalte elemente sînt nule.

15. Răspuns. Dacă multiplicitatea fiecărei rădăcini caracteristice (valori proprii) este egală cu dimensiunea celulei jordaniene corespunzătoare (sau: polinomul caracteristic coincide cu polinomul minimal; sau: toți divizorii elementari cu excepția celui de ordin superior, sînt egali cu 1).

16. Indicație. Se folosește 6.63 (18).

Capitolul 7

1. Răspuns. Tensor de ordin doi de două ori covariant.

2. Răspuns. De exemplu,

$$\eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2,$$

unde

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + \xi_3, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2, \quad \eta_3 = \xi_3.$$

3. Indicație. Folosiți 7.93.

4. Indicație. Folosiți 4.54 și 7.15.

5. Răspuns. De exemplu, $A(x, y) = \sigma_1\tau_1 + \sigma_2\tau_2 + \sigma_3\tau_3$, unde σ_i și τ_i $(i = 1, 2, 3)$ sînt noile coordonate ale vectorilor x și y. Formulele de trecere la noua bază sînt următoarele:

$$\sigma_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad \sigma_2 = \xi_2 + 2\xi_3, \quad \sigma_3 = \xi_3.$$

6. Indicație. La început se modifică numerotarea coordonatelor astfel încît matricea formei biliniare $A(x, y)$ să se transforme astfel încît să i se poată aplica metoda Jordan.

7. Indicație. $\| -a_{ik} \|$ este o matrice a unei forme pozitiv definite.

Răspuns. $a_{11} < 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, (-1)^n \det \| a_{ik} \| > 0$.

8. Indicație. Se utilizează observația făcută la 7.96.

9. Indicație. Se consideră această formă pe vectorii bazei.

10. Indicație. Ultima linie a determinantului constă din elementele

$$a_k^{[n]} = (-1)^{k-1} A(e_1, \ldots, e_{k-1}, e_{k+1}, \ldots, e_n), \quad k = 1, \ldots, n.$$

11. Indicație. Prima pereche de vectori din bază e_1, e_2 se determină din egalitatea $A(e_1, e_2) = 1$; apoi se construiește subspațiul L determinat prin ecuațiile $A(e_1, x) = 0$, $A(e_2, x) = 0$ și dacă forma $A(x, y)$ în acest subspațiu nu este identic nulă se determină vectorii $e_3, e_4 \in L$ astfel încît $A(e_3, e_4) = 1$ etc.

12. Indicație. Se consideră forma $\mathcal{A}(x, x) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} x_j^2$ $(\varepsilon > 0)$ și se aplică criteriul 7.96.

13. Indicație. Fie $x^{(j)} = \{\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}\}$ $(j = 1, \ldots, r)$ o bază a subspațiului $\mathcal{K}'$. Atunci $\mathcal{K}''$ constă din vectorii $y = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$, care satisfac sistemul

$$A(x^j, y) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \xi_i^{(j)} \right) \eta_k = 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Matricea coeficienților sistemului este produsul matricii nesingulare $\|a_{ik}\|$ a formei $A(x, y)$ cu matricea $\|\xi_i^{(j)}\|$ de rang r. Folosiți apoi 4.67.

14. Răspuns. $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

15. Indicație. Dacă $y = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ este o soluție a sistemului (44), atunci $(b, y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}'y) = 0$. Invers: sistemul (44) este condiția de conjugare a vectorului y și vectorilor $a_j = \{a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}\}$; dacă $(b, y) = 0$ pentru toți astfel de vectori y, atunci x aparține acoperirii liniare a vectorilor $a_1, \ldots, a_n$.

16. Indicație. Vezi problema 37 de la capitolul IV.

17. Indicație. Vezi problema 1 de la capitolul III.

18. Indicație. La început se consideră cazul formelor nenegative de rang 1 și se folosește problema 17. Apoi se aplică problema 16.

Capitolul 8

1. Răspuns. Nu, deoarece nu este îndeplinită axioma 8.21 b) și axioma 8.21 a) pentru $\lambda = -1$.

2. Răspuns. Nu, deoarece nu este îndeplinită axioma 8.21 b).

3. Răspuns. Este posibil. Aceasta revine la modificarea unității de măsură pe axe.

4. Indicație. Se notează cu e_1, e_2, e_3 vectorii care pornesc dintr-un vîrf fixat al tetraedrului pe direcțiile a trei muchii și se determină expresiile vectoriale pentru celelalte muchii.

Răspuns. 90^0.

5. Răspuns. 90^0, 60^0, 30^0.

6. Răspuns.

$$\sqrt{\int_a^b (x(t) + y(t))^2 \, dt} \begin{cases} \leqslant \sqrt{\int_a^b x^2(t) \, dt} + \sqrt{\int_a^b y^2(t) \, dt}, \\ \geqslant \left| \sqrt{\int_a^b x^2(t) \, dt} - \sqrt{\int_a^b y^2(t) \, dt} \right|. \end{cases}$$

7. Răspuns. $\cos \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

8. Răspuns. a) $g = (3, 1, -1, -2)$, $h = (2, 1, -1, 4)$,
b) $g = (1, 7, 3, 3)$, $h = (-4, -2, 6, 0)$.

9. Indicație. Se folosește definiția unghiului 8.33 și ortogonalitatea vectorului h cu toți vectorii subspațiului $\mathcal{R}'$.

10. Indicație. Se înmulțește scalar egalitatea 8.51 (18) cu vectornl g_0.

11. Indicație. Se folosesc 8.54 și 8.52.

12. Răspuns. $y_1 = i$, $y_2 = y_3 = 0$, $y_4 = -2j$, $y_5 = 0$, $y_6 = 5k$.

13. Răspuns. $(1, 2, 1, 3)$; $(10, -1, 1, -3)$; $(19, -87, -61, 71)$.

14. Indicație. Presupunînd că dimensiunea lui $\mathcal{R}''$ este mai mare decît dimensiunea lui $\mathcal{R}'$, se consideră un vector $e'' \in \mathcal{R}''$ ortogonal proiecției subspațiului $\mathcal{R}'$ pe $\mathcal{R}''$; apoi folosiți problema 10.

15. Răspuns. $A_n = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

16. Răspuns. $P_n(-1) = (-1)^n$.

17. Indicație. Se exprimă coeficienții căutați prin produse scalare.

18. Indicație. Se folosesc problemele 15 și 16.

19. Indicație. Se descompune $Q(t)$ după polinoame Legendre.

Răspuns. $Q(t) = \dfrac{1}{A_n} P_n(t)$.

20. Răspuns. $\| P_n(t) \|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

21. Răspuns. $k(A) = |\det A|$.

22. Indicație. Folosiți 4.75.

23. Indicație. Trebuie comparate înălțimile a două hiperparalelipipede.

24. Indicație. Inegalitățile

$$\frac{V[x_1, x_2, \ldots, x_m]}{V[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m]} \leqslant \frac{V[x_1, \ldots, x_k]}{V[x_1, \ldots, x_{k-1}]}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m)$$

se obțin din inegalitățile din problema 23. Se înmulțesc acestea pentru toate valorile $k = 1, 2, \ldots, m$ și se extrage rădăcina de ordin $m-1$ după simplificare. Sensul geometric: volumul unui hiperparalelipiped m-dimensional nu depășește produsul rădăcinilor de ordin $m-1$ ale volumelor fețelor lor $(m-1)$-dimensionale.

25. Indicație. Se scrie inegalitatea din problema 24 pentru $x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_r}$ și se înmulțesc aceste inegalități pentru toate valorile admisibile $s_1, s_2, \ldots, s_r$.

26. Indicație. Trebuie construit în spațiul 2^m-dimensional un hiperparalelipiped pentru care proiecțiile muchiilor pe fiecare axă nu depășesc în valoare absolută numărul M și al cărui volum să fie egal cu $M^n n^{n/2}$.

Pentru $M = 1$ matricea A_m a coordonatelor vectorilor căutați în spațiul 2^m-dimensional poate fi dată prin formula de recurență

$$A_m = \begin{Vmatrix} A_{m-1} & A_{m-1} \\ A_{m-1} & -A_{m-1} \end{Vmatrix}, \qquad A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Observație. Pentru $n \neq 2^m$ evaluarea $M^n \cdot n^{n/2}$ poate fi îmbunătățită.

27. Indicație. Fie $G_\perp$ complementul ortogonal al subspațiului G în $\mathcal{R}$.

Pentru orice $x \in N(\mathcal{A})$ și pentru orice $z \in \mathcal{R}$,

$$(\mathcal{A}' z, x) = (z, \mathcal{A}x) = 0,$$

de unde $\mathcal{A}'z \in N^{\perp}(\mathcal{A})$, adică $T(\mathcal{A}') \subset N^{\perp}(\mathcal{A})$, $T^{\perp}(\mathcal{A}') \subset N(\mathcal{A})$. Pentru orice $x \in T^{\perp}(\mathcal{A})$ și pentru orice $y \in \mathcal{R}$

$$(\mathcal{A}'x, y) = (x, \mathcal{A}y) = 0,$$

de unde $\mathcal{A}'x = 0$, adică $x \in N(\mathcal{A}')$; astfel, $T^{\perp}(\mathcal{A}') \subset N(\mathcal{A}')$, $T^{\perp}(\mathcal{A}') \subset N(\mathcal{A})$. De aici, $N(\mathcal{A}) = T^{\top}(\mathcal{A}')$, $N^{\perp}(\mathcal{A}) = T(\mathcal{A}')$. În mod similar se demonstrează cea de a doua afirmație.

28. Indicație. Comparați 8.93 cu 1.51—1.52.

29. Indicație. Se utilizează 4.54.

30. Indicație. Unghiurile unui triunghi sînt univoc determinate prin laturile acestuia. Altă metodă: forma biliniară simetrică $(\mathcal{Q}x, \mathcal{Q}y)$ este în mod univoc determinată prin forma pătratică $(\mathcal{Q}x, \mathcal{Q}x)$.

31. Indicație. Un operator echiunghiular dat $\mathcal{C}$ transformă o bază ortonormală $e_1, e_2, \ldots, e_n$ într-o bază ortogonală $f_1' = \alpha_1 f_1, f_2' = \alpha_2 f_2, \ldots, f_n' = \alpha_n f_n$, unde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt normați. Fie $\mathcal{Q}$ un operator izometric care transformă vectorii $f_1, f_2, \ldots, f_n$ în $e_1, e_2, \ldots, e_n$; atunci matricea operatorului echiunghiular $\mathcal{Q}\mathcal{C}$ este diagonală. Arătați că condiția $\alpha_i = \alpha_j$ ne permite să construim o pereche de vectori ortogonali care sînt transformați în vectori neortogonali ca rezultat al aplicării operatorului $\mathcal{Q}\mathcal{C}$.

32. Indicație. Este suficient să arătăm că operatorul $\mathcal{Q}$ este echiunghiular (problema 31). În ipoteza că există un unghi drept care se transformă într-un unghi care nu este drept, se construiește un paralelogram a cărui arie se modifică prin aplicarea operatorului $\mathcal{Q}$.

33. Indicație. Se generalizează construcția din problema 32.

34. Indicație. Aplicînd sistemelor date procedeul de ortogonalizare se obțin sisteme ortonormale $e_1, e_2, \ldots$, și $f_1, f_2, \ldots$ Folosind 8.53 arătați că vectorii $x_1, x_2, \ldots$ se exprimă prin $e_1, e_2, \ldots$ după aceleași formule după care vectorii $y_1, y_2, \ldots$ se exprimă prin $f_1, f_2, \ldots$. Operatorul $\mathcal{Q}$ este dat prin aplicarea sistemului $e_1, e_2, \ldots$ pe sistemul $f_1, f_2, \ldots$

35. Indicație. Se consideră sistemele finite $e_1', e_1'', e_2', e_2'', \ldots, e_k', e_k''$ și $f_1', f_1'', f_2', f_2'', \ldots, f_k', f_k''$, obținute prin definirea unghiurilor între subspațiile $\mathcal{R}'$ și $\mathcal{R}''$ și subspațiile $\mathcal{S}'$ și $\mathcal{S}''$. Conform construcției

$$(e_i', e_i'') = (f_i', f_i'') = \cos\varphi_i, \ (i = 1, 2, \ldots, k),$$

$$(e_i', e_j') = (f_i', f_j') = 0, \ (e_i'', e_j'') = (f_i'', f_j'') = 0 \ (i \neq j);$$

se arată că $(e_i', e_j'') = (f_i' f_j'') = 0$ (folosind problema 9). Apoi se aplică rezultatul din teorema 34.

36. Indicație. Se folosește problema 11.

37. Indicație. Se aleg în subspațiile $\mathcal{L}_1$ și $\mathcal{L}_2$ baze $e_1, \ldots, e_m$ și $f_1, f_2, \ldots, f_m$, obținute prin construirea unghiurilor $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. În spațiul $\mathcal{R}$ se construiește baza $e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ în care primii vectori sînt obținuți prin ortogonalizarea vectorilor $e_1, e_2, \ldots, e_m, f_1, f_2, \ldots, f_m$. Se descompun apoi vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m$ după vectorii bazei construite. Se arată că matricile acestor descompuneri au doar un minor de ordin m dacă nu se socotesc minorii nuli. Se folosește apoi expresia volumului paralelipipedului prin minorii matricii corespunzătoare.

38. Indicație. Se folosesc problema 2 din capitolul 3 și problema 17 din capitolul 4.

39. Indicație. Se verifică afirmația din problemă într-o bază specială ai cărei primi vectori aparțin subspațiului $\mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Pentru trecerea la cazul general se utilizează problema 17 din capitolul 4 și se arată că $\det \|a_i^{(j)}\| = 1$.

40. Indicație. Se consideră la început cazul $k = 2$.

41. Indicație. Se alege în spațiul $\mathcal{R}$ o bază așa cum s-a indicat în problema 37 și se verifică afirmația din problemă în această bază. Pentru trecere la cazul general se procedează ca în problema 39.

42. Indicație. Se folosește 4.54.

43. Indicație. Se consideră complementul ortogonal $\mathcal{H}$ la subspațiul $\mathcal{H}$ invariant relativ la $\mathcal{A}$ al tuturor vectorilor x pentru care $P(\mathcal{A})x = 0$. Subspațiul $\mathcal{H}$ este de asemenea invariant relativ la operatorul $\mathcal{A}$, deci și relativ la $[P(\mathcal{A})]^{k-1}$. Dacă însă $z \in \mathcal{H}$, atunci $[P(\mathcal{A})]^{k-1}z \in \mathcal{H}$, de unde $[P(\mathcal{A})]^{k-1}z = 0$. De aici rezultă că $P(t)^{k-1}$ este polinom anulator al operatorului $\mathcal{A}$.

Capitolul 9

1. Indicație. Se folosește 9.34.

2. Indicație. Există o bază de vectori proprii $e_1, \ldots, e_n$ pentru operatorul $\mathcal{B}$ cu valori proprii pozitive $\mu_1, \ldots, \mu_n$. De aici $\mathcal{B}^2 e_i = \mu_i^2 e_i$, și dacă urmărim relația $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$ este necesar ca e_i să fie vectori proprii ai operatorului $\mathcal{A}$, iar numerele μ_i^2 să coincidă cu λ_i. Aceasta este și suficient pentru $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

3. Indicație. La început se prelucrează baza astfel încît matricea operatorului dat să capete forma diagonală.

Răspuns. $\sqrt{A} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{Vmatrix}$.

4. Indicație. Operatorul $\mathcal{A}'\mathcal{A}$ este autoadjunct și expresia $(\mathcal{A}'\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)$ este nenegativă pentru orice $x \in \mathcal{R}_n$. Dacă $\mathcal{A}$ este nesingular, atunci această expresie este pozitivă pentru orice $x \in \mathcal{R}_n$.

5. Indicație. Se utilizează egalitatea $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$.

6. Indicație. Operatorul $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ este autoadjunct și pozitiv (problema 4) și de aceea se poate găsi un operator pozitiv și autoadjunct $\mathcal{S}$ astfel încît $\mathcal{S}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Apoi se construiește operatorul $\mathcal{Q}$ după formula $\mathcal{Q} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}$ și se arată că $\mathcal{Q}$ este un operator unitar.

7. Indicație. Se utilizează problemele 5 și 2.

8. Indicație. Fie $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}_n$ subspațiul generat de vectorii proprii ai operatorului $\mathcal{A}'\mathcal{A}$ cu valorile proprii nenule și $\mathcal{R}''$ este complementul ortogonal al lui $\mathcal{R}'$. Pe $\mathcal{R}'$ se definește operatorul $\mathcal{V}$ egal cu componenta unitară a lui $\mathcal{A}$ (astfel încît $\sqrt{\mathcal{A}'\mathcal{A}}\mathcal{V}x = \mathcal{A}x$), și pe $\mathcal{R}''$ se pune $\mathcal{V}x = 0$.

9. Indicație. Se folosesc problemele 28 și 29 din capitolul IV.

10. Indicație. Se aplică vectorilor unei baze Jordan a operatorului $\mathcal{A}$ (6.37) procesul de ortogonalizare.

Capitolul 10

1. Răspuns.

a) $4\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_3^2$; $\eta_1 = \frac{2}{3}\xi_1 - \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3$,

$\eta_2 = \frac{2}{3}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 - \frac{2}{3}\xi_3$,

$\eta_3 = \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3$;

b) $10\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$; $\eta_1 = \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 - \frac{2}{3}\xi_3$,

$\eta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\xi_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\xi_2$,

$\eta_3 = \frac{2}{3\sqrt{5}}\xi_1 + \frac{4}{3\sqrt{5}}\xi_2 + \frac{\sqrt{5}}{3}\xi_3$;

c) $\eta_1^2 - \eta_2^2 + 3\eta_3^2 + 5\eta_4^2$; $\eta_1 = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_4$,

$\eta_2 = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_3 - \frac{1}{2}\xi_4$,

$\eta_3 = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 - \frac{1}{2}\xi_4$,

$\eta_4 = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_4$;

d) $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 - 3\eta_4^2$; $\eta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_2$,

$\eta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_4$,

$\eta_3 = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_3 - \frac{1}{2}\xi_4$,

$\eta_4 = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2 - \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_4$.

2. Răspuns. Maximul este pentru $x = (\pm 1, 0, 0)$, unde $\mathcal{A}(x, x) = 1$. Minimul este pentru $x = (0, 0, \pm 1)$, unde $\mathcal{A}(x, x) = \frac{1}{3}$ etc.

3. Indicație. Anume pe subspații generate de vectorii bazei canonice corespunzătoare.

4. Indicație. Coeficientul λ_k este egal cu cel mai mic dintre maximele formelor $A(x, x)$ pe un anumit sistem de subspații iar coeficientul μ_k este egal cu cel mai mic dintre maximele formei $B(x, x)$ pe același sistem de subspații.

5. Răspuns. $\frac{y}{x} = \pm \frac{1}{2}$.

6. Răspuns. $A(x, x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$. $B(x, x) = \eta_1^2 + 2\eta_2^2 + 3\eta_3^2$, $\xi_1 = \eta_1 - \eta_2 + 2\eta_3$, $\xi_2 = \eta_2 - \eta_3$, $\xi_3 = \eta_3$.

7. Indicație. Problema se reduce la unicitatea bazei canonice a unui operator simetric cu valori proprii distincte două cîte două.

8. Indicație. Generalizați 7.44.

9. Răspuns. a) Hiperboloidul cu o pînză în lungul axei y; b) hiperboloidul cu o pînză în lungul axei x; c) paraboloidul circular de rotație în jurul axei x; d) paraboloid circular de rotație în jurul axei y, translatată cu 1 în lungul acestei axe; e) paraboloid hiperbolic.

10. Răspuns.

a) $x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2 = 6$; $3(x - 1) = -x_1 + 2y_1 + 2z_1$,

$3y = 2x_1 - y_1 + 2z_1$,

$3(z + 1) = 2x_1 + 2y_1 - z_1$;

b) $x_1^2 + 2y_1^2 - 3z_1^2 = 6$; $3(x + 1) = -x_1 + 2y_1 + 2z_1$,

$3(y + 1) = 2x_1 - y_1 + 2z_1$,

$3z = 2x_1 + 2y_1 - z_1$;

c) $y_1^2 = 2x_1$; $3(x - m) = 2x_1 + 2y_1 + z_1$,

$3(y + 2m) = 2x_1 - y_1 - 2z_1$,

$3(z + 2m) = -x_1 + 2y_1 - 2z_1$

(m oarecare).

11. Indicație. Semiaxele elipsoidului se determină după coeficienții canonici ai formei pătratice corespunzătoare. Se utilizează rezultatele 10.25.

Capitolul 11

1. Indicație. Fie $\mathcal{K}'$ intersecția nucleelor tuturor operatorilor care aparțin idealului stîng $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}(\mathcal{K}_n)$ și fie r dimensiunea lui $\mathcal{K}'$. Alegem o bază în $\mathcal{K}_n$ astfel încît primii r vectori bazici să aparțină lui $\mathcal{K}'$. Matricile tuturor operatorilor $\mathcal{A} \in \mathcal{J}$ au primele r coloane nule. Presupunem că dimensiunea lui $\mathcal{J}$ este egală cu m și că $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ sînt operatori liniari independenți în $\mathcal{J}$. Considerăm matricea cu mn linii și $n-r$ coloane obținută scriind toate matricile $A_1, \ldots, A_m$ una sub alta și eliminînd primele r coloane (nenule). Rangul ei este egal cu $n-r$; așadar, există $n-r$ linii de bază. Combinațiile lor liniare dau toate liniile posibile de $n-r$ elemente. Se utilizează 4.44.

2. Indicație. Introducînd forma biliniară nesingulară (x, y) se consideră colecția $\mathcal{J}^*$ a tuturor operatorilor $\mathcal{A}^*$ adjuncți operatorilor $\mathcal{A} \in \mathcal{J}$. Această colecție este un ideal stîng. Se folosește apoi problema 1.

3. Răspuns. Un ideal stîng maximal al algebrei $\mathfrak{B}(\mathcal{K}_n)$ este mulțimea tuturor operatorilor care transformă în zero un vector fixat al spațiului $\mathcal{K}_n$. Un ideal stîng minimal — mulțimea tuturor operatorilor care transformă în zero un subspațiu $(n-1)$-dimensional fixat al spațiului $\mathcal{K}_n$. Un ideal drept maximal este mulțimea tuturor operatorilor care transformă întreg spațiul $\mathcal{K}_n$ într-un subspațiu $(n-1)$-dimensional fixat. Un ideal drept

minimal — mulțimea tuturor operatorilor care transformă întreg spațiul $\mathcal{H}_n$ într-o dreaptă fixată.

4. Indicație. Într-o bază $e_1, \ldots, e_n$, în care matricea operatorilor $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}$ se scrie sub forma 11.85 se pune

$$(x, y) = \sum \xi_j \overline{\eta}_j \quad (x = \sum \xi_j e_j, \ y = \sum \eta_j e_j).$$

5. Indicație. Odată cu orice subspațiu invariant (relativ la algebra $\mathfrak{B}$) $\mathcal{C}' \in \mathcal{C}_n$ este invariant și complementul său ortogonal. Se descompune $\mathcal{C}_n$ într-o sumă directă ortogonală de subspații invariante ireductibile. Orice operator $\mathcal{A} \neq 0$ din algebra $\mathfrak{B}$ acționează într-unul din aceste subspații ca un operator nenul.

6. Indicație. Din reprezentarea 11.85 se obține că comutatorul unei algebre de matrici semisimple dar nu simple $\mathfrak{B}$ se intersectează cu $\mathfrak{B}$ însăși nu numai după matrici multiple ale matricii unitate.

7. Indicație. Se scrie matricea căutată sub forma unei matrici bloc din m^2 blocuri, se scrie condiția de comutare și se utilizează lema lui Schur.

8. Răspuns. Algebrei $\mathfrak{B}$ a tuturor matricilor diagonale

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ fiind numere complexe arbitrare). Orice algebră de matrici $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}$ se reduce la această formă într-o anumită bază.

9. Răspuns. Algebra $\mathfrak{B}$ a tuturor operatorilor proprii la un sistem dat de subspații având ca sumă directă întreg $\mathcal{C}_n$ satisface condiția $\mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{B}}$. Orice algebră $\mathfrak{B}$ astfel încît $\mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{B}}$ este de această formă.

10. Răspuns. Spațiul $\mathcal{C}_n$ se descompune într-o sumă directă de subspații $\mathcal{C}^{(1)}, \ldots, \mathcal{C}^{(k)}$ și algebra $\mathfrak{B}$ constă din toți operatorii invarianți în fiecare $\mathcal{C}^{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$. Comutatorul $\overline{\mathfrak{B}}$ constă din operatorii multipli ai operatorului identic în fiecare $\mathcal{C}^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, k)$.

11. Indicație. Dacă $\mathfrak{B}$ este suma directă $\mathfrak{B}^{(1)} + \ldots + \mathfrak{B}^{(k)}$, atunci $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} = \overline{\overline{\mathfrak{B}}}^{(1)} + \ldots + \overline{\overline{\mathfrak{B}}}^{(k)}$.

12. Răspuns. Multiplicitatea fiecărei rădăcini caracteristice a operatorului $\mathcal{A}$ este egală cu dimensiunea celulei Jordan corespunzătoare (vezi problema 15 din capitolul 6).

13. Indicație. Dacă $\mathcal{C}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, atunci există $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}$ astfel încît $\mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{C}$. De aici $\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathcal{C}\mathcal{A}) = \mathcal{C}^2\mathcal{A} = \mathcal{C}^3\mathcal{A} = \ldots$

15. Indicație. Fie $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ o bază a algebrei $\mathfrak{B}$. Atunci dacă algebra $\mathfrak{B}$ nu este nilpotentă, atunci unul din idealele drepte $\mathcal{A}_1\mathfrak{B}, \ldots, \mathcal{A}_m\mathfrak{B}$, de exemplu $\mathcal{A}_1\mathfrak{B}$ nu este nilpotent (problema 14). Apoi $\mathcal{A}_1\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}$ (problema 13) și problema se reduce la cea analoagă pentru o algebră de dimensiune mai mică.

16. Indicație. Dacă $\mathcal{M}_i' = \mathcal{M}_{i+1}$, atunci pentru orice vector $x \notin \mathcal{M}_i$ există un operator $\mathcal{A}_1 \in \mathfrak{B}$ astfel încît $\mathcal{A}_1 x \notin \mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{i+1}$; apoi se găsește $\mathcal{A}_2 \in \mathfrak{B}$ astfel încît $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1 x \in \mathcal{M}_i$ etc. Dacă $\mathcal{M}_p \neq \mathcal{M}_n$, atunci pentru $x \in \mathcal{M}_{p+1} - \mathcal{M}_p$ se găsește un operator $\mathcal{A}_p \in \mathfrak{B}$ astfel încît $\mathcal{A}_p x \in \mathcal{M}_p - \mathcal{M}_{p-1}$, apoi $\mathcal{A}_{p-1} \in \mathfrak{B}$ astfel încît $\mathcal{A}_{p-1}\mathcal{A}_p x \in \mathcal{M}_{p-1} \setminus \mathcal{M}_{p-2}$ etc. astfel încît $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \ldots \mathcal{A}_p x \neq 0$.

17. Indicație. Se utilizează subspațiile $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_p$ din problema 16.

INDEX DE NOȚIUNI

Acoperire liniară a vectorilor 65—67, 75, 257
A-izomorfism 227, 236, 238, 283
Algebra 159, 185
Algebra-cît 161, 191
— completă 376
— comutativă 159
— comutatorilor 356
— funcțiilor analitice 201
— funcțiilor complexe raționale 200
— jeturilor 184
— operatorilor 193—199
— polinoamelor 186
— radicală 353
— semisimplă 352, 362, 368
— simplă 351, 356, 368
— trivială 160
Alternativa Fredholm 89
A-spații 228
Asociativitate 11, 159

Baza Jordan 170
— normată 250
— ortogonală 249—250, 286
— ortonormală 250

Categorie 372
— de spații finit-dimensionale 373
— liniară 373
— maximală 381, 395
Coeficienți Fourier 250
Coliniaritate 245—246
Coloane de bază ale unei matrici 38
Combinație liniară de vectori 51
— — a coloanelor unui determinant 21, 37
Complement algebric al unui minor 34
— — al unui element al unui determinant 23
— ortogonal al unui subspațiu 248, 295
Comutativitate 11
Coordonatele vectorului relativ la o bază, 139
Corpul numerelor reale ($\mathbb{R}$) 12, 48
— numerelor complexe ($\mathbb{C}$) 12—13, 48
— numerelor raționale 12
— oarecare (K) 11

Dependență liniară 39
— — a vectorilor 50
Determinant al produsului de matrici 122
— al unei matrici 17, 27
— cvasitriunghiular 36
—, dezvoltarea după elementele unei coloane 22
—, proprietatea de antisimetrie 20
—, proprietatea de liniaritate 21
— transpus 20
— triunghiular 27
Diferență de vectori 48
Dimensiunea acoperirii liniare a unui sistem de vectori 65—66
— domeniului de valori ale unui operator 111
— nucleului unui operator 111
— sumei de spații 61—62
— unei algebre 160
— unui hiperplan 68
— unui subspațiu liniar 54
Distributivitate 159
Domeniul valorilor unui morfism 72

Echivalența operatorilor 155
— elementelot 377
— reprezentărilor 349
Egalitatea operatorilor 98
Element al unui spațiu liniar 45
— al unui determinant 17
— al unei matrici 15
— invers 12, 159
— inversabil 161, 194
— opus 11, 46
Element unitate stîng (drept) al unei algebre 159
Elipsoid 325
Epimorfism 71, 162, 190

Forma antisimetrică 231
— biliniară 204
— —, bază canonică 317, 229
— —, coeficienți canonici 216, 229
— — hermitică 276
— — — simetrică 277
— — nesingulară 207, 236
— — pozitiv definită 236
— — simetrică 206, 218, 303
— — —, bază canonică 281
— — —, formă canonică 279
— — —, indicele de inerție 280
— — — pozitiv definită 282, 314
— liniară 91—93
— —, coeficienți 145
— hermitică 276
— — pătratică 208, 278
— — simetrică 279
— multiliniară 230
— — simetrică 278
— pătratică 208
— —, bază canonică 211
— —, coeficienți canonici 211, 216, 306
— —, formă canonică 211
— —, problema perechilor 314
— — pozitiv definită 236
Formula Taylor pentru un polinom 187, 195
Funcționala biliniară 205
— liniară 92

Hiperboloid cu două pînze 323
— cu o pînză 323
Hiperparalelipiped 260, 262
Hiperplan 67—69
Homeomorfism de figuri 326
Omotopie de figuri 326

Ideal al unei algebre 160—161, 165
— propriu 161
Izomorfism de algebre 162
— de corpuri 12
— de spații liniare 70
Indice de inerție a unei forme pătratice 235
Inegalitatea lui Hadamard 263, 272
— lui Bessel 252
— lui Cauchy-Buniakovski 245, 285
— triunghiului 248, 286

Jet 185
— inversabil 192
— simetric 192

k-vector 271

Lanț normal al unei algebre 360
Lema lui Schur 349

Matrice 15, 83
— adjunctă 136
— a unui operator nilpotent 157
— cvasidiagonală 107, 157, 180
— diagonală 119
—, diagonala principală 16
— formei biliniare 206, 211
— formei pătratice 211
— hermitic-simetrică 277
— identitate (unitate) 98, 118
— inversă 108, 116, 124, 143
— jordaniană 170, 176
— operatorului 96
—, ordinul 96
— ortogonală 268
— nesingulară 123, 141
—, rang 38
— singulară (degenerată) 125
— simetrică 278
— sistemului 29, 77
—, transformare 144
— trecerii la o nouă bază 140
— unitate 98, 118, 288
Matrici transpuse 108
Metoda celor mai mici pătrate 263
Metoda Jacobi 219
Minor 25, 33, 74
— al produsului de matrici 108—110

— bordat 335
— complementar 33
— diagonal 238
— principal 38, 84
Monomorfism 69, 162
Morfism 69
— de algebre 161
Mulțime mărginită 244
— parțial ordonată 376
— parțial preordonată 376

Normă 244
Nucleul unui morfism 72
— — reprezentări 348
Număr întreg 10
— natural 10
— rațional 10

Operator 69, 94, 98
— adjunct 226, 267, 283
— adjunct (conjugat hermitic) 283, 287
— antisimetric 267, 300
— anulator al unui polinom 166
— autoadjunct 267, 291
— — pozitiv 201
— ce acționează într-un spațiu 117
— de asemănare 118
— de proiecție 119
— de rotație 118
— diagonal 119
—, divizor elementar 174
— identic 95
— invariant relativ la o formă 228
— invers 123—125
— izometric 270, 300
—, forma canonică 176
—, forma normală jordan 176
— nilpotent 155
— normal 267, 292, 298
— nul 94, 117
— opus 94
— ,puterea 120
— simetric 267, 309
— unitar 288, 292
— unitate 95
Operații elementare (cu matrici) 83, 100
Ordinul unei matrici 15

Paraboloid circular 330
— eliptic 330
— hiperbolic 330—331
Perpendiculara coborîtă pe un subspațiu 253
Polimon caracteristic al unei matrici 130
— — al operatorului 147
Polinom Legendre 258
Proiecția unui vector pe un subspațiu 250
Produs al unui jet cu un număr 185
— al unei matrici cu un număr 101
— al unui operator cu un număr 100
— al unui vector cu un număr 46
— de jeturi 185
— de matrici 102
— de operatori 100
— de tensori 152
— scalar 244, 283
— tensorial de operatori 389
— — de spații 388

Radicalul unei algebre 353
Rangul produsului de matrici 113—114
— unei forme biliniare 209
— unei matrici 38, 75—76, 85
— — pătratice 211
— unui operator 112
Regula lui Cramer 29—32
Reprezentare 121, 348
— canonică 162
— exactă 348, 351
— ireductibilă 349
— regulată la stînga 349
— standard 354
— trivială 348

Scufundare 70, 162
Sistem de ecuații liniare 13
— compatibil 14, 78
— compatibil nebanal 76
— determinat 15
— incompatibil 14, 266
— nedeterminat 15

— ,sistem fundamental de soluții 81
—, — normal 82
—, soluție 14
— ,soluție generală 79
Spațiu-cît (factor) 63
Spații euclidiene izomorfe 249
Spațiu liniar (afin) ($\mathfrak{M}$) 45
—, bază 53
— complex ($\mathfrak{C}$) 48
— ,euclidian 242
— infinit-dimensional 55
— numeric 11
— real $\mathfrak{R}$ 48
— soluțiilor unui sistem de ecuații 58
— unitar 284
Spectru 184
—, multiplicitate 184
— simetric 192
Subalgebră 160
Subspațiu 57
— , intersecție de subspații 57
— invariant 126, 348
— propriu (netrivial) 57
— trivial 57
Sumă de jeturi 185
— de matrici 101
— de operatori 101
— se subspații 57
— de vectori 46
— directă 57
— — de numere 11
— — de reprezentări 349
— — ortogonală 251
— de tensori 152
Suprafață 318
— de gradul doi 318—321
— conică 320, 326
—, ecuația canonică 318, 319
— singulară 321, 332
— conjugată 331
— cu centru 320, 322
— fără centru 329
— nesingulară 321

Șir de compoziții al unei algebre 359

Tensor 147, 150
— contravariant 150—151
— covariant 150—151
—, contracție 150, 152
—, invariant 151, 153
—, înmulțire 152
— mixt 151
—, ordin 152
Teorema Wedderburn 369
— inerției formelor pătratice 235
— Kronecker-Capelli 78
— Laplace 33, 35
— lui Pitagora 248
— relativ la forma pătratică în spații euclidiene 305
— relativ la determinantul Gramm 261
— relativ la minorul de bază 37
— relativ la ortogonalizare 256
Transformare unitară 287

Unghi între vectori 244
Unghiuri între k-vectori 274
— — subspații 273
Urma unei matrici 135
— unui operator 147

Valoarea proprie a unui operator 128
Valoarea staționară a unei forme 308
— — a unei funcții 306—307
Vector ciclic 350
— complex conjugat 293
— de poziție 50
— înălțime 157
— lungime 243, 284
— normat 244, 285
— nul 46
— opus 46
— ortogonal subspațiului 252
— propriu 128
— real 293
— pur imaginar 293

Redactor: MARIA BORICEAN
Tehnoredactor: CONSTANTIN IORDACHE

Coli de tipar: 26,25 Bun de tipar: 28.01.1983

Tiparul executat sub comanda nr. 1/1037 la Întreprinderea poligrafică „13 Decembrie 1918", Str. Grigore Alexandrescu 89—97, București, Republica Socialistă România