

Conf. univ. dr. **Constantin Udriște**

# LINII DE CÎMP



**EDITURA TEHNICĂ**  
*București — 1988*

# *stefan cel mare și simeon*

În această lucrare sunt prezentate teoria liniilor de cîmp și unele probleme conexe, cu exemplificări din mecanică, mecanica fluidelor, electricitate și magnetism, termodinamică, biologie, chimie etc. Problematica este expusă accesibil unui cerc larg de cititori și poate fi rezumată astfel: definirea cimpurilor vectoriale și a operatorilor diferențiali, prezentarea proprietăților cimpurilor vectoriale particolare (potențiale, iraționale, solenoide, hamiltoniene, biscalare etc.), teoria generală a liniilor de cîmp și a curentilor, stabilitatea punctelor de echilibru, rostul sistemelor potențiale și al catastrofelor elementare, studiul hipersuprafetelor constituite din linii de cîmp, explicarea bifurcației în mulțimea de echilibru și a bifurcației curentului, studiul distribuției ortogonale unui cîmp vectorial și cercetarea proprietăților energiilor unor cimpuri vectoriale speciale.

Lucrarea este adresată inginerilor, matematicienilor, fizicienilor, biologilor, chimistilor și studenților.

Redactori: **VALENTINA CRETU**  
**VASILE BUZATU**

Tehnoredactor: **OLIMPIADA NISTOR**

Coperta: arh. **MARIANA ZIELINSCHI**

---

Bun de tipar: 20.06.1988; Coli tipar: 13  
C.Z.: 517

---



c. 594 I.P. Informația,  
str. Brezoianu 23–25,  
București

## PREFATĂ

În reprezentarea matematică a fenomenelor lumii reale, linia de cîmp este o curbă definită ca soluție a unui sistem diferențial ordinar autonom. Din punctul de vedere al intuitiei corpusculare, linia de cîmp indică traectoria pe care o urmează o particulă plasată într-unul din punctele domeniului de definiție al unui cîmp vectorial, dacă particula este sensibilă la tipul de cîmp considerat. De aceea liniile de cîmp apar în mod natural în probleme de mecanică, mecanica fluidelor, electricitate și magnetism, termodinamică, biologie, chimie etc.

În această carte se grupează într-un tot unitar tot ce se știe despre liniile de cîmp și despre concepțele necesare și cele conexe explicitării proprietăților acestor curbe în  $\mathbb{R}^n$ . Rezumatul cărții este următorul: se definesc cîmpurile scalare, cîmpurile vectoriale și operatorii diferențiali, se prezintă proprietăți ale cîmpurilor vectoriale speciale (potențiale, iraționale, solenoide, Killing, conforme, liniare, afine, proiective, torsionale, hamiltoniene, biscalare etc.), se expune teoria liniilor de cîmp și a curentilor generați de cîmpurile vectoriale, se cercetează stabilitatea punctelor de echilibru, se pune în evidență rostul sistemelor potențiale și al catastrofelor elementare, se studiază hipersuprafețele constituite din liniile de cîmp, se explică bifurcația în multimea de echilibru și bifurcația curentului, se studiază distribuția ortogonală unui cîmp vectorial și se cercetează proprietățile energiilor unor cîmpuri vectoriale.

Din punctul de vedere al exprimării matematice s-a apreciat că reevaluările accesibile sunt mai folositoare decât menținerea unui limbaj matematic ermetic. În acest sens s-au preferat exemplele furnizate de alte discipline, favorizând în special pe cele care au calitatea că nu îngroapă concepțele matematice într-un noian de date neesentiale. De asemenea, la începutul fiecărui capitol este dată o prezentare succintă a conținutului, a aplicațiilor în celelalte discipline și a exemplelor, toate sugerând importanța practică și teoretică a capitolului respectiv. Aceste mici introduceri completează titlurile capitolelor și paragrajelor care se referă numai la conținutul matematic și nu la aplicații.

Carteau este adresată inginerilor, matematicienilor, fizicienilor, biologilor, chimistilor și studenților, fiind elaborată pe baza experienței acumulate la Catedra de matematică I din Institutul Politehnic București. Ea încină spre modelul lucrărilor actuale de aplicații ale geometriei diferențiale și ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale la probleme concrete.

În încheiere, ţin să aduc mulțumiri tuturor celor care au făcut observații fructuoase privind conținutul acestei cărți. În mod deosebit ne referim la specialiștii ICEMAT-ului, acad. Sabba Ștefănescu, prof. dr. docent Aristide Halanay, prof. dr. docent Radu Miron, prof. dr. docent Marcel Roșculeț, prof. dr. Valter Olariu, prof. dr. Andrei Tugulea, conf. dr. Ion Teodorescu, lector dr. Oltin Dogaru, lector dr. Ionel Teyv și asistent Șerban Bolintineanu. De asemenea, mulțumim Editurii Tehnice pentru interesul manifestat față de tematica abordată.

# CUPRINS

<b>1. Cimpuri vectoriale</b>	
1.1. Cimpuri scalare . . . . .	7
1.2. Cimpuri vectoriale . . . . .	10
1.3. Subvariații ale lui $\mathbb{R}^n$ . . . . .	16
1.4. Derivata în raport cu un vector . . . . .	19
1.5. Cimpurile vectoriale ca operatori liniari și derivări . . . . .	23
1.6. Operatori diferențiali . . . . .	28
1.7. Probleme propuse . . . . .	30
<b>2. Cimpuri vectoriale particolare</b>	
2.1. Cimpuri vectoriale irotaționale . . . . .	33
2.2. Cimpuri vectoriale cu simetrie sferică . . . . .	40
2.3. Cimpuri vectoriale solenoidele . . . . .	42
2.4. Reprezentările Monge și Stokes . . . . .	45
2.5. Cimpuri vectoriale armonice . . . . .	46
2.6. Cimpuri vectoriale Killing . . . . .	47
2.7. Cimpuri vectoriale conforme . . . . .	48
2.8. Cimpuri vectoriale affine și proiective . . . . .	50
2.9. Cimpuri vectoriale torsionale . . . . .	52
2.10. Probleme propuse . . . . .	54
<b>3. Linii de cimp</b>	
3.1. Linii de cimp . . . . .	56
3.2. Integrale prime . . . . .	60
3.3. Conjectura lui Sabba Ștefănescu . . . . .	68
3.4. Linii de cimp ale cimpurilor vectoriale liniare . . . . .	70
3.5. Metoda Runge-Kutta . . . . .	73
3.6. Completitudinea cimpurilor vectoriale . . . . .	76
3.7. Completitudinea cimpurilor vectoriale hamiltoniene . . . . .	80
3.8. Currenti și teorema Liouville . . . . .	82
3.9. Currentul global generat de un cimp vectorial Killing sau afin . . . . .	85
3.10. Currentul local generat de un cimp vectorial conform . . . . .	87
3.11. Currentul local generat de un cimp vectorial proiectiv . . . . .	89
3.12. Cimpuri vectoriale atașate grupurilor locale de difeomorfisme . . . . .	90
3.13. Probleme propuse . . . . .	93
<b>4. Stabilitatea punctelor de echilibru</b>	
4.1. Problema stabilității . . . . .	97
4.2. Stabilitatea zerourilor cimpurilor vectoriale liniare . . . . .	99
4.3. Clasificarea punctelor de echilibru în plan . . . . .	102
4.4. Stabilitate prin aproximarea liniară . . . . .	105
4.5. Stabilitate prin funcții Leapunov . . . . .	111
4.6. Probleme propuse . . . . .	115
<b>5. Sisteme potențiale și teoria catastrofelor</b>	
5.1. Puncte critice și linii de gradient . . . . .	119
5.2. Sisteme potențiale și catastrofe elementare . . . . .	124
5.3. Liniile de gradient ale faldului . . . . .	126
5.4. Liniile de gradient ale întoarcerii . . . . .	128

5.5. Punctele de echilibru ale gradientului rîndunicii . . . . .	130
5.6. Punctele de echilibru ale gradientului fluturelui . . . . .	131
5.7. Punctele de echilibru ale gradientului ombilicului eliptic . . . . .	132
5.8. Punctele de echilibru ale gradientului ombilicului hiperbolic . . . . .	134
5.9. Punctele de echilibru ale gradientului ombilicului parabolic . . . . .	135
5.10. Probleme propuse . . . . .	136
<b>6. Hipersuprafețe de cimp</b>	
6.1. Ecuații liniare cu derivate parțiale de ordinul întii . . . . .	138
6.2. Funcții omogene și ecuația Euler . . . . .	142
6.3. Hipersuprafețe cilindrice și conice . . . . .	144
6.4. Hipersuprafețe de rotație . . . . .	147
6.5. Valori și vectori proprii ale unui cimp vectorial . . . . .	149
6.6. Metoda rețelei . . . . .	151
6.7. Probleme propuse . . . . .	153
<b>7. Teoria bifurcației</b>	
7.1. Bifurcație în mulțimea de echilibru . . . . .	156
7.2. Varietatea centru . . . . .	159
7.3. Bifurcația curentului . . . . .	162
7.4. Teorema Hopf a bifurcației . . . . .	164
7.5. Probleme propuse . . . . .	168
<b>8. Subvarietați ortogonale liniilor de cimp</b>	
8.1. Subvarietați ortogonale liniilor de cimp . . . . .	171
8.2. Ecuații Pfaff complet integrabile . . . . .	173
8.3. Teorema Frobenius . . . . .	176
8.4. Cimpuri vectoriale biscalare . . . . .	177
8.5. Distribuția ortogonală unui cimp vectorial . . . . .	180
8.6. Liniile de cimp ca intersecții de spații neolonomice . . . . .	182
8.7. Distribuția ortogonală unui cimp vectorial afin . . . . .	184
8.8. Dependența de parametri a subvarietaților ortogonale liniilor de cimp . . . . .	187
8.9. Probleme propuse . . . . .	188
<b>9. Energii</b>	
9.1. Energia unui cimp vectorial oarecare . . . . .	194
9.2. Energia unui cimp vectorial irotațional . . . . .	194
9.3. Energia unui cimp vectorial Killing . . . . .	195
9.4. Energia unui cimp vectorial conform . . . . .	196
9.5. Energia unui cimp vectorial afin . . . . .	197
9.6. Energia unui cimp vectorial proiecțiv . . . . .	198
9.7. Energia unui cimp vectorial torsional . . . . .	198
9.8. Energia unui cimp vectorial hamiltonian . . . . .	199
<i>Bibliografie</i> . . . . .	203
<i>Cuprinsul în limba engleză</i> . . . . .	206

## 1. CÎMPURI VECTORIALE

Cîmpurile scalare (v. 1.1) și cîmpurile vectoriale (v. 1.2 și 1.5) sunt modele matematice derivate din legi ale naturii dintre care cităm următoarele exemple:

1) legea vitezei de sublimare a moleculelor și legea presiunii necesare apariției fenomenului de sublimare, condiția de echilibru și expresia volumului în procesul de obținere în cosmos a unor produse sub formă de sfere.

2) viteza de evoluție locală a unui sistem biologic format dintr-o specie „răpitor“ și o specie „pradă“, cîmpul gravitațional, cîmpul electrostatic, cîmpul vitezelor în masa unui fluid și gradientul unui cîmp scalar.

Teorema funcției inverse și teorema funcției implicate stau la baza geometriei diferențiale. Partea elementară din această geometrie se referă la subvarietățile lui  $\mathbb{R}^n$  (v. 1.3).

Unele proprietăți cantitative sau calitative ale cîmpurilor scalare și vectoriale sunt puse în evidență de derivata în raport cu un vector sau cu un cîmp vectorial, tratate în 1.4, sau de operatorii gradient, hessiană, rotor, divergență și laplacian, prezentati în 1.6.

În 1.5 și în problemele 2 și 3 din 1.7 sunt descrise alternative de definire a vectorilor tangenți, și deci a cîmpurilor vectoriale, impuse de nevoie de abstractizare și anume de trecerea de la  $\mathbb{R}^n$  la varietăți diferențiable finite sau infinit dimensionale. În 1.7 sunt date cîteva probleme pe care le-am considerat utile în fixarea și completarea teoriei.

### 1.1. Cîmpuri scalare

Fie  $\mathbb{R}$  mulțimea numerelor reale și  $\mathbb{R}^n$  spațiul euclidian canonice cu dimensiunea  $n$ .

O funcție de tipul  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se numește *cîmp scalar* pe  $\mathbb{R}^n$ . Pentru prescurtare cîmpul scalar se notează cu  $f$ , iar valoarea sa în punctul  $x = (x_1, \dots, x_n)$  cu  $f(x)$ .

Un cîmp scalar continuu se numește de *clasă  $C^0$* . Un cîmp scalar care are deriveate parțiale continue pînă la ordinul  $p$  inclusiv ( $p = 1, 2, \dots$ ) se numește de *clasă  $C^p$* . Un cîmp scalar care admite o dezvoltare în serie Taylor în vecinătatea oricărui punct  $x \in \mathbb{R}^n$  se numește de *clasă  $C^\infty$*  sau *analitic*.

**Observație.** Fie  $S$  o submulțime oarecare a lui  $\mathbb{R}^n$ . Cîmpul scalar  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  se numește de *clasă  $C^p$* ,  $p \geq 1$ , dacă există o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$  care include pe  $S$  și un cîmp scalar  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^p$ ,  $p \geq 1$ , astfel încît  $f = F|_S$ .

Fie  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un cîmp scalar de clasă  $C^1$ . Soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

se numesc *puncte critice* ale cîmpului scalar  $f$ . Punctele în care cel puțin una dintre deriveatele  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  nu se anulează se numesc *puncte regulate* pentru  $f$ .

Fie  $c$  un număr real. Multimea

$$M_c = f^{-1}(c) = \{(x_1, \dots, x_n) | (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

se numește *multime de nivel constant* sau *multime de ecuație cartesiană implicită*  $f(x_1, \dots, x_n) = c$ . Pe scurt se scrie  $M_c : f(x_1, \dots, x_n) = c$ . Evident, dacă  $c \notin f(\mathbb{R}^n)$ , atunci  $M_c = \emptyset$ .

Denumirile *puncte de nivel constant*, *curbe de nivel constant* și *suprafețe de nivel constant* se utilizează pentru anumite multimi de nivel constant în cazurile  $n = 1, n = 2$ , respectiv  $n = 3$  (vezi 1.3).

Dacă privim pe  $c$  ca fiind variabil în  $\mathbb{R}$ , atunci ecuațiile  $f(x_1, \dots, x_n) = c$  reprezintă o familie de multimi de nivel constant. Această familie are proprietățile :

1) prin fiecare punct trece o multime de nivel constant și anume prin  $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$  trece multimea pentru care  $c = f(x_0)$ ;

2) două multimi de nivel constant nu pot avea nici un punct comun. Dacă ar avea unul, ele ar trebui să coincidă și acest lucru este o consecință a faptului că fiecare valoare a unei funcții este unică.

Multimile de nivel constant atașate funcției  $f$  sunt strîns legate de graficul lui  $f$ , împreună servind la descrierea unor proprietăți calitative ale cîmpurilor scalare. Graficul cîmpului scalar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este submulțimea lui  $\mathbb{R}^{n+1}$  definită prin

$$G(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) | (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Astfel se observă că  $M_c$  nu este altceva decât proiecția pe  $\mathbb{R}^n$  a secțiunii graficului lui  $f$  prin hiperplanul  $x_{n+1} = c$ . Pe de altă parte,  $G(f)$  este multimea de nivel constant zero atașată funcției  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1}$ .

În general  $M_c$  conține atît puncte regulate cît și puncte critice ale lui  $f$ . Punctele critice ale lui  $f$  care fac parte din  $M_c$  se numesc *puncte critice* sau *singulare* ale lui  $M_c$ .

Dacă  $f$  este un polinom de gradul  $n$ , atunci  $M_c$  se numește *hipersuprafată algebrică de ordinul  $n$* . În particular avem următoarele denumiri : *hipersuprafețe algebrice de ordinul unu (hiperplane)*, *hipersuprafețe algebrice de ordinul doi (hipercvadrice)* etc.

**Exemple.** Să considerăm cîmpurile scalare definite pe  $\mathbb{R}^2$  respectiv prin

$$x^2 + y^2 (-x^2 - y^2), x^2 - y^2, x^3 - 3xy^2, x^2, x^2y^2.$$

Acestea se vizualizează fie prin graficele corespunzătoare care au respectiv alura din fig. 1.1 – 1.5, a, fie prin curbele de nivel constant care sunt schităte în fig. 1.1 – 1.5, b.

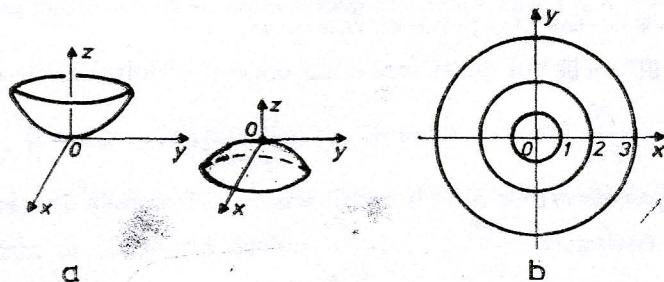


Fig. 1.1

**Aplicații. 1.1.** Într-un mediu cosmic asemănător vidului are loc sublimarea metalelor. Viteza de sublimare a moleculelor de la suprafața corpurilor formate din substanțe anorganice se determină cu relația [31]

$$V = \frac{p}{2320} \sqrt{\frac{M}{T}}, \quad (1)$$

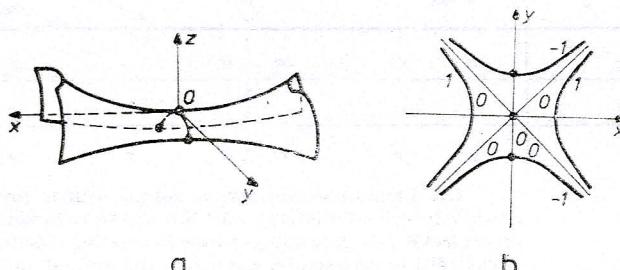


Fig. 1.2

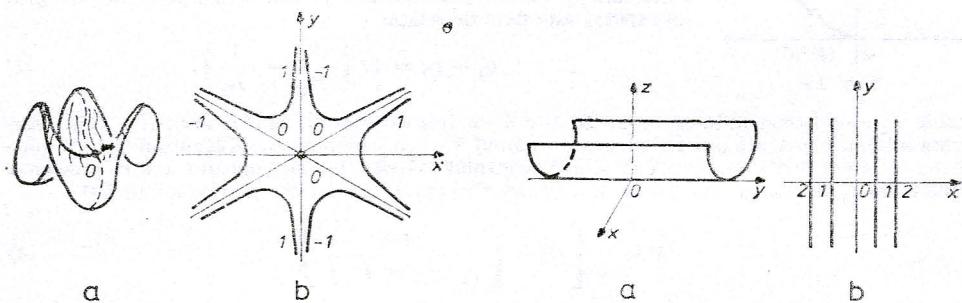


Fig. 1.3

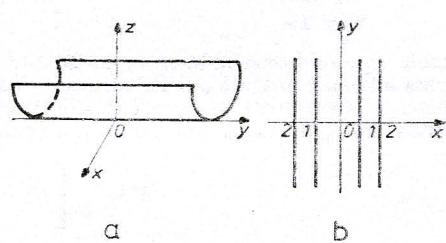


Fig. 1.4

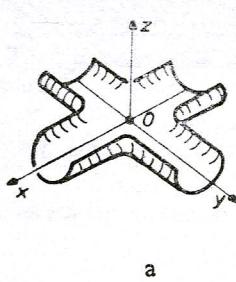


Fig. 1.5

unde  $V$  este viteza de sublimare,  $p$  este presiunea vaporilor materialului,  $M$  este masa moleculară a vaporilor materialului, iar  $T$  este temperatura absolută. Relația cu ajutorul căreia se determină presiunea necesară apariției fenomenului de sublimare este

$$\lg p = A - B/T, \quad A, B = \text{const} > 0. \quad (2)$$

Un model matematic al legii fizice (1) este cimpul scalar  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D = \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \times (-\infty, 0) \cup \mathbb{R} \times [0, \infty) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = \frac{x}{2320} \sqrt{\frac{y}{z}}$  (sau o restricție a acestuia).

Mulțimile de nivel constant atașate funcției  $f$  sunt submulțimi din  $D$  caracterizate prin ecuații carteziene implicate,  $c^2z = x^2y$ . Acestea sunt suprafețe riglate deoarece secțiunile lor prin planele  $x = k$  sunt porțiuni de drepte,  $x = k$ ,  $a^2z = k^2y$ . Graficul lui  $f$  este o hipersuprafață a lui  $\mathbb{R}^4$ .

Relația fizică (2) este strins legată de funcția  $f: \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(z) = e^{-\frac{A}{z}}$ ,  $A, B = \text{const} > 0$  sau de restricția  $f|_{(0, T_0]}$ . Tabelul de variație al lui  $f$  este (fig. 1.6)

$z$	$-\infty$	$0$	$1/2$	$\infty$
$f'(z)$	0	+	$\infty$	0
$f''(z)$		+		-
$f(z)$	$e^A$	$\nearrow$	$\infty$	$0$

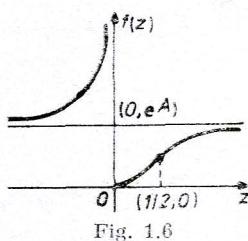


Fig. 1.6

**1.2.** Procesul de obținere în cosmos a unor produse sub formă de sfere începe cu dilatarea unei bile (în stare lichidă) prin intermediul injectării de gaze sub presiune în interior. Diametrul interior  $D_1$  al cavitatei în care se află gazul este determinat de presiunea gazului  $p_2$  și de tensiunea  $\sigma$  a lichidului ce o înconjoară. La rândul ei tensiunea  $\sigma$  este determinată de diametrul bilei  $D_2$  și de presiunea exterioară  $p_0$ . Condiția de echilibru pentru fiecare punct de pe suprafața sferică este dată de relația

$$p_2 - p_0 = 4\sigma \left( \frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right), \quad (3)$$

unde  $D_1$  este diametrul interior, iar  $D_2$  este diametrul exterior al inelului sferic (fig. 1.7). Singura mărime constantă a procesului este volumul  $V$  al materialului, stabilit inițial pentru obținerea grosimii finale  $S$  a pereților și a diametrului exterior  $D_2$ . Dependența dintre presiunea interioară  $p_2$ , diametrul exterior  $D_2$  și volumul  $V$  al materialului este dată de relația [31]

$$V = \frac{\pi}{6} \left[ D_2^3 - \left( \frac{4}{p_2} - \frac{\sigma D_2}{D_2 - 4\sigma} \right)^3 \right] \quad (4)$$

Legea (3) sugerează cimpul scalar  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$E = \mathbb{R}^3 \setminus (yOz \cup xOz), \quad f(x, y, z) = 4z \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right).$$

Mulțimile de nivel constant ale lui  $f$  sunt porțiunile din  $E$  ale conurilor de ecuații  $cxy = zy - zx$ . Graficul lui  $f$  este o hipersuprafață a lui  $\mathbb{R}^4$ .

Cimpul scalar, cu domeniul de definiție maxim posibil (din punct de vedere matematic), care modelază legea (4) este  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E = \mathbb{R}^3 \setminus (yOz \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y - 4z = 0\})$ ,  $f(x, y, z) =$

$$= \frac{\pi}{6} \left[ y^3 - \frac{64y^3z^3}{x^3(y - 4z)^3} \right]. \quad \text{Față de acesta, legea (4) reprezintă mulțimile de nivel constant pozitiv ale unei restricții a lui } f.$$

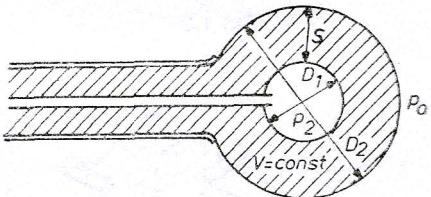


Fig. 1.7

## 1.2. Cimpuri vectoriale

Fie  $\mathbb{R}^n$  spațiul vectorial (real) euclidian canonice cu dimensiunea  $n$ . Ca orice spațiu vectorial euclidian,  $\mathbb{R}^n$  este implicit un spațiu punctual euclidian.

Fie  $x$  și  $y$  două puncte oarecare din  $\mathbb{R}^n$ . Perechea ordonată  $(x, y)$  se numește *vector tangent* la  $\mathbb{R}^n$  în punctul  $x$  (segment orientat, vector legat)

și se reprezintă grafic printr-o săgeată care începe din punctul  $x$  și se termină în punctul  $y$  (fig. 1.8). Punctul  $x$  se numește *originea* sau *punctul de aplicație* al vectorului tangent, iar  $y$  se numește *extremitatea* sa. Dacă  $x = (0, 0, \dots, 0)$  este originea lui  $\mathbb{R}^n$ , atunci  $(x, y)$  se numește *vectorul de poziție* al punctului  $y$ .

Punctul  $\mathbf{X} = y - x$  se numește *partea vectorială* a vectorului tangent și în loc de  $(x, y)$  putem nota  $\mathbf{X}_x$  sau chiar  $\mathbf{X}$  dacă punctul de aplicație se subînțelege.

Din definiția vectorului tangent la  $\mathbb{R}^n$  într-un punct rezultă că vectorii tangenți  $\mathbf{X}_x$  și  $\mathbf{Y}_y$  coincid (sunt egali) dacă și numai dacă au aceeași parte vectorială,  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ , și același punct de aplicație,  $x = y$ .

Doi vectori  $\mathbf{X}_x$  și  $\mathbf{Y}_y$  care au aceeași parte vectorială  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ , dar care au puncte de aplicație diferite,  $x \neq y$ , se numesc *paraleli* (fig. 1.9).

Fixăm un punct  $x \in \mathbb{R}^n$  și considerăm toți vectorii tangenți la  $\mathbb{R}^n$  în  $x$ . Mulțimea tuturor vectorilor tangenți la  $\mathbb{R}^n$  în  $x$  se numește *spațiul tangent* la  $\mathbb{R}^n$  în punctul  $x$  și se notează cu  $T_x \mathbb{R}^n$  (fig. 1.10). Spațiul tangent se organizează ca spațiu vectorial cu operațiile

$$\mathbf{X}_x + \mathbf{Y}_x = (\mathbf{X} + \mathbf{Y})_x, \quad r\mathbf{X}_x = (r\mathbf{X})_x.$$

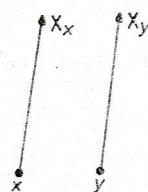


Fig. 1.9

Astfel, ca spațiu vectorial,  $T_x \mathbb{R}^n$  este izomorf cu  $\mathbb{R}^n$ , izomorfismul fiind dat de corespondența  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_x$ . Produsul scalar în  $T_x \mathbb{R}^n$  se definește astfel :

$$(\mathbf{X}_x, \mathbf{Y}_x) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

unde membrul drept reprezintă produsul scalar din  $\mathbb{R}^n$ . În particular, norma (lungimea) vectorului  $\mathbf{X}_x$  este numărul  $\|\mathbf{X}_x\| = \|\mathbf{X}\|$ . Un vector de lungime unu se numește *vector unitate* sau *versor*. Dacă  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ , atunci vectorii tangenți  $\mathbf{X}_x, \mathbf{Y}_x$  se numesc *ortogonali*.

Din inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\|\mathbf{X}\| \|\mathbf{Y}\|} \leq 1.$$

De aceea formula

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\|\mathbf{X}\| \|\mathbf{Y}\|}, \quad \varphi \in [0, \pi],$$

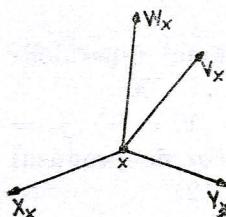


Fig. 1.10

definește unghiul dintre doi vectori tangenți nenuli  $\mathbf{X}_x$  și  $\mathbf{Y}_x$  (fig. 1.11).

Un sistem ordonat de  $n$  vectori unitari, reciproc ortogonali, tangenți la  $\mathbb{R}^n$  în  $x$ , se numește *reper* în punctul  $x$ . Dacă  $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n\}$  este un reper în punctul  $x \in \mathbb{R}^n$ , atunci  $\forall \mathbf{X} \in T_x \mathbb{R}^n$  putem scrie

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}, \mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1 + (\mathbf{X}, \mathbf{E}_2)\mathbf{E}_2 + \dots + (\mathbf{X}, \mathbf{E}_n)\mathbf{E}_n$$

Numerele reale  $r_i = (\mathbf{X}, \mathbf{E}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , se numește *componentele* lui  $\mathbf{X}$  în raport cu reperul fixat și sunt mărimi algebrice ale unor proiecții.

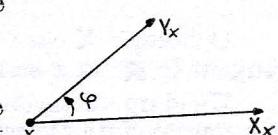


Fig. 1.11

Reperul  $(1,0,\dots,0)_x, (0,1,\dots,0)_x, \dots, (0,0,\dots,1)_x$  se numește *reper natural*, iar componentele unui vector în raport cu acest reper se numește *componente euclidiene*.

Fie

$$\mathbf{X}_2 = r_{21}\mathbf{E}_1 + r_{22}\mathbf{E}_2 + \dots + r_{2n}\mathbf{E}_n,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\mathbf{X}_n = r_{n1}\mathbf{E}_1 + r_{n2}\mathbf{E}_2 + \dots + r_{nn}\mathbf{E}_n$$

$n-1$  vectori din  $T_x\mathbb{R}^n$  raportați la reperul  $\{\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n\}$ . Vectorul

$$\mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n = \begin{vmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \dots & \mathbf{E}_n \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} \in T_x\mathbb{R}^n$$

unde membrul al doilea este un determinant simbolic ce se dezvoltă după prima linie, se numește *produsul vectorial* dintre  $\mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ . Evident,  $\mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n$  este ortogonal pe fiecare dintre vectorii  $\mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ .

Să considerăm  $n$  vectori  $\mathbf{X}_i \in T_x\mathbb{R}^n$ . Numărul  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n)$  se numește *produsul mixt* al celor  $n$  vectori. Dacă

$\mathbf{X}_1 = (r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}), \mathbf{X}_2 = (r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n}), \dots, \mathbf{X}_n = (r_{n1}, r_{n2}, \dots, r_{nn})$  atunci

$$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix}.$$

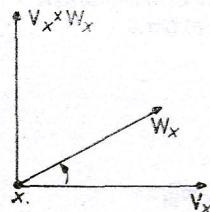


Fig. 1.12

Modulul acestui număr reprezintă volumul  $n$ -paralelipipedului construit pe vectorii  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ .

În  $\mathbb{R}^3$  reperul natural este  $i_x = (1, 0, 0)_x, j_x = (0, 1, 0)_x, k_x = (0, 0, 1)_x$  și se poate vorbi de produsul vectorial a doi vectori tangenți (fig. 1.12)

$$\mathbf{V}_x = ai_x + bj_x + ck_x, \quad \mathbf{W}_x = ei_x + fj_x + gk_x,$$

$$\mathbf{V}_x \times \mathbf{W}_x = \begin{vmatrix} i_x & j_x & k_x \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix}.$$

O funcție  $\mathbf{X}$  care asociază fiecărui punct  $x$  al lui  $\mathbb{R}^n$  un vector  $\mathbf{X}(x)$  tangent la  $\mathbb{R}^n$  în  $x$  se numește *cîmp vectorial* pe  $\mathbb{R}^n$  (fig. 1.13).

Un câmp vectorial  $\mathbf{X}$  pentru care  $\mathbf{X}(x)$  este paralel cu  $\mathbf{X}(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ , se numește *cîmp vectorial paralel sau constant*. Multimea valorilor unui câmp paralel se identifică cu un vector liber. Cîmpurile paralele  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_n$

definite prin  $\mathbf{U}_1(x) = (1, 0, \dots, 0)_x$ ,  $\mathbf{U}_2(x) = (0, 1, \dots, 0)_x, \dots, \mathbf{U}_n(x) = (0, 0, \dots, 1)_x$ , se numesc *cîmpuri fundamentale*, iar ansamblul lor se numește *cîmpul reperului natural*.

**Teoremă.** Dacă  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial pe  $\mathbb{R}^n$ , atunci există  $n$  funcții reale  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , astfel încât

$$\mathbf{X} = f_1 \mathbf{U}_1 + f_2 \mathbf{U}_2 + \dots + f_n \mathbf{U}_n.$$

Cîmpurile scalare  $f_i$  se numesc componentele euclidiene ale cîmpului  $\mathbf{X}$ .

*Demonstrație.* Prin definiție  $\mathbf{X}$  asociază lui  $x$  un vector  $\mathbf{X}(x)$  tangent la  $\mathbb{R}^n$  în  $x$ . Deoarece partea vectorială a lui  $\mathbf{X}(x)$  depinde de  $x$ , ea poate fi scrisă în forma  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  și astfel obținem funcții  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . În plus,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , avem

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))_x = f_1(x)(1, 0, \dots, 0)_x + \\ &+ f_2(x)(0, 1, \dots, 0)_x + \dots + f_n(x)(0, 0, \dots, 1)_x = \\ &= f_1(x)\mathbf{U}_1(x) + f_2(x)\mathbf{U}_2(x) + \dots + f_n(x)\mathbf{U}_n(x). \end{aligned}$$

Deci  $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{U}_i$ . Evident funcțiiile  $f_i$  sunt unic determinate.

În particular, orice vector tangent  $\mathbf{X}_x$  se reprezintă în forma  $\mathbf{X}_x = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{U}_i(x)$ .

Algebra cîmpurilor vectoriale se construiește pe baza următoarelor operații :

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(x) = \mathbf{X}(x) + \mathbf{Y}(x), \quad (f\mathbf{X})(x) = f(x)\mathbf{X}(x).$$

De asemenea produsul scalar al cîmpurilor vectoriale  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$  se definește prin

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(x) = (\mathbf{X}(x), \mathbf{Y}(x)).$$

Produsul vectorial al cîmpurilor  $\mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  se definește prin  $(\mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n)(x) = \mathbf{X}_2(x) \times \dots \times \mathbf{X}_n(x)$ . Produsul mixt al cîmpurilor  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  se definește prin  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n)(x) = (\mathbf{X}_1(x), \mathbf{X}_2(x) \times \dots \times \mathbf{X}_n(x))$ .

Operațiile definite anterior punctual se pot exprima prin operații asupra componentelor cîmpurilor respective. De asemenea facem observația că în baza teoremei precedente, orice cîmp vectorial  $\mathbf{X}$  pe  $\mathbb{R}^n$  este echivalent cu o funcție de tipul  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ . De aceea este natural să spunem că  $\mathbf{X}$  se numește *cîmp vectorial de clasă C<sup>p</sup>* dacă componente sale sunt de clasă  $C^p$  (ca funcții reale). În ipoteza că  $\mathbf{X}$  este de clasă  $C^p$ ,  $p \geq 1$ , disponerea vectorilor  $\mathbf{X}(x)$  urmează reguli suplimentare precise, cel puțin în vecinătatea unui punct, reguli impuse de existența liniilor de cîmp și a hipersuprafețelor de cîmp (v. cap. 3 și 6).

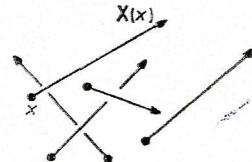


Fig. 1.13

Să presupunem că ne referim la  $\mathbb{R}^3$ . În acest caz cîmpul reperului natural  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  este definit prin (fig. 1.14)

$$\mathbf{i}(x) = \mathbf{i}_x = (1, 0, 0)_x, \mathbf{j}(x) = \mathbf{j}_x = (0, 1, 0)_x, \mathbf{k}(x) = \mathbf{k}_x = (0, 0, 1)_x.$$

Orice cîmp vectorial pe  $\mathbb{R}^3$  se scrie sub forma (fig. 1.15)

$$\mathbf{X} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}.$$

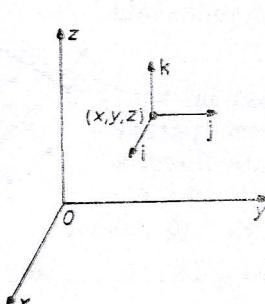


Fig. 1.14

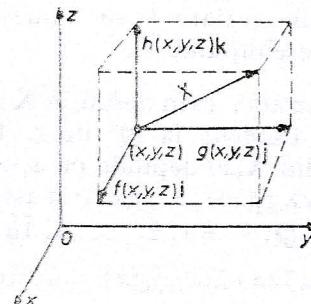


Fig. 1.15

În cazul spațiului  $\mathbb{R}^3$  se poate defini produsul vectorial a două cîmpuri  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$  și anume

$$(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})(x) = \mathbf{X}(x) \times \mathbf{Y}(x).$$

O b s e r v a t i i . 1) În general domeniile de definiție ale cîmpurilor scalare sau vectoriale utilizate în continuare vor fi submulțimi  $D$  ale lui  $\mathbb{R}^n$ .

2) Cîmpurile vectoriale  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ ,  $m \leq n$ , se numesc *liniar independente* pe  $D \subset \mathbb{R}^n$  dacă  $\mathbf{X}_1(x), \dots, \mathbf{X}_m(x)$  sunt vectori liniar independenți, oricare ar fi  $x \in D$ . Acest tip de „liniar independentă”, folosită în problemele elementare, nu are același conținut cu liniar independentă definită pe spațiul vectorial real al cîmpurilor vectoriale (spațiu de funcții, infinit dimensional, vezi 1.5).

3) Două cîmpuri vectoriale  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$  se numesc *coliniare* pe  $D$  dacă există un cîmp scalar  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încit  $\mathbf{Y} = f\mathbf{X}$ .

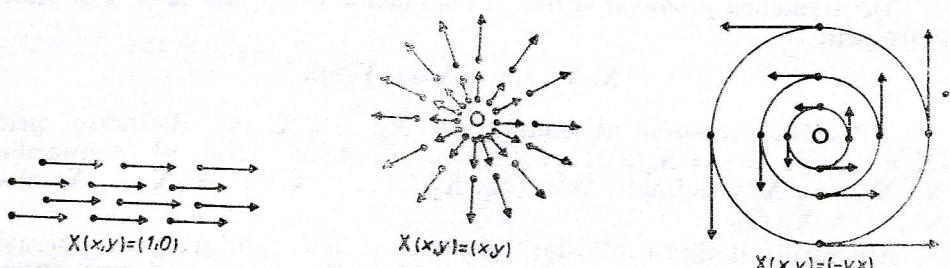


Fig. 1.16

Trei cîmpuri vectoriale  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  și  $Z$  se numesc *coplanare* pe  $D$  dacă există două cîmpuri scalare  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încit  $Z = f\mathbf{X} + g\mathbf{Y}$ .

Exemplu. 1) În fig. 1.16 sunt prezentate trei cîmpuri vectoriale tipice pe  $\mathbb{R}^2$ .

2) O problemă importantă pentru ecologie este fenomenul oscilațiilor populațiilor. Studiind populația piscicoloïă în Marea Adriatică, Volterra și Lotka au ajuns la concluzia că viteza de evoluție locală a unui sistem biologic format dintr-o specie „răpitor” și o specie „pradă” are expresia  $\mathbf{X}(x, y) = (x(a - by), y(cx - d))$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , unde  $a, b, c, d$  sunt constante.

3) *Cimp gravitațional* (fig. 1.17). Fie  $\mathbb{R}^3$  modelul matematic al spațiului fizic tridimensional și  $m$  o masă situată în origine. Forța de atracție cu care acționează masa  $m$  asupra masei unitate situată în punctul arbitrar  $(x, y, z)$  este (v. 2.2)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

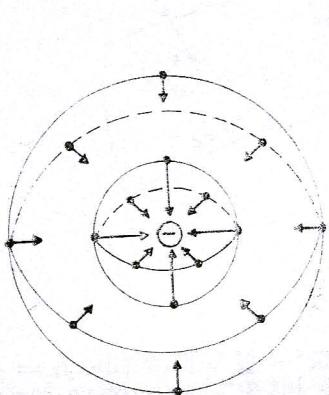


Fig. 1.17

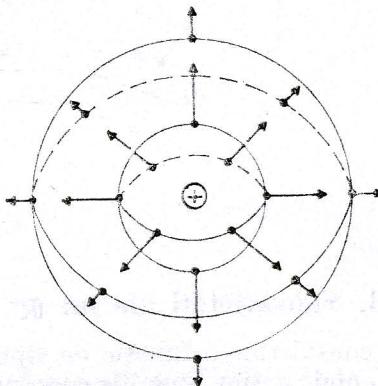


Fig. 1.18

Functia  $(x, y, z) \rightarrow \mathbf{F}(x, y, z)$  se numește *cimp gravitațional* (newtonian) produs de masa  $m$  pe  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

4) *Cimp electrostatic* (fig. 1.17, 1.18). Fie  $\mathbb{R}^3$  modelul matematic al spațiului fizic tridimensional și  $q_0$  o sarcină electrică situată în origine. Forța  $\mathbf{E}$  cu care sarcina  $q_0$  acționează asupra sarcinii  $q = +1$  (unitate de sarcină electrică în SI, 1 coulomb = 1 As) situată în punctul arbitrar  $(x, y, z)$  este (v. 2.2)

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}),$$

unde  $\epsilon$  este permisivitatea mediului în care sunt plasate sarcinile.

Functia  $(x, y, z) \rightarrow \mathbf{E}(y, x, z)$  se numește *cimp electrostatic* produs de sarcina  $q_0$  pe  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

5) *Cimpul vitezelor în masa unui fluid*. Fie  $\mathbb{R}^3$  modelul matematic al spațiului fizic tridimensional și o sursă de debit  $q$  situată în origine. La trecerea prin punctul  $(x, y, z)$  o particulea de fluid care izvorăște din origine are viteză (v. 2.3.)

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Functia  $(x, y, z) \rightarrow \mathbf{V}(x, y, z)$  se numește *cimpul vitezelor* în masa fluidului.

6) *Gradientul*. Fie  $D$  o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$  și  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  un cimp scalar de clasă  $C^1$ . Acestui cimp scalar îl putem atașa cimpul vectorial

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{U}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \mathbf{U}_n$$

numit *gradientul* lui  $f$ .

Fie  $M_c : f(x_1, \dots, x_n) = c$  mulțimea de nivel constant  $c$  atașată lui  $f$  și  $x_0 \in M_c$ . Să arătăm că  $\text{grad } f(x_0)$  este ortogonal pe orice curbă din  $M_c$  care trece prin  $x_0$  cu viteză  $\alpha'(t_0)$ . Pentru a dovedi acest lucru fie  $I \subset \mathbb{R}$  și  $\alpha = (x_1, \dots, x_n): I \rightarrow \mathbb{R}^n$  o curbă de clasă  $C^1$  cu proprietățile  $\alpha(t_0) = x_0$  și  $\alpha'(I) \subset M_c$ . Derivind identitatea  $f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = c$ ,  $t \in I$ , în raport cu  $t$ , găsim

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = 0.$$

În particular,  $(\text{grad } f(x_0), \alpha'(t_0)) = 0$ , adică  $\text{grad } f(x_0) \perp \alpha'(t_0)$ . În baza acestei proprietăți se spune că gradientul este un *cimp vectorial normal* la oricare dintre mulțimile de nivel constant  $M_c$  (fig. 1.19).

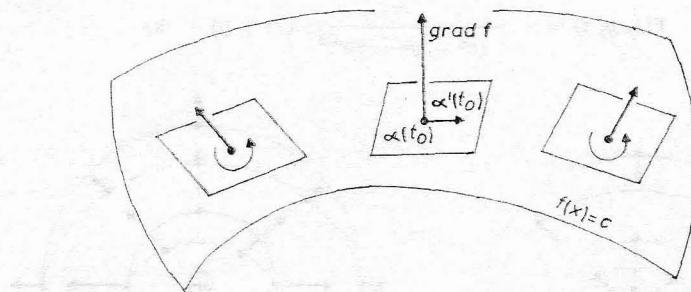


Fig. 1.19

### 1.3. Subvarietăți ale lui $\mathbb{R}^n$

Să considerăm o funcție de tipul  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Funcțiile  $f_i = y_i \circ F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $y_i$  sunt funcțiile coordonate ale lui  $\mathbb{R}^m$ , se numesc *componentele euclidiene* ale lui  $F$  și se serie  $F = (f_1, \dots, f_m)$ . Mulțimea

$G(F) = \{(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) | (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$  se numește *graficul funcției*  $F = (f_1, \dots, f_m)$ . Evident  $G(F)$  coincide cu mulțimea valorilor funcției  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ .

Funcția  $F$  este de clasă  $C^p$  dacă și numai dacă componentele  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sunt funcții de clasă  $C^p$ . Unei funcții  $F$  de clasă  $C^1$  i se atașează matricea jacobian

$$J(F) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Dacă  $n = m$ , atunci determinantul matricei  $J(F)$  se numește *jacobianul* lui  $f$  și se notează  $D(f_1, \dots, f_n)/D(x_1, \dots, x_n)$ .

Funcția  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se numește :

- 1) *injectivă* dacă relațiile  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $F(x) = F(y) \in \mathbb{R}^m$  implică  $x = y$ ;
- 2) *surjectivă* dacă  $\forall z \in \mathbb{R}^m$ ,  $\exists x \in \mathbb{R}^n$  astfel încit  $F(x) = z$ ;
- 3) *bijectivă* dacă este injectivă și surjectivă;
- 4) *imersie* dacă este de clasă  $C^1$  și rang  $J(F)(x) = n$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  ( $n \leq m$ );
- 5) *submersie* dacă este de clasă  $C^1$  și rang  $J(F)(x) = m$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  ( $m \leq n$ );
- 6) *regulată* dacă este imersie sau submersie;
- 7) *difeomorfism* pentru  $n = m$ , dacă este de clasă  $C^1$  și dacă posedă inversă de clasă  $C^1$ .

Dacă funcția  $F$  nu este regulată într-un punct  $x$ , atunci  $x$  se numește *punct critic* sau *punct singular*, iar  $F(x)$  se numește *valoare critică* sau *valoare singulară*.

**Teorema funcției inverse.** Fie  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o funcție de clasă  $C^1$ . Dacă  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  este un punct pentru care  $\det J(F)(x_0) \neq 0$ , atunci există o vecinătate  $D$  a lui  $x_0$  astfel încât restricția lui  $F$  la  $D$  să fie un difeomorfism.

**Teorema funcției implicate.** Fie  $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  o funcție de clasă  $C^1$ . Dacă în  $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+m}$  avem  $F(a, b) = 0$  și  $\frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)}(a, b) \neq 0$ , atunci există o vecinătate  $D$  a lui  $a$  și o funcție de clasă  $C^1$  (unică)  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  astfel încât  $g(a) = b$  și  $f(x, g(x)) = 0$ ,  $\forall x \in D$ .

Urmărd modelul suprafeteelor din  $\mathbb{R}^3$  care se definesc cu ajutorul ecuațiilor (implicite sau explicite sau parametrice) atașate unor funcții cel puțin de clasă  $C^1$ , care indeplinesc anumite condiții ce asigură netezimea și absența autointersecțiilor, introducem subvariațile lui  $\mathbb{R}^n$ .

O submulțime  $M$  a lui  $\mathbb{R}^n$  se numește *subvarietație de dimensiune  $m$*  ( $\leq n$ ) dacă pentru fiecare punct  $x \in M$  există o mulțime deschisă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$  care conține pe  $x$  și o submersie  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  astfel încât

$$M \cap D = \{x \mid x \in D, F(x) = 0\}.$$

**Teoremă.** Fie  $M$  o submulțime a lui  $\mathbb{R}^n$ . Următoarele proprietăți sunt echivalente:

- 1)  $M$  este o subvarietate de dimensiune  $m$  a lui  $\mathbb{R}^n$ ;
  - 2) pentru fiecare punct  $x \in M$  există o mulțime deschisă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$  care conține pe  $x$  și  $n-m$  funcții  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n-m$ , de clasă  $C^1$  astfel încât vectorii grad  $f_i(x)$  să fie liniar independenti și  $M \cap D = \{x | x \in D, f_1(x) = 0, \dots, f_{n-m}(x) = 0\}$ ;
  - 3) pentru fiecare punct  $x \in M$  există o mulțime deschisă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$  care conține pe  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , o mulțime deschisă  $E$  din  $\mathbb{R}^m$  care conține pe  $(x_1, \dots, x_m)$  și  $n-m$  funcții  $h_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n-m$ , de clasă  $C^1$  astfel încât, abstracție făcând eventual de o permutare a coordonatelor,  $M \cap D$  să fie graficul aplicației  $(h_1, \dots, h_{n-m}) : E \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ ;
  - 4) pentru fiecare punct  $x \in M$  există o mulțime deschisă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$  care conține pe  $x$ , o mulțime deschisă  $E$  din  $\mathbb{R}^m$  și o imersie injectivă  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  cu imaginea  $M \cap D$  și cu inversa  $g^{-1} : M \cap D \rightarrow E$  continuă.

*Demonstrație.* Schematic  $1) \Leftrightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 2)$ . Proprietatea  $2)$  este o traducere a proprietății  $1)$  utilizând componentele  $f_1, \dots, f_{n-m}$  ale submersiei  $F$ . Reciproc, dacă  $2)$  este adevărată, atunci  $F = (f_1, \dots, f_{n-m}) : D \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  este o submersie în punctul  $x$ . Deoarece determinanții sunt funcții continue, funcția  $F$  rămîne submersie pe o mulțime deschisă ce conține pe  $x$  și deci  $2) \Rightarrow 1)$ .

Proprietatea 3) rezultă din 2) în baza teoremei funcției implicate.  $3) \Rightarrow 4)$ : funcția  $g : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g(u) = (u_1, \dots, u_m, h_1(u), \dots, h_{n-m}(u))$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m)$ , este o imersie injectivă cu imaginea  $M \cap D$  și cu inversa  $g^{-1} : M \cap D \rightarrow E$  continuă.  $4) \Rightarrow 2)$ : reprezentăm imersia  $g$  prin componente sale  $x_1 = g_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n = g_n(u_1, \dots, u_m)$ . Dacă  $\frac{D(g_1, \dots, g_m)}{D(u_1, \dots, u_m)}(u_0) \neq 0$ , atunci prin teorema funcției inverse  $u_1 = \varphi_1(x_1, \dots,$

$\dots, x_m), \dots, u_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_m)$  cu condițiile

$$x_{m+1} = g_{m+1}(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_m)),$$

$$x_n = g_n(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_m)).$$

## Functiile definite prin

satisfac condițiile din 2).

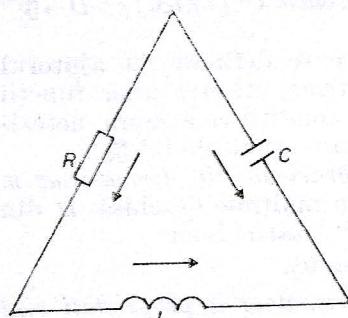


Fig. 1.20

**Exemplu.** Considerăm un circuit *RLC* format dintr-un rezistor, un inductor și un capacitor (fig. 1.20). Prin fiecare ramură trece curent avind intensitatea  $i$  și tensiunea  $v$ . La un moment dat, circuitului i se asociază două triplete de numere reale ( $i_R, i_L, i_C$ ), ( $v_R, v_L, v_C$ ). Acestea sunt legate prin legile Kirchhoff  $i_R = i_L = -i_C$ ,  $v_R + v_L = v_C$  și legea Ohm generalizată  $v_R = \Phi(i_R)$ , cu  $\Phi$  funcție de clasă  $C^1$ .

Schimbând notațiile, asociem circuitului  $RLC$  următoarea multime:

$$M = \left\{ (x_1, \dots, x_6) \mid \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 + x_5 - x_6 = 0, \quad \Phi(x_1) - x_4 = 0 \end{array} \right\},$$

care este o subvarietație de dimensiune 2 a lui  $\mathbb{R}^6$ .

Dacă în fiecare din definițiile subvarietății utilizăm funcții de clasă  $C^p$ ,  $p \geq 1$ , atunci  $M$  se numește *subvarietate de clasă  $C^p$* .

Subvarietățile de dimensiune 0 sunt mulțimi de puncte izolate din  $\mathbb{R}^n$ . Subvarietățile de dimensiune 1 sunt curbe, iar subvarietățile de dimensiune 2 se numesc suprafețe. Subvarietățile de dimensiune  $n$  sunt mulțimi deschise în  $\mathbb{R}^n$ , iar subvarietățile de dimensiune  $n - 1$  se numesc *hipersuprafețe*.

Imaginea unei imersii injective nu este întotdeauna o subvarietate (inversa nu este neapărat continuă). Imaginea unei funcții de clasă  $C^1$  poate fi o subvarietate chiar dacă acea funcție nu este o imersie. De asemenea fiind dată o submersie  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , multimea  $F^{-1}(z)$  este sau nu o subvarietate de dimensiune  $n - m$  a lui  $\mathbb{R}^n$ . În general, fiind date două funcții  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $H : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clasă  $C^1$  care nu verifică peste tot condițiile de definiție a unei subvarietăți, putem obține subvarietăți din  $G^{-1}(z)$  sau din  $H(\mathbb{R}^p)$  eliminând punctele singulare. Acestea sunt fie puncte în care condiția rangului nu este verificată, fie puncte de autointersecție.

Fie  $M$  o subvarietate a lui  $\mathbb{R}^n$  de dimensiune  $m$  și  $D$  o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^m$ . O funcție  $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clasă  $C^1$  cu proprietățile

- 1)  $h(D) \subset M$ ,  
 2)  $h$  este o imersie injectivă,  
 se numește *harta* în  $M$ .

Dacă  $h$  este numai imersie, atunci  $h$  se numește *parametrizare* a regiunii  $h(D)$  din  $M$ . Conform teoremei precedente orice punct  $x \in M$  admite hărți  $h : D \rightarrow M$  astfel încit  $x \in h(D)$ .

Fie  $M$  o subvarietate a lui  $\mathbb{R}^n$  și  $I$  un interval din  $\mathbb{R}$ . O funcție continuă  $\alpha : I \rightarrow M$  se numește *curbă* în  $M$ . Dacă  $I = [a, b]$  și  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , atunci curba  $\alpha$  se numește *închisă*. O curbă închisă  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  cu proprietatea că  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  este injectivă se numește *curbă simplă* și *închisă*.

Un vector  $v$  din  $\mathbb{R}^n$  se numește *tangent* în punctul  $x$  la subvarietatea  $M$  dacă există o curbă  $\alpha : I \rightarrow M$  de clasă  $C^1$  pentru care  $\alpha(t_0) = x$ ,  $\alpha'(t_0) = v$ ,  $t_0 \in I$ . Multimea vectorilor din  $\mathbb{R}^n$  tangenți la  $M$  în  $x$  este un spațiu vectorial al lui  $\mathbb{R}^n$  de dimensiune  $m$  numit *spațiu tangent* la  $M$  în  $x$  și notat  $T_x M$ . Multimea  $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$  se numește *fibrarea tangentă* a lui  $M$  (subvarietate a lui  $\mathbb{R}^{2n}$  de dimensiune  $2m$ ).

Un vector  $w$  din  $\mathbb{R}^n$  se numește *normal* la  $M$  în punctul  $x$  dacă el este ortogonal spațiului tangent  $T_x M$ . Multimea tuturor vectorilor normali la  $M$  în punctul  $x$  este un spațiu vectorial de dimensiune  $n - m$  numit *spațiu normal* la  $M$  în punctul  $x$  și notat  $N_x M$ .

Fie  $M$  o subvarietate a lui  $\mathbb{R}^n$ . O funcție  $\mathbf{X}$  care asociază fiecărui punct  $x \in M$  un vector  $\mathbf{X}(x)$  tangent la  $\mathbb{R}^n$  în punctul  $x$  se numește *cîmp vectorial* pe  $M$ . Dacă  $\mathbf{X}(x) \in T_x M$ ,  $\forall x \in M$ , atunci  $\mathbf{X}$  se numește *cîmp vectorial tangent* la  $M$ , iar dacă  $\mathbf{X}(x) \in N_x M$ ,  $\forall x \in M$ , atunci  $\mathbf{X}$  se numește *cîmp vectorial normal* la  $M$ .

O subvarietate  $M$  se numește *simplu conexă* dacă pentru fiecare punct  $x_0 \in M$  și fiecare curbă închisă  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ ,  $\alpha(a) = \alpha(b) = x_0$  există o funcție continuă  $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M$  astfel încit

$$H(t, 0) = \alpha(t), H(t, 1) = x_0, \quad \forall t \in [a, b], \\ H(0, s) = H(1, s) = x_0, \quad \forall s \in [0, 1].$$

Această definiție conține faptul intuitiv că  $\alpha$  poate fi continuu deformată la punctul  $x_0$ .

O subvarietate  $M$  se numește *conexă* dacă  $\forall x, y \in M$  există o curbă  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  de clasă  $C^1$  pe porțiuni care unește pe  $x$  cu  $y$ , adică  $\alpha(a) = x$ ,  $\alpha(b) = y$ .

O submulțime  $M$  a lui  $\mathbb{R}^n$  se numește *subvarietate de dimensiune  $m$*  ( $m < n$ ), *cu frontieră*, dacă pentru fiecare punct  $x \in M$  există o mulțime deschisă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$  care conține pe  $x$  și  $n - m + 1$  funcții  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n - m + 1$ , de clasă  $C^1$  astfel încit vectorii  $\text{grad } f_i(x)$  să fie liniar independenți și

$$M \cap D = \{x \mid x \in D, f_1(x) = 0, \dots, f_{n-m}(x) = 0, f_{n-m+1}(x) \geq 0\}.$$

Mulțimea

$$\partial M = \{x \mid x \in M \text{ și } f_{n-m+1}(x) = 0\},$$

numită *frontiera* lui  $M$ , este o subvarietate de dimensiune  $m - 1$ . Mulțimea  $M - \partial M$ , numită *interiorul* lui  $M$ , este o subvarietate de dimensiune  $m$ .

#### 1.4. Derivata în raport cu un vector

Fie  $D$  o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ , fie  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  două cîmpuri scalare de clasă  $C^1$  și  $c$  un număr real. Cîmpurile scalare  $f + g$ ,  $cf$ ,  $fg$ ,  $f/g$  sint de clasă  $C^1$  și au loc relațiile

$$\text{grad } (f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g, \text{ grad } (cf) = c \text{ grad } f,$$

$$\text{grad } (fg) = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g, \text{ grad } \frac{f}{g} = \frac{g \text{ grad } f - f \text{ grad } g}{g^2}.$$

**O b s e r v a t i i.** 1) Deoarece  $d/f(x)(h) = (\text{grad } f(x), h)$ , pentru determinarea lui grad  $f(x)$  putem utiliza diferențiala  $d/f(x)(h)$ .

2) Deseori în loc de grad se serie semnul nabla,  $\nabla$ .

Fie  $D$  o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$  și  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  un cimp scalar de clasă  $C^1$ . Fie  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$  și  $\mathbf{X}_x$  un vector tangent la  $D$  în punctul  $x$ . Fixăm intervalul  $I \ni t$  astfel încât  $x + tX \in D$ , unde  $X$  este punctul corespunzător vectorului  $\mathbf{X}_x$ . Evident  $t \mapsto x + tX$  reprezintă restricția unei drepte și dacă  $f$  este de clasă  $C^1$ , atunci funcția compusă  $t \mapsto f(x + tX)$  este tot de clasă  $C^1$ .

Numărul

$$D_{\mathbf{X}_x} f = \frac{d}{dt} f(x + tX) \Big|_{t=0}$$

se numește *derivata lui  $f$  în raport cu vectorul  $\mathbf{X}_x$* .

Derivata lui  $f$  în raport cu vectorul  $\mathbf{X}_x$  reprezintă acțiunea vectorului  $\mathbf{X}_x$  asupra funcției  $f$  indicând cantitativ schimbarea lui  $f(x)$  cînd  $x$  se mișcă în sensul lui  $\mathbf{X}_x$ . Dacă  $\mathbf{X}_x$  este un vîrstor, atunci  $D_{\mathbf{X}_x} f$  se mai numește și *derivata lui  $f$  după direcția  $\mathbf{X}_x$* .

**Lemă.** Dacă  $\mathbf{X}_x = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , atunci

$$D_{\mathbf{X}_x} f = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = (\mathbf{X}_x, \nabla f(x)) = df(x)(\mathbf{X}),$$

unde  $\nabla f$  este gradientul lui  $f$ , iar  $df$  este diferențiala lui  $f$ .

Demonstrația este imediată ca urmare a teoremei de derivare a unei funcții compuse.

Dacă  $D_{\mathbf{X}_x} f = (\mathbf{X}_x, \nabla f(x)) = 0$ ,  $\forall \mathbf{X}_x \in T_x D$ , atunci  $x$  este un punct critic al lui  $f$ , adică  $\nabla f(x) = 0$ .

Fie  $\nabla f(x) \neq 0$ . Utilizînd inegalitatea Cauchy-Schwarz

$$|D_{\mathbf{X}_x} f| = |(\mathbf{X}_x, \nabla f(x))| \leq \|\mathbf{X}_x\| \|\nabla f(x)\|,$$

în care egalitatea are loc dacă și numai dacă  $\mathbf{X}_x$  și  $\nabla f(x)$  sunt coliniari, rezultă că funcția  $\mathbf{X}_x \rightarrow D_{\mathbf{X}_x} f$ ,  $\|\mathbf{X}_x\| = 1$  își atinge minimul —  $\|\nabla f(x)\|$  pentru  $\mathbf{X}_x = -\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$ , maximul  $\|\nabla f(x)\|$  pentru  $\mathbf{X}_x = \nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$ . Astfel  $-\nabla f(x)$  [respectiv  $\nabla f(x)$ ] indică local direcția și sensul în care  $f$  descrește (crește) cel mai repede. De aceea gradientul este des utilizat în teoria extremelor.

În ipoteza  $\nabla f(x) \neq 0$ , relația  $D_{\mathbf{X}_x} f = 0$  este echivalentă cu faptul că  $\mathbf{X}_x$  este tangent în punctul  $x$  la hipersuprafața de nivel constant a lui  $f$  care trece prin punctul  $x$ .

**Teoremă.** Fie  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  funcții de clasă  $C^1$ ,  $\mathbf{X}_x, \mathbf{Y}_x \in T_x D$  și  $a, b \in \mathbb{R}$ . Sînt satisfăcute relațiile

$$D_{a\mathbf{X}_x + b\mathbf{Y}_x} f = aD_{\mathbf{X}_x} f + bD_{\mathbf{Y}_x} f,$$

$$D_{\mathbf{X}_x}(af + bg) = aD_{\mathbf{X}_x} f + bD_{\mathbf{X}_x} g,$$

$$D_{\mathbf{X}_x}(fg) = g(x)D_{\mathbf{X}_x} f + f(x)D_{\mathbf{X}_x} g.$$

Demonstrația se bazează pe lemă și pe proprietățile gradientilor.

Folosind noțiunea precedentă, putem defini acțiunea unui cîmp vectorial  $\mathbf{X}$  asupra unui cîmp scalar  $f$  de clasă  $C^1$  (ambele definite pe  $D$ ) ca fiind cîmpul scalar notat cu  $D_{\mathbf{X}}f$  și a cărei valoare în fiecare punct  $x \in D$  este numărul  $D_{\mathbf{X}(x)}f$ . Cîmpul scalar  $D_{\mathbf{X}}f$  se numește *derivata cîmpului scalar f în raport cu cîmpul vectorial X*. În particular, pentru cazul  $n = 3$ , avem

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad D_j f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad D_k f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

În baza teoremei precedente deducem că derivata  $D_{\mathbf{X}}f$  are următoarele proprietăți :

$$\begin{aligned} D_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}}h &= fD_{\mathbf{X}}h + gD_{\mathbf{Y}}h, \\ D_{\mathbf{X}}(af + bg) &= aD_{\mathbf{X}}f + bD_{\mathbf{X}}g, \\ D_{\mathbf{X}}(fg) &= fD_{\mathbf{X}}g + gD_{\mathbf{X}}f, \end{aligned}$$

unde  $f, g, h$  sunt funcții reale,  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$  sunt cîmpuri vectoriale, iar  $a, b$  sunt numere reale.

**Observație.** Relația  $D_{\mathbf{X}}f = (\nabla f, \mathbf{X})$  pune în evidență că  $D_{\mathbf{X}}f = 0$  dacă și numai dacă  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial tangent la mulțimile de nivel constant ale lui  $f$ .

Noțiunea pe care o introducem acum generalizează derivata  $D_{\mathbf{x}_x}f$  și reprezintă o operație asupra cîmpurilor vectoriale. Fie  $\mathbf{Y}$  un cîmp vectorial definit pe mulțimea deschisă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathbf{X}_x$  un vector tangent la  $D$  în punctul  $x$ . Presupunem că  $\mathbf{Y}$  este de clasă  $C^1$  și considerăm funcția compusă  $t \rightarrow \mathbf{Y}(x + t\mathbf{X})$ , unde  $I \ni t$  este determinat de condiția  $x + t\mathbf{X} \in D$ .

Vectorul

$$D_{\mathbf{x}_x}\mathbf{Y} = \frac{d}{dt} \mathbf{Y}(x + t\mathbf{X})|_{t=0}$$

tangent la  $D$  în punctul  $x$  se numește *derivata covariantă a lui Y în raport cu  $\mathbf{X}_x$* .

Derivata covariantă  $D_{\mathbf{x}_x}\mathbf{Y}$  măsoară rata inițială a schimbării lui  $\mathbf{Y}(x)$  cînd punctul  $x$  se mișcă în sensul lui  $\mathbf{X}_x$  (fig. 1.21) și deci reprezintă o acțiune a vectorului  $\mathbf{X}_x$  asupra cîmpului vectorial  $\mathbf{Y}$ .

**Lemă.** Dacă  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1\mathbf{U}_1 + \dots + \mathbf{Y}_n\mathbf{U}_n$  este un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  și  $\mathbf{X}_x$  este un vector tangent la  $D$  în punctul  $x$ , atunci

$$D_{\mathbf{x}_x}\mathbf{Y} = (D_{\mathbf{x}_x}\mathbf{Y}_1)\mathbf{U}_1(x) + \dots + (D_{\mathbf{x}_x}\mathbf{Y}_n)\mathbf{U}_n(x).$$

*Demonstrație.* Se observă că  $\mathbf{Y}(x + t\mathbf{X}) = \mathbf{Y}_1(x + t\mathbf{X})\mathbf{U}_1(x + t\mathbf{X}) + \dots + \mathbf{Y}_n(x + t\mathbf{X})\mathbf{U}_n(x + t\mathbf{X})$ .

$\mathbf{U}_n(x + t\mathbf{X})$ . A deriva un astfel de cîmp vectorial în  $t = 0$  înseamnă a deriva componentele sale în  $t = 0$ . Înținând seama de definiția derivatei în raport cu un vector, lema devine evidentă.

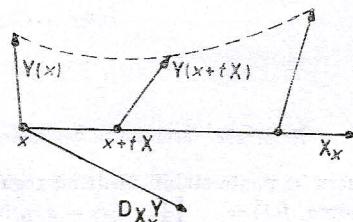


Fig. 1.21

Proprietățile derivatei covariante rezultă din lema precedentă și din proprietățile derivatei  $D_{X_x} f$ .

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$  două cîmpuri vectoriale de clasă  $C^1$  pe  $D$ , fie  $\mathbf{V}_x, \mathbf{W}_x \in T_x D$  și  $a, b \in \mathbb{R}$ . Arem

$$D_{a\mathbf{V}_x + b\mathbf{W}_x} \mathbf{Y} = aD_{\mathbf{V}_x} \mathbf{Y} + bD_{\mathbf{W}_x} \mathbf{Y}, \quad D_{\mathbf{V}_x}(f\mathbf{Y}) = (D_{\mathbf{V}_x} f)\mathbf{Y} + fD_{\mathbf{V}_x} \mathbf{Y},$$

$$D_{\mathbf{V}_x}(a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}) = aD_{\mathbf{V}_x} \mathbf{X} + bD_{\mathbf{V}_x} \mathbf{Y}, \quad D_{\mathbf{V}_x}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (D_{\mathbf{V}_x} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) + (\mathbf{X}, D_{\mathbf{V}_x} \mathbf{Y}).$$

Noțiunea de mai sus se poate extinde considerind derivata covariantă a unui cîmp vectorial  $\mathbf{Y}$  de clasă  $C^1$  în raport cu cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$ . Rezultatul este un cîmp vectorial care se notează cu  $D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$  și a cărei valoare în punctul  $x$  este vectorul  $D_{\mathbf{X}_{(x)}} \mathbf{Y}$ . Dacă  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 \mathbf{U}_1 + \dots + \mathbf{Y}_n \mathbf{U}_n$ , atunci  $D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = (D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}_1) \mathbf{U}_1 + \dots + (D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}_n) \mathbf{U}_n$ . În baza celor precedente rezultă că  $D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$  are următoarele proprietăți :

$$D_{f\mathbf{V} + g\mathbf{W}} \mathbf{Y} = fD_{\mathbf{V}} \mathbf{Y} + gD_{\mathbf{W}} \mathbf{Y}, \quad D_{\mathbf{V}}(f\mathbf{Y}) = (D_{\mathbf{V}} f)\mathbf{Y} + fD_{\mathbf{V}} \mathbf{Y},$$

$$D_{\mathbf{V}}(a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}) = aD_{\mathbf{V}} \mathbf{X} + bD_{\mathbf{V}} \mathbf{Y}, \quad D_{\mathbf{V}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (D_{\mathbf{V}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) + (\mathbf{X}, D_{\mathbf{V}} \mathbf{Y}).$$

**O b s e r v a t i i.** 1) Fie derivata covariantă  $D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ . Rolul lui  $\mathbf{X}$  este algebric, iar  $\mathbf{Y}$  se derivează.

2) Derivatele covariante ale cîmpurilor fundamentale  $\mathbf{U}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sunt nule deoarece acestea din urmă sunt cîmpuri vectoriale paralele.

3) Fie  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$  două cîmpuri vectoriale de clasă  $C^1$ . Cîmpul vectorial definit prin  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - D_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$  se numește *crosul cîmpurilor*  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$ .

**Aplicații. 1.3.** Fie  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $f(x) = a_1 x_1^{\alpha_1} + \dots + a_n x_n^{\alpha_n}$ , unde  $\alpha_i > 0$ , iar  $a_1, \dots, a_n$  este o progresie geometrică cu rația  $r$ . Să se calculeze  $D_{\mathbf{v}} f(x_0)$  pentru  $\mathbf{v} = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)$  și  $x_0 = (1, \dots, 1)$ .

**Rezolvare.** Se știe că  $D_{\mathbf{v}} f(x_0) = (\mathbf{v}, \nabla f(x_0))$ . Dar  $\nabla f(x) = (a_1 \alpha_1 x_1^{\alpha_1-1}, \dots, a_n \alpha_n x_n^{\alpha_n-1})$  implică  $\nabla f(x_0) = (a_1 \alpha_1, \dots, a_n \alpha_n)$ . Deci  $D_{\mathbf{v}} f(x_0) = a_1 + \dots + a_n = a_1(r^n - 1)/(r - 1)$ . Fie  $r \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ ; dacă  $a_1 > 0$  ( $a_1 < 0$ ), atunci  $f$  crește (descrește) pe direcția și sensul indicate de  $\mathbf{v}_{x_0}$ .

**1.4.** Să se verifice că  $\mathbf{X} = \mathbf{U}_1 + \dots + \mathbf{U}_n$  este un cîmp vectorial tangent la mulțimile de nivel constant ale funcției  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

**Rezolvare.** Trebuie să verificăm relația  $D_{\mathbf{X}} f = (\nabla f, \mathbf{X}) = 0$ , adică  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ . Acest lucru se poate stabili utilizând regulile de derivare a unui determinant sau scriind pe  $f(x)$  în forma  $f(x) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$ , fiind un determinant Vandermonde. Totuși calea cea mai scurtă este să observăm că  $f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n)$ ; atunci, notind  $u_1 = x_1 - x_n, \dots, u_{n-1} = x_{n-1} - x_n$ , găsim

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = 0.$$

**1.5.** Fie cimpurile vectoriale  $\mathbf{X} = x_1 \mathbf{U}_1 + \dots + x_n \mathbf{U}_n$  și  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$ . Să se determine  $D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ .

*Rezolvare.* În baza regulilor de derivare covariantă putem scrie  $D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = D_{\mathbf{X}} \left( \frac{1}{\|\mathbf{X}\|} \mathbf{X} \right) =$

$$= \left( D_{\mathbf{X}} \frac{1}{\|\mathbf{X}\|} \right) \mathbf{X} + \frac{1}{\|\mathbf{X}\|} D_{\mathbf{X}} \mathbf{X} = \left( \mathbf{X}, \nabla \frac{1}{\|\mathbf{X}\|} \right) \mathbf{X} + \frac{1}{\|\mathbf{X}\|} \mathbf{X} = \left( \mathbf{X}, -\frac{1}{\|\mathbf{X}\|^2} \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \right) \mathbf{X} +$$

$$+ \frac{1}{\|\mathbf{X}\|} \mathbf{X} = 0.$$

Variantă:  $\mathbf{Y} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \mathbf{U}_1 + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \mathbf{U}_n$ ,  $D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} =$

$$= \sum_{i=1}^n D_{\mathbf{X}} \left( \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \right) \mathbf{U}_i \text{ și } D_{\mathbf{X}} \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = 0.$$

Rezultatul obținut arată că  $\mathbf{X}$  este un cimp vectorial tangent la mulțimile de nivel constant atașate funcțiilor  $f_i : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_i(x) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}.$$

Acstea mulțimi sunt conuri cu virful în origine. Funcțiile  $f_i$  nu sunt funcțional independente întrucât  $\sum_{i=1}^n f_i^2 = 1$ .

## 1.5. Cimpurile vectoriale ca operatori liniari și derivări

În acest paragraf vom utiliza notații și convenții specifice calculului tensorial. Astfel indicii vor ocupa poziții inferioare sau superioare și în consecință sumele vor fi marcate prin convenția Einstein.

Fie  $D$  o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ . Mulțimea  $C^\infty(D)$  a tuturor funcțiilor reale (cimpurilor scalare) de clasă  $C^\infty$  definite pe  $D$  este un spațiu vectorial real. Deoarece înmulțirea funcțiilor reale este o operație  $\mathbb{R}$ -biliniară, comutativă, mulțimea  $C^\infty(D)$  este o algebră comutativă.

Fie  $x = (x^1, \dots, x^n) \in D$  și  $f \in C^\infty(D)$ . Unui vector  $\mathbf{X}_x$  tangent la  $D$  în punctul  $x$  i se asociază numărul  $\mathbf{X}_x(f) = D_{\mathbf{X}_x} f$  numit derivata lui  $f$  în raport cu  $\mathbf{X}_x$  (vezi 1.4). Derivata  $\mathbf{X}_x(f)$  are următoarele proprietăți:

$$\mathbf{X}_x(af + bg) = a\mathbf{X}_x(f) + b\mathbf{X}_x(g)$$

$$\mathbf{X}_x(fg) = (\mathbf{X}_x(f))g(x) + f(x)\mathbf{X}_x(g)$$

$$(a\mathbf{X}_x + b\mathbf{Y}_x)(f) = a\mathbf{X}_x(f) + b\mathbf{Y}_x(f),$$

unde  $\mathbf{X}_x, \mathbf{Y}_x$  sunt vectori tangenți la  $D$  în punctul  $x$ ,  $a$  și  $b$  sunt numere reale, iar  $f, g \in C^\infty(D)$ .

Să privim acum lucrurile dintr-un alt punct de vedere și anume, regula  $f \rightarrow \mathbf{X}_x(f)$ , cu proprietăți convenabile, determină bine pe  $\mathbf{X}_x$ . Astfel sătem conduită la următoarea alternativă ca definiție a vectorilor tangenți, unanim acceptată în lucrările actuale de geometrie diferențială.

Fie  $x$  un punct fixat din  $D$ . O funcție  $\mathbf{X}_x : C^\infty(D) \rightarrow \mathbb{R}$  care satisfac condițiile:

- 1) este liniară, adică

$$\mathbf{X}_x(af + bg) = a\mathbf{X}_x(f) + b\mathbf{X}_x(g),$$

2) este o derivare, adică

$$\mathbf{X}_x(fg) = (\mathbf{X}_x(f))g(x) + f(x)\mathbf{X}_x(g),$$

unde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f, g \in C^\infty(D)$ , se numește *vector tangent la D în punctul x*.

Se observă că funcția definită prin  $\mathbf{0}_x(f) = 0$ ,  $\forall f \in C^\infty(D)$ , deci *vectorul zero*, ca și operatorii  $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_x, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_x$  sunt vectori tangenți la  $D$  în punctul  $x$ . De asemenea, dacă  $f = g = 1$ , atunci  $\mathbf{X}_x(1) = 2\mathbf{X}_x(1)$  și deci  $\mathbf{X}_x(1) = 0$ . În plus  $\mathbf{X}_x(c) = c\mathbf{X}_x(1) = 0$ , pentru orice funcție constantă  $c$ . Identificând funcțiile constante cu valorile lor, se poate afirma că valorile oricărui vector tangent pentru scalari sunt nule.

Fie  $T_x D$  mulțimea tuturor vectorilor tangenți la  $D$  în punctul  $x$ . Elementele lui  $T_x D$  sunt funcții reale definite pe  $C^\infty(D)$  și deci are sens suma a doi vectori tangenți și produsul dintre un număr real și un vector tangent. Mai mult, pentru oricare  $x \in D$ , mulțimea  $T_x D$  este un spațiu vectorial real, numit *spațiul tangent la D în punctul x*.

**Teoremă.** *Mulțimea  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x_0}, i = 1, \dots, n \right\}_{x_0}$  este o bază a spațiului vectorial  $T_{x_0} D$  (reper în punctul  $x_0$ ).*

**Demonstrație.** Evident  $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x_0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , fac parte din  $T_{x_0} D$ . Să arătăm că acești vectori sunt liniar independenti. Pentru aceasta pornim de la relația  $a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x_0} = 0$  și folosim funcțiile coordonate  $x^j: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . În baza definiției vectorului tangent, a faptului că  $T_{x_0} D$  este un spațiu vectorial și a observației  $\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$  rezultă  $0 = a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x_0} (x^j) = a^i \left. \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right|_{x_0} = a^i \delta_i^j = a^j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Deci vectorii tangenți  $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x_0}$  sunt liniar independenti.

A rămas să demonstrăm că  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x_0}, i = 1, \dots, n \right\}_{x_0}$  generează pe  $T_{x_0} D$ . Pentru aceasta observăm că pe o vecinătate convexă a lui  $x_0$  și pentru orice  $f \in C^\infty(D)$  avem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)(x^i - x_0^i) + f_{ij}(x)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j).$$

Conform definiției lui  $\mathbf{X}_x$  și a observației că valorile lui  $\mathbf{X}_x$  pe constante sunt nule, găsim

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_x f &= \mathbf{X}_x(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) + \mathbf{X}_x(f_{ij}(x))(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \\ &\quad + 2f_{ij}(x)\mathbf{X}_x(x^i)(x^j - x_0^j). \end{aligned}$$

Înlocuirea  $x = x_0$  implică

$$\mathbf{X}_{x_0} f = \mathbf{X}_{x_0}(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

Ținând seama că  $f \in C^\infty(D)$  este arbitrară și notind  $\mathbf{X}_{x_0}(x^i) = a^i$ , deducem

$$\mathbf{X}_{x_0} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0}.$$

Numerele  $\mathbf{X}_{x_0}(x^i) = a^i$  se numesc *componentele lui*  $\mathbf{X}_{x_0}$ , iar reperul  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \right\}_{x_0}$  se numește *reper natural*.

Dacă raportăm pe  $T_{x_0} D$  la reperul natural, atunci adunarea a doi vectori se reduce la adunarea componentelor corespondente, iar înmulțirea unui vector cu un număr real se reduce la înmulțirea componentelor vectorului cu acel număr.

**Exemplu.** Pentru  $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial x} + 5 \frac{\partial}{\partial y}$  și  $k \in \mathbb{R}$  găsim

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = 2 \frac{\partial}{\partial x} + 3 \frac{\partial}{\partial y}, \quad k\mathbf{X} = k \frac{\partial}{\partial x} - 2k \frac{\partial}{\partial y}.$$

O funcție  $\mathbf{X} : D \rightarrow \bigcup_{x \in D} T_x D$ ,  $\mathbf{X}(x) \in T_x D$ , se numește *cîmp vectorial* pe  $D$ .

Adunarea dintre două cîmpuri vectoriale și produsul dintre o funcție reală și un cîmp vectorial se definesc punctual.

Cîmpurile vectoriale definite prin

$$x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \quad i = 1, \dots, n$$

și notate cu  $\partial/\partial x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , se numește *cîmpuri fundamentale*. Ansamblul lor se numește *cîmpul reperului natural*.

**Teoremă.** Dacă  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial pe  $D$ , atunci există  $n$  funcții reale  $X^i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , astfel încât

$$\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

*Demonstrație.* Prin definiție  $\mathbf{X}$  asociază lui  $x \in D$  un vector,  $\mathbf{X}(x)$  tangent la  $D$  în punctul  $x$ . Dar  $\mathbf{X}(x) = X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$  și regulile  $x \rightarrow X^i(x)$ ,  $x \in D$ , definesc (unic) funcțiile  $X^i : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Funcțiile reale  $X^i$  se numesc *componentele* cîmpului  $\mathbf{X}$ . Cîmpul vectorial  $\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  se numește de *clasă*  $C^p$  dacă funcțiile  $X^i$  sunt de clasă  $C^p$ .

**Exemplu.**  $\mathbf{X}(x, y) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + e^y \frac{\partial}{\partial y}$  este un cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$ .

Alternativ, cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  poate fi privit ca fiind aplicația  $\mathbf{X} : C^\infty(D) \rightarrow C^\infty(D)$  care satisface condițiile :

1) este liniară, adică

$$\mathbf{X}(af + bg) = a\mathbf{X}(f) + b\mathbf{X}(g),$$

2) este o derivare, adică

$$\mathbf{X}(fg) = (\mathbf{X}(f))g + f\mathbf{X}(g),$$

unde  $a, b \in \mathbb{R}$ , iar  $f, g \in C^\infty(D)$ .

Fie  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$  două cîmpuri vectoriale de clasă  $C^\infty$  pe  $D$ . Cîmpul vectorial  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  definit prin

$$f \rightarrow [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f))$$

se numește *croșetul cîmpurilor*  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$ .

Evident  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$ . De asemenea pentru oricare trei cîmpuri vectoriale  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  de clasă  $C^\infty$  se satisfacă identitatea Jacobi

$$[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = 0.$$

Mulțimea  $\mathfrak{X}(D)$  a tuturor cîmpurilor vectoriale de clasă  $C^\infty$  pe  $D$  este un spațiu vectorial real infinit dimensional. Deoarece croșetul  $[\cdot, \cdot]$  :  $\mathfrak{X}(D) \times \mathfrak{X}(D) \rightarrow \mathfrak{X}(D)$  este biliniar peste cîmpul numerelor reale, anti-comutativ și verifică identitatea Jacobi, mulțimea  $\mathfrak{X}(D)$  se numește *algebră Lie*.

Fie  $T_x D$  spațiul tangent la  $D$  în punctul  $x$  și  $\omega_x$  o 1-formă în  $x$ , adică o transformare liniară  $\omega_x : T_x D \rightarrow \mathbb{R}$ . Mulțimea tuturor 1-formelor în  $x$  este un spațiu vectorial real de dimensiune  $n$ , dualul lui  $T_x D$ . Acest spațiu vectorial se numește spațiul cotangent la  $D$  în punctul  $x$  și se notează cu  $T_x^* D$ .

Fie  $f \in C^\infty(D)$ . Funcția  $df_x : T_x D \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $df_x(\mathbf{X}_x) = \mathbf{X}_x(f)$  se numește *diferențiala lui f în punctul x*.

Această definiție împreună cu definiția vectorilor tangenți arată că  $df_x$  este o 1-formă în punctul  $x$ .

**Teoremă.** Fie  $x^j : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , funcțiile coordonate pe  $D$ . Mulțimea  $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}_{x_0}$  este o bază a lui  $T_{x_0}^* D$  (reper în punctul  $x_0$ ).

**Demonstrație.** Evident  $dx^j|_{x_0}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , aparțin lui  $T_{x_0}^* D$ . Fie  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \right\}_{x_0}$  reperul natural în  $T_{x_0} D$ . Înținând seama de definiția diferențialei, deducem

$$dx^j|_{x_0} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0} (x^j) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \Big|_{x_0} = \delta_i^j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

și deci  $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}_{x_0}$  este bază duală.

Reperul  $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}_{x_0}$  se numește *coreper natural* în  $x_0$ .

Fie  $\mathbf{X}_x = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ . Rezultă  $dx^j|_x(\mathbf{X}_x) = a^i dx^j|_x \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x = a^j$ .

De asemenea, orice 1-formă  $\omega_x \in T_x^* D$  se scrie  $\omega_x = \omega_j dx^j|_x$ ,  $\omega_j$  fiind componentele lui  $\omega_x$  în raport cu coreperul natural. Rezultă  $\omega_x \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \omega_i$ , adică componentele 1-formei  $\omega_x$  sunt valorile lui  $\omega_x$  pentru vectorii reperului natural în  $x$ .

Fie  $C^\infty(D)$  algebra funcțiilor reale de clasă  $C^\infty$  pe  $D$  și  $\mathfrak{X}(D)$  algebra Lie a cimpurilor vectoriale de clasă  $C^\infty$  pe  $D$ .

O funcție  $\omega : \mathfrak{X}(D) \rightarrow C^\infty(D)$  cu  $\omega(\mathbf{X})$  de clasă  $C^\infty$ ,  $\forall \mathbf{X} \in \mathfrak{X}(D)$  și  $\omega(f\mathbf{X} + g\mathbf{Y}) = f\omega(\mathbf{X}) + g\omega(\mathbf{Y})$ ,  $f, g \in C^\infty(D)$ ,  $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(D)$ , se numește 1-formă diferențială pe  $D$ .

Adunarea a două 1-forme diferențiale și produsul dintre o funcție reală și o 1-formă diferențială se definese punctual.

Fie  $\omega$  o 1-formă diferențială. Valorile  $\omega_x$  sunt 1-forme în punctele  $x$ . De aceea expresia locală a unei 1-forme diferențiale este  $\omega_x = \omega_j(x) dx^j|_x$ . Mai scurt, putem scrie  $\omega = \omega_j dx^j$  deoarece 1-formele diferențiale  $dx^1, \dots, dx^n$  sint duale cimpurilor fundamentale  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ .

$\{dx^j, j = 1, \dots, n\}$  se numește *cimpul coreperului natural*. Multimea tuturor 1-formelor diferențiale pe  $D$  va fi notată cu  $\mathfrak{X}^*(D)$ .

O mulțime ordonată  $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\}$  de cimpuri vectoriale se numește *cimp de repere* pe  $D$  dacă  $\{\mathbf{X}_1(x), \dots, \mathbf{X}_n(x)\}$  este o bază în  $T_x D$  pentru oricare punct  $x \in D$ . Analog se definește cimpul de corepere  $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ . Acestea, se numesc *duale* unul altuia dacă  $\omega^b(\mathbf{X}_a) = \delta_a^b$ . Deși în general, cimpurile de repere (sau de corepere) nu există decât pe o vecinătate a punctului  $x$  din  $D$ , totuși faptul că  $D$  este o mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^n$  asigură existența unor exemplare globale din aceste entități.

Dacă  $\{\mathbf{X}_a, a = 1, \dots, n\}$  este un cimp de repere pe  $D$ , atunci orice alt cimp vectorial  $\mathbf{V}$  se exprimă în forma  $\mathbf{V} = V^a \mathbf{X}_a$ . Analog, dacă  $\{\omega^b, b = 1, \dots, n\}$  este un cimp de corepere, atunci orice altă 1-formă diferențială se exprimă în forma  $\eta = \eta_b \omega^b$ .

Fie  $x$  un punct din  $D$  caracterizat, pe de o parte, prin coordonatele  $(x^1, \dots, x^n) = (x^i)$ , iar, pe de altă parte, prin coordonatele  $(x^{i'}, \dots, x^{n'}) = (x'^i)$ , schimbarea de coordonate fiind  $x'^i = x'^i(x^i)$  cu inversa  $x^i = x^i(x'^i)$ , pe o vecinătate a lui  $x$  conținută în  $D$ . Baza  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_x$  se schimbă în  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \right\}_x$

cu legătura  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x = \frac{\partial x'^i}{\partial x^i}(x^i) \frac{\partial}{\partial x'^i} \Big|_x$ ; corespunzător baza duală  $\{dx^j\}_x$  se schimbă în  $\{dx^{i'}\}_x$  cu legătura  $dx^j|_x = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}(x'^i) dx^{i'}|_x$ . Evident

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \delta_{i'}^i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \delta_j^i,$$

Acestea implică

$$X^{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} X^i, \quad \omega'_j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \omega_i.$$

**Observații.** 1) În acest paragraf, mulțimea deschisă  $D$  poate fi înlocuită cu orice subvarietație de dimensiune  $m \geq 1$ , cău sau fără frontieră, a lui  $\mathbb{R}^n$  (vezi 1.3).

2) Fie  $x$  un punct fixat din  $D$  și  $C^\infty(D)_x$  mulțimea tuturor funcțiilor definite pe o vecinătate a lui  $x$ , care sunt de clasă  $C^\infty$  în punctul  $x$ . Domeniul maxim de definiție al unui vector  $\mathbf{X}_x$  este  $C^\infty(D)_x$ .

## 1.6. Operatori diferențiali

**Gradient.** Fie  $C^\infty(D)$  algebra funcțiilor de clasă  $C^\infty$ , iar  $\mathcal{X}(D)$  algebra Lie a cîmpurilor vectoriale de clasă  $C^\infty$  pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Operatorul  $\text{grad} : C^\infty(D) \rightarrow \mathcal{X}(D)$ ,  $f \rightarrow \text{grad } f$  se numește *gradient*. Proprietățile de bază ale operatorului gradient au fost expuse în 1.4.

Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $D$ . Dacă există un cîmp scalar de clasă  $C^\infty$ ,  $j : D \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea  $\mathbf{X} = \text{grad } j$ , atunci  $\mathbf{X}$  se numește *cîmp potențial*,  $j$  se numește *potențialul* lui  $\mathbf{X}$ , iar mulțimile de nivel constant ale lui  $j$  se numesc *mulțimi echipotențiale*. Existența și unicitatea unui potențial vor fi discutate în paragraful următor.

**Hessiana.** Fie  $j \in C^\infty(D)$ . Diferențiala de ordinul doi

$$d^2j(x)(dx) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 j}{\partial x_i \partial x_j}(x) dx_i dx_j$$

se numește *hessiana* lui  $j$  și uneori se notează  $\text{Hess } j$ . Hessiana se utilizează des în problema de extrem și de convexitate.

**Rotor.** Unui cîmp vectorial  $\mathbf{X} = X_1 \mathbf{U}_1 + \dots + X_n \mathbf{U}_n$ , de clasă  $C^\infty$  pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ , îl se poate atașa matricea antisimetrică

$$\text{rot } \mathbf{X} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \end{array} \right]$$

care se numește *rotorul* lui  $\mathbf{X}$ . Ca orice matrice antisimetrică de ordinul  $n$  și aceasta este determinată de  $n(n-1)/2$  elemente posibil nenule (cele situate deasupra diagonalei principale).

Fie  $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$  și  $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_n)$  două cîmpuri vectoriale oarecare pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Notăm cu  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}$  matricea de elemente  $V_i W_j - V_j W_i$ , adică  $\mathbf{V} \wedge \mathbf{W} = [V_i W_j - V_j W_i]$ . Cu această convenție și cu  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$  putem scrie simbolic  $\text{rot } \mathbf{X} = \nabla \wedge \mathbf{X}$  și putem exprima simplu unele proprietăți ale rotorului. De exemplu

$$\nabla \wedge (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \nabla \wedge \mathbf{X} + \nabla \wedge \mathbf{Y}, \quad \nabla \wedge (f \mathbf{X}) = \nabla f \wedge \mathbf{X} + f \nabla \wedge \mathbf{X}.$$

Un cîmp vectorial al cărui rotor este nul peste tot se numește *cîmp irațional*.

Dacă  $n = 3$  (deci în  $\mathbb{R}^3$ ), atunci  $\frac{n(n-1)}{2} = 3$  și matricea  $\text{rot } \mathbf{X}$  este echivalentă cu cîmpul vectorial

$$\text{rot } \mathbf{X} = \left( \frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{k}.$$

Astfel, în  $\mathbb{R}^3$  și numai aici, oricărui cîmp vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  î se poate atașa un alt cîmp vectorial  $\text{rot } \mathbf{X}$  numit rotor. Simbolic putem scrie

$$\text{rot } \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{X},$$

unde  $\times$  este semnul produsului vectorial.

**Divergență.** Fie  $\mathbf{X} = X_1 \mathbf{U}_1 + \dots + X_n \mathbf{U}_n$  un cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Lui î se poate asocia cîmpul scalar definit prin

$$\text{div } \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = (\nabla, \mathbf{X}),$$

numit *divergență* lui  $\mathbf{X}$ . Operatorul  $\text{div} : \mathcal{X}(D) \rightarrow C^\infty(D)$  definit prin  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$  se numește *divergență*.

Fie  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F(x) = (X_1(x), \dots, X_n(x))$  o funcție de clasă  $C^\infty$ . Se observă că  $\text{div } \mathbf{X}$  coincide cu urma matricei jacobian atâtă funcției  $F$ .

Cele mai simple proprietăți ale divergenței sunt :

$$\text{div } (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \text{div } \mathbf{X} + \text{div } \mathbf{Y}, \quad \text{div } (f \mathbf{X}) = (\nabla f, \mathbf{X}) + f \text{div } \mathbf{X}.$$

Dacă  $\text{div } \mathbf{X} = 0$ , atunci cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  se numește *solenoidal*.

Divergența unui cîmp vectorial definește *viteza de contracție-dilatație* a volumelor de către curentul generat de cîmpul vectorial (vezi 3.8).

**Laplacian.** Operatorul  $\Delta$  definit prin

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$$

se numește *laplacian*. Evident  $\Delta f$  coincide cu urma hessianei lui  $f$ , adică

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

O funcție  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^2$  cu proprietatea  $\Delta f = 0$  se numește *funcție armonică*.

**Observație.** Ipoteza „clasă  $C^\infty$ “ este impusă de motive de formalizare matematică (nefiind alterabilă prin „derivări“). În situațiile concrete cîmpurile scalare și vectoriale vor fi de clasă  $C^p$ , unde valoarea minimă a lui  $p$  este impusă de context.

**Aplicația 1.6.** Intensitatea cîmpului electric generat de un dipol electric este definită de formula

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right],$$

unde  $\mathbf{p}$  este momentul de dipol (cîmp vectorial paralel),  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  iar  $\epsilon_0 \approx 8,86 \cdot 10^{-12}$  F/m este constanta dielectrică a vidului. Cîmpul vectorial  $\mathbf{E}$  este definit pe  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , simetric în raport cu o axă de direcție  $\mathbf{p}$ . Fixind  $\mathbf{p} = c\mathbf{k}$  în origine și planul  $y = 0$ , obținem reprezentarea din fig. 1.22.

- 1) Să se verifice că  $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = -(\mathbf{p}, \mathbf{r})/r^3$  este potențialul lui  $4\pi\epsilon_0 \mathbf{E}$ .  
 2) Să se calculeze  $\text{rot } \mathbf{E}$  și  $\Delta f = \text{div } \mathbf{E}$ .

$$\text{Rezolvare. 1) grad } f = -\nabla \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^3} = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})\nabla r^3 - r^3 \nabla(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^6} = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})3r^2 \frac{\mathbf{r}}{r} - r^3 \mathbf{p}}{r^6} = 4\pi\epsilon_0 \mathbf{E}.$$

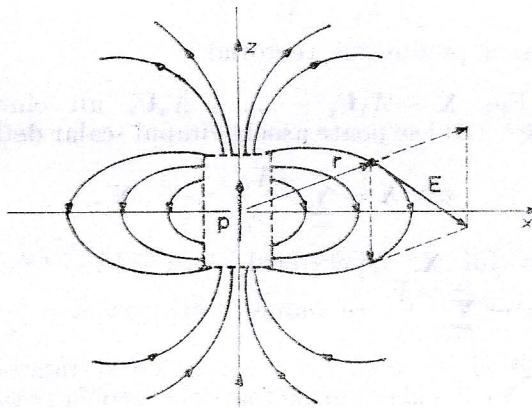


Fig. 1.22

$$2) 4\pi\epsilon_0 \text{rot } \mathbf{E} = \text{rot grad } f = \nabla \times (\nabla f) = 0;$$

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \text{div } \mathbf{E} &= \nabla \cdot \frac{3(\mathbf{p}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{p}}{r^3} = 3 \left[ \left( \frac{\mathbf{r}}{r^5}, \nabla(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \right) + (\mathbf{p}, \mathbf{r}) \left( \nabla \cdot \frac{1}{r^5}, \mathbf{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^5} \right] - \left( \nabla \cdot \frac{1}{r^3}, \mathbf{p} \right) = 3 \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^5} - 15 \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^5} + \frac{9(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^5} + \frac{3(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{r^5} = 0. \end{aligned}$$

Astfel  $\mathbf{E}$  este un cimp irotațional și solenoidal; funcția  $f$  este armonică.

## 1.7. Probleme propuse

1. Fie  $S$  o mulțime convexă din  $\mathbb{R}^n$  și  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu valori reale. Dacă  $f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ ,  $\forall x, y \in S$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , atunci funcția  $f$  se numește *convexă*.

1) Presupunem că  $f$  este de clasă  $C^1$  pe  $S$ . Să se arate că  $f$  este convexă dacă și numai dacă  $f(x) + (\nabla f(x), y - x) \leq f(y)$ ,  $\forall x, y \in S$  (adică dacă și numai dacă hiperplanul tangent la graficul lui  $f$  rămâne mereu sub grafic).

2) Presupunem că  $f$  este de clasă  $C^2$  pe  $S$ . Să se arate că  $f$  este convexă dacă și numai dacă hessiana lui  $f$  este pozitiv semidefinită în fiecare punct al lui  $S$ .

2. Fie  $\mathcal{F}(D)_x \subset C^\infty(D)_x$  mulțimea tuturor funcțiilor  $f \in C^\infty(D)_x$  care într-o vecinătate a lui  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  se pot exprima în forma  $f = c + \sum_{z=1}^n f_z g_z$ , unde  $c = \text{const}$ , iar  $f_z, g_z \in C^\infty(D)_x$  satisfac  $f_z(x) = g_z(x) = 0$ . Să se demon-

streze că un operator liniar  $v : C^\infty(D)_x \rightarrow \mathbb{R}$  este o derivare dacă și numai dacă se anulează pe  $\mathcal{F}(D)_x$ .

Această problemă dă o alternativă pentru definiția vectorilor tangenți care se extinde ușor la vectori tangenți de ordin superior [6].

**3.** Fie  $p \in D \subset \mathbb{R}^n$  și perechea  $(x, a)$ , unde  $x$  este o hartă a lui  $D$  al cărui domeniu conține pe  $p$ , iar  $a \in \mathbb{R}^n$ . Spunem că  $(x, a)$  este echivalentă cu  $(y, b)$  dacă  $a = (J(\Phi))(z) b$ , unde  $z = y(p)$ ,  $\Phi = x \circ y^{-1}$  și  $J(\Phi)$  este matricea jacobian. Să se demonstreze că această definiție determină o relație de echivalență, iar multimea către care este un spațiu vectorial.

Fie  $\{x, a\}$  clasa de echivalență care conține pe  $(x, a)$ . Să se arate că funcția  $\{x, a\} \rightarrow a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$  este un izomorfism între  $V$  și  $T_p D$ , independent de perechea particulară fixată.

Această problemă dă o alternativă pentru definiția vectorilor tangenți a cărei esență este bună și pentru varietățile infinit dimensionale [6, 22].

**4.** Să se demonstreze că dacă cîmpurile vectoriale  $X$  și  $Y$  sunt tangente la o hipersuprafață, atunci și  $[X, Y]$  este un cîmp vectorial tangent la hipersuprafață respectivă.

**5.** Să se determine funcțiile  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clasă  $C^\infty$  pentru care matricea jacobian este matricea unitate de ordinul  $n$ . Aceeași problemă în cazul în care matricea jacobian este o matrice diagonală de forma diag  $(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n))$ .

**6.** Să se determine polinoamele armonice în două variabile.

*Indicație.* Soluțiile polinomiale ale ecuației Laplace se numesc *polinoame armonice*. O bază  $\{P_n(x, y), Q_n(x, y), n \in \mathbb{N}\}$  a spațiului vectorial al tuturor polinoamelor armonice în două variabile poate fi definită prin  $(x + iy)^n = P_n(x, y) + iQ_n(x, y)$ . Rezultă

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ Q_0 = 0 \end{cases}, \begin{cases} P_1 = x \\ Q_1 = y \end{cases}, \begin{cases} P_2 = x^2 - y^2 \\ Q_2 = 2xy \end{cases}, \begin{cases} P_3 = x^3 - 3xy^2 \\ Q_3 = 3x^2y - y^3 \end{cases}, \begin{cases} P_4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \\ Q_4 = 4x^3y - xy^3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} P_5 = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 \\ Q_5 = y^5 - 10x^2y^3 + 5x^4y \end{cases}, \begin{cases} P_6 = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6 \\ Q_6 = 6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} P_7 = x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6 \\ Q_7 = 7x^6 - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7 \end{cases}, \begin{cases} P_8 = x^8 + y^8 - 28x^2y^2(x^4 + y^4) + 70x^4y^4 \\ Q_8 = 8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^3y^5 - 8xy^7 \end{cases}.$$

Formulele de recurență sint

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ Q_0 = 1 \end{cases}, \begin{cases} P_{n+1} = xP_n - yQ_n \\ Q_{n+1} = yP_n + xQ_n \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} P_{n+2} = 2xP_{n+1} - (x^2 + y^2)P_n \\ Q_{n+2} = 2xQ_{n+1} - (x^2 + y^2)Q_n \end{cases}.$$

**7.** Să se arate că orice funcție armonică  $j(x, y)$  (soluție a ecuației Laplace) în două variabile poate fi dezvoltată în vecinătatea unui punct regulat în serie de polinoame armonice de forma

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n P_n(x, y) + b_n Q_n(x, y)].$$

**8.** Să se verifice că curbura medie a suprafetei  $z = f(x, y)$  poate fi scrisă în forma

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} f}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f\|^2}}.$$

**9.** Să se arate că funcția definită de formulele  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , este o imersie neinjectivă de la  $\mathbb{R}$  la  $\mathbb{R}^2$  a cărei imagine este un cerc.

**10.** Să se arate că funcția definită de formulele  $x = \cos \varphi \cos \theta$ ,  $y = \cos \varphi \sin \theta$ ,  $z = \sin \varphi$ ,  $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ , nu este o imersie, dar imaginea ei este o sferă.

**11.** Să se arate că funcția  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  nu este o submersie, dar  $f^{-1}(1)$  este o sferă.

## 2. CÎMPURI VECTORIALE PARTICULARE

În acest capitol se dezvoltă teoria de reprezentare locală a cîmpurilor vectoriale și se stabilesc legături între cîmpurile vectoriale cu semnificații fizice și cîmpurile vectoriale cu semnificații geometrice.

Cîmpurile vectoriale irotaționale de clasă  $C^1$  sint local potențiale, iar potențialele se găsesc cu ajutorul integralei curbiliniilor de al doilea tip. În cazurile în care lucrăm pe intervale  $n$ -dimensionale sau pe mulțimi convexe este suficientă integrala simplă și rezultatele sint globale. Cîmpul magnetic exterior generat de un curent care circulă printr-un conductor cilindric este irotațional (v. 2.1).

Cîmpurile vectoriale cu simetrie sferică sint cîmpuri global potențiale, cele mai des întâlnite fiind cîmpuri newtoniene și cîmpurile electrostatice (v.2.2.)

Cîmpurile vectoriale solenoidele de clasă  $C^1$  pe mulțimi deschise din  $\mathbb{R}^3$  admit potențiali vectori locali. Cîmpurile vectoriale de clasă  $C^\infty$  pe mulțimi deschise din  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , admit reprezentarea locală  $\mathbf{X} = \text{grad } f_1 \times \dots \times \text{grad } f_{n-1}$ . Cîmpul vitezelor unui fluid incompresibil și cîmpul Biot-Savart sint solenoidele (v. 2.3).

Orice cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe o mulțime deschisă și conexă din  $\mathbb{R}^3$  admite reprezentarea locală Monge,  $\mathbf{X} = \text{grad } h + f \text{ grad } g$  și reprezentarea locală Stokes,  $\mathbf{X} = \text{grad } h + \text{rot } \mathbf{Y}$  (v.2.4.).

Cîmpurile vectoriale irotaționale și solenoidele se numesc armonice, cel mai sugestiv exemplu fiind cîmpul vitezelor pentru un fluid incompresibil (v. 2.5.)

Pentru cîmpurile vectoriale Killing (v.2.6), cîmpurile vectoriale conforme (v.2.7), cîmpurile vectoriale afine sau proiective (v.2.8) pe  $\mathbb{R}^n$  avem expresii explicite. În sfîrșit, cîmpurile vectoriale torsionale (v.2.9) sint interesante cel puțin prin cazurile particulare : cîmpuri concirculare, cîmpuri concurente, cîmpuri recurente și cîmpuri paralele. Cîmpurile newtoniene și cîmpurile electrostatice, cu simetrie sferică, sint torsionale.

În 2.10 sint date probleme referitoare la cîmpuri vectoriale speciale, potențiale Monge și Stokes, funcții armonice, circulație, flux etc.

### 2.1. Cîmpuri vectoriale irotaționale

Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial continuu pe o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dacă există un cîmp scalar de clasă  $C^1$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea  $\mathbf{X} = -\text{grad } f$ , atunci  $\mathbf{X}$  se numește *cîmp potențial*,  $f$  se numește potențialul lui  $\mathbf{X}$ , iar mulțimile de nivel constant ale lui  $f$  se numesc *mulțimi echipotențiale* (fig. 2.1.)

Să arătăm că pe o mulțime deschisă și conexă, un potențial este unic abstracție făcînd de o constantă aditivă.

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dacă  $\mathbf{X}$  admite pe  $D$  un potențial  $f$ , atunci acest potențial este unic determinat, abstracție făcînd de o constantă aditivă.

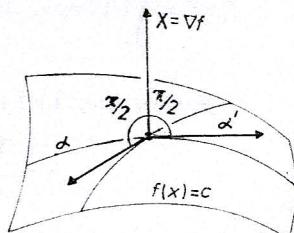


Fig. 2.1

*Demonstratie.* Presupunem că  $\mathbf{X}$  admite pe  $D$  două funcții potențial  $f$  și  $g$ , adică  $\mathbf{X} = \text{grad } f = \text{grad } g$ . Rezultă  $\text{grad } (f - g) = 0$ .

Să arătăm că  $f - g = c$ . Pentru aceasta notăm  $\psi = f - g$  și presupunem că orice două puncte  $x, y$  din  $D$  pot fi unite printr-o curbă  $\alpha : [a, b] \rightarrow D^*$  de clasă  $C^1$ . Avem  $\alpha(a) = x$ ,  $\alpha(b) = y$  și  $(\psi \circ \alpha)'(t) = (\text{grad } \psi(\alpha(t)), \alpha'(t)) = 0$ ,  $\forall t \in [a, b]$ . Rezultă  $\psi \circ \alpha(t) = c$ ,  $\forall t \in [a, b]$ , deci  $\psi(\alpha(a)) = \psi(\alpha(b))$ , adică  $\psi(x) = \psi(y)$ . Fixind pe  $y$ , se deduce  $\psi(x) = c$ ,  $\forall x \in D$ .

Transferul raționamentului precedent la cazul curbelor de clasă  $C^1$  pe portiuni ( $D$  fiind mulțime conexă) este evident.

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial și  $\text{rot } \mathbf{X} = \left[ \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right]$  rotorul său. Dacă  $\text{rot } \mathbf{X}$  nu este identic nul, atunci  $\mathbf{X}$  se numește *cîmp rotațional*, iar dacă  $\text{rot } \mathbf{X}$  este identic nul, adică  $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x)$ ,

$\forall x \in D$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , atunci  $\mathbf{X}$  se numește *cîmp irotațional*. Teorema următoare arată că orice cîmp irotațional  $\mathbf{X}$  de clasă  $C^1$  admite reprezentarea locală  $\mathbf{X} = \text{grad } j$ , adică pentru fiecare  $x_0 \in D$  există o mulțime deschisă  $U \subset D$  care conține pe  $x_0$  și  $j : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^2$  astfel încât  $\mathbf{X} = \text{grad } j$  pe  $U$ .

**Theoremă.** Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$ .

1) Dacă  $\mathbf{X}$  este un cîmp potențial, atunci  $\mathbf{X}$  este un cîmp irotațional.

2) Dacă  $D$  este un interval  $n$ -dimensional deschis și  $\mathbf{X}$  este un cîmp irotațional, atunci  $\mathbf{X}$  este un cîmp potențial, cu potențialul

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_{x_{10}}^{x_1} X_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + \\ + \int_{x_{20}}^{x_2} X_2(x_{10}, x_2, \dots, x_n) dx_2 + \dots + \int_{x_{n0}}^{x_n} X_n(x_{10}, \dots, x_{n-10}, x_n) dx_n, \\ x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}) \in D.$$

3) Dacă  $D$  este o mulțime convexă și  $\mathbf{X}$  este un cîmp irotațional, atunci  $\mathbf{X}$  este un cîmp potențial, cu potențialul  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \int_0^1 (X(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0) dt, \quad x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}) \in D.$$

*Demonstratie.* 1) Fie  $\mathbf{X} = \text{grad } f$ , adică  $X_i = \partial f / \partial x_i$ . Rezultă

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$$

și deci  $\mathbf{X}$  este irotațional.

2) Se observă că

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= X_1(x), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{x_{10}}^{x_1} X_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + \\ &+ X_2(x_{10}, x_2, \dots, x_n) = \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) dx_1 + X_2(x_{10}, x_2, \dots, x_n) = \\ &= \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) dx_1 + X_2(x_{10}, x_2, \dots, x_n) = X_2(x) \text{ etc.} \end{aligned}$$

3) Precizăm că mulțimea  $D$  se numește *convexă* dacă o dată cu oricare două puncte ale sale conține și segmentul determinat de aceste puncte.

Notăm  $u_i(t) = x_{i0} + t(x_i - x_{i0})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ . Rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) &= \int_0^1 \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_k} X(u(t)), x - x_0 \right) + X_k(u(t)) \right) dt = \\ &= \int_0^1 \left( \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial u_j}(u(t)) \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(t), x - x_0 \right) + X_k(u(t)) \right) dt = \\ &= \int_0^1 t \left( \frac{\partial X}{\partial u_k}(u(t)), x - x_0 \right) dt + \int_0^1 X_k(u(t)) dt = \\ &= \int_0^1 t \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial u_k}(u(t))(x_i - x_{i0}) dt + \int_0^1 X_k(u(t)) dt = \\ &= \int_0^1 t \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_k}{\partial x_i}(u(t))(x_i - x_{i0}) dt + \int_0^1 X_k(u(t)) dt = \\ &= \int_0^1 t \frac{d}{dt} X_k(u(t)) dt + \int_0^1 X_k(u(t)) dt = X_k(u(1)) = X_k(x). \end{aligned}$$

**Observații.** 1) Teorema precedentă se poate reformula astfel: Un cimp vectorial  $\mathbf{X}$  de clasă  $C^1$  este local potențial dacă și numai dacă el este irotațional.

2) Potențialele sint analogul primitivelor de la funcțiile reale de o singură variabilă.

3) Pe intervale  $n$ -dimensionale sau pe mulțimi convexe potențialele pot fi aflate cu ajutorul integralei obișnuite. Pe o mulțime deschisă și conexă, care nu face parte din clasele celor menționate nu există în totdeauna funcții potențial definite pe toată mulțimea. Dacă există potențiale, atunci aflarea lor este legată de integrala curbilinie de al doilea tip.

**Exemplu.** Cimpul vectorial  $\mathbf{X} = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1)\mathbf{i} + (x^2z - 4xy)\mathbf{j} + (x^2y + 2xz - 2)\mathbf{k}$  este un cimp irotațional pe  $\mathbb{R}^n$ . Într-adevăr,

$$\text{rot } \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1 & x^2z - 4xy & x^2y + 2xz - 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema precedentă procură procedee pentru determinarea potențialului lui  $\mathbf{X}$ . Preferăm însă să găsim acest potențial  $f$  prin metoda primitivelor. Integrând prima ecuație a sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z - 4xy, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + 2xz - 2$$

în raport cu  $x$ , găsim  $f(x, y, z) = x^2yz + z^2x - 2y^2x + x + \varphi(y, z)$ . Înlocuind în ecuația a doua, deducem  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ , adică  $\varphi(y, z) = \psi(z)$ ; înlocuind în ecuația a treia a sistemului inițial, găsim  $\frac{d\psi}{dz} = -2$ , adică  $\psi(z) = -2z + c$ . Astfel  $f(x, y, z) = x^2yz + z^2x - 2y^2x + x - 2z + c$ .

Evident acesta este un potențial global pentru  $\mathbf{X}$ .

Fie  $D$  o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$  și  $\alpha : [a, b] \rightarrow D$  o curbă orientată de clasă  $C^1$ . Fie  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial continuu definit pe  $D$ . Restricția lui  $\mathbf{X}$  la imaginea lui  $\alpha$ , adică  $\mathbf{X} \circ \alpha$ , este o funcție continuă. Numărul

$$\int_{\alpha} (\mathbf{X}, d\alpha) = \int_a^b (\mathbf{X}(\alpha(t)), \alpha'(t)) dt$$

se numește *integrala lui  $\mathbf{X}$  de-a lungul curbei  $\alpha$*  sau *integrală curbilinie de al doilea tip sau circulația lui  $\mathbf{X}$  de-a lungul curbei  $\alpha$*  (fig. 2.2.). Această definiție se extinde firesc la curbe de clasă  $C^1$  pe porțiuni.

Dacă  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  și  $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ , atunci pentru circulație se utilizează notația  $\int_{\alpha} X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n$ ,

**Teoremă.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și conexă, iar  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial continuu pe  $D$ . Următoarele afirmații sunt echivalente :

- 1)  $\mathbf{X}$  posedă o funcție potențial pe  $D$ ;
- 2)  $\forall x, y \in D$  circulația lui  $\mathbf{X}$  de-a lungul curbei  $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ ,  $\alpha(a) = x$ ,  $\alpha(b) = y$  este independentă de curba  $\alpha$ ;

- 3) circulația lui  $\mathbf{X}$  de-a lungul oricărei curbe închise din  $D$  este egală cu zero.

**Demonstrație.** Deoarece  $D$  este o mulțime conexă, orice două puncte ale lui  $D$  pot fi unite printr-o curbă din  $D$  de clasă  $C^1$  pe porțiuni.

1)  $\Rightarrow$  2). Presupnem că 1) este adevărată și că  $f$  este potențialul lui  $\mathbf{X}$ , adică  $\mathbf{X} = \text{grad } f$ . Pentru orice

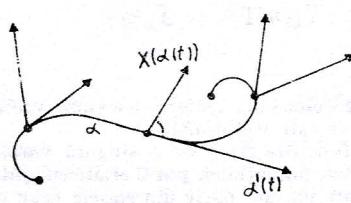


Fig. 2.2

curbă  $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ ,  $\alpha(a) = x$ ,  $\alpha(b) = y$ , de clasă  $C^1$  pe porțiuni găsim

$$\int_{\alpha} (\mathbf{X}, d\alpha) = \int_a^b (\text{grad } f, \alpha') dt = f(\alpha(t))|_a^b = f(y) - f(x).$$

Cu alte cuvinte,, integrala depinde numai de punctele  $x$  și  $y$  și nu de curba care le unește. Deci 2) este adevărată.

2)  $\Rightarrow$  3), evident.

3)  $\Rightarrow$  2). Fie  $\alpha : [a, b] \rightarrow D$ ,  $\beta : [a, b] \rightarrow D$ , două curbe de clasă  $C^1$  care unesc punctele  $\alpha(a) = \beta(a) = x$ ,  $\alpha(b) = \beta(b) = y$ . Curba  $\{\alpha, \beta\}$  este închisă (de clasă  $C^1$  pe porțiuni) și prin ipoteză  $\int_{\alpha} + \int_{\beta} = 0$ . Rezultă  $\int_{\alpha} = \int_{\beta}$ .

2)  $\Rightarrow$  1). Fie punctele  $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  și  $x = (x_1, \dots, x_n)$  din  $D$ . Deoarece  $\int_{\alpha} (\mathbf{X}, d\alpha)$  nu depinde de curba  $\alpha$  care unește punctele  $x_0$  și  $x$ ,

putem folosi notația  $\int_{x_0}^x (\mathbf{X}, d\alpha)$ .

Fixăm pe  $x_0$  și definim  $f(x) = \int_{x_0}^x (\mathbf{X}, d\alpha)$ . Să demonstrăm că  $f'$  este un potențial al lui  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , adică  $\partial f / \partial x_i = X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Notind  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , observăm că

$$f(x + he_i) - f(x) = \int_{x_0}^{x+he_i} (\mathbf{X}, d\alpha) - \int_{x_0}^x (\mathbf{X}, d\alpha) = \int_x^{x+he_i} (\mathbf{X}, d\alpha).$$

Independența integralei de curba care unește două puncte și faptul că punctele  $x$  și  $x + he_i$  se pot considera ca fiind suficient de apropiate permit alegerea particulară  $\alpha(t) = x + the_i$ ,  $t \in [0, 1]$ , adică segmentul de dreaptă care unește punctele  $x$  și  $x + he_i$  (fig. 2.3). Rezultă

$$\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 (\mathbf{X}(x + the_i), he_i) dt = \frac{1}{h} \int_0^h X_i(x + ue_i) du$$

(am utilizat  $u = ht$ ). Trebuie la limită pentru  $h \rightarrow 0$  și găsim  $\partial f / \partial x_i = X_i$ , c.e.tr.d.

**Observație.** 1) Pentru cimpurile vectoriale  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  de clasă  $C^1$  existența potențialului este echivalentă cu faptul că  $X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n$  este peste tot diferențiala unui cimp scalar.

2) Există cimpuri irotационale care nu sunt global potențiale. De exemplu, cimpul vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ ,  $X_1(x, y) = y/(x^2 + y^2)$ ,  $X_2(x, y) = -x/(x^2 + y^2)$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ , este irotационal pe  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (domeniu care nu este simplu

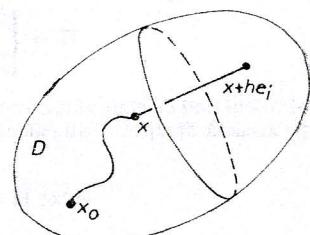


Fig. 2.3

conex, fig. 2.4). Pe de altă parte : 1) există cimpul scalar  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$  astfel încit  $X_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $X_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$  pe  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ ;

(2) există cimpul scalar  $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y), y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) = -\arctg \frac{y}{x}$  astfel încit

$X_1 = \frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $X_2 = \frac{\partial g}{\partial y}$  pe  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ , adică  $\mathbf{X}$  este un cimp potențial pe orice domeniu

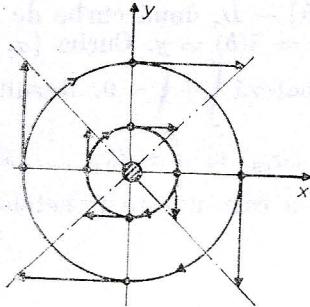


Fig. 2.4

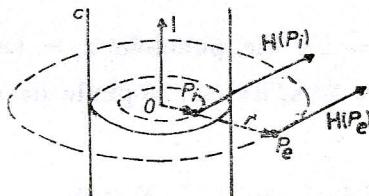


Fig. 2.5

care nu conține originea. Dar nu există nici un cimp scalar  $\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încit  $X_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $X_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  pe  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Într-adevăr, dacă ar exista un astfel de cimp, atunci pentru cercul  $\alpha: x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$  (curbă închisă care înconjoară originea) găsim contradicția

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(\alpha(t))|_{0}^{2\pi} = \int_0^{2\pi} d\varphi(\alpha(t)) = \int_{\alpha} (\text{grad } \varphi, d\alpha) = \int_{\alpha} (\mathbf{X}, d\alpha) = \\ &= \int_{\alpha} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -2\pi. \end{aligned}$$

**Aplicația 2.1.** Fie  $C$  un conductor rectiliniu de secțiune circulară, cu raza  $a$ , prin care circulă un curent de intensitate  $I$  (fig. 2.5). Fixăm originea  $O$  ca în figură și notăm  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ . Curentul generează cimpul magnetic

$$\mathbf{H} = \begin{cases} (\mathbf{I} \times \mathbf{r})/(2\pi a^2) \text{ pentru } (x, y, z) \in \text{int } C \cup \partial C, \\ (\mathbf{I} \times \mathbf{r})/(2\pi r^2) \text{ pentru } (x, y, z) \in \text{ext } C, \end{cases}$$

ale căruia linii de cimp sint cercuri cu centrul pe axa cilindrului și cuprinse în plane perpendiculare pe această dreaptă. Prin calcul se găsește

$$\text{rot } \mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{I}/(\pi a^2) \text{ pentru } (x, y, z) \in \text{int } C \cup \partial C, \\ 0 \text{ pentru } (x, y, z) \in \text{ext } C. \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, restricția lui  $\mathbf{H}$  la ext  $C$  este un cimp vectorial irotațional.

Fixind un reper cartesian astfel încât axa  $Oz$  să coincidă cu axa cilindrului, orientată în sens opus lui I, rezultă

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{2\pi a^2} & \text{pentru } (x, y, z) \in \text{int } C \cup \partial C, \\ \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{2\pi(x^2 + y^2)} & \text{pentru } (x, y, z) \in \text{ext } C. \end{cases}$$

Această exprimare arată că restricția lui  $\mathbf{H}$  la ext  $C$  nu poate fi un cimp vectorial global potențial.

**Complemente.** 1) Fie  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial pe o mulțime deschisă și conexă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$ . Presupunem că există două cimpuri scalare  $h$  și  $f$  astfel încit  $\mathbf{X} = h \text{ grad } f$ . Dacă  $h$  și  $f$  sunt funcțional independente, atunci cimpul vectorial  $\mathbf{X}$  se numește *biscalar*. Dacă  $h$  și  $f$  sunt funcțional dependente, atunci se dovedește că  $\mathbf{X}$  este un cimp potențial; într-adevăr  $h(f) \text{ grad } f = \text{grad } \varphi$

este echivalentă cu  $h(f) df = d\varphi$  și deci  $\varphi(x) = \int_{x_0}^x h(f) df$ .

2) Teoria potențialelor [45] impune determinarea condiției în care o familie dată de hiper-suprafețe de nivel constant să fie o familie de hipersuprafețe de nivel constant atașată unei funcții armonice.

**Teoremă.** Fie  $D$  o mulțime deschisă și conexă din  $\mathbb{R}^n$  și  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  un cimp scalar de clasă  $C^2$  fără puncte critice. Hipersuprafețele de nivel constant  $h(x) = c$  sint hipersuprafețe de nivel constant ale unui cimp scalar armonic  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  dacă și numai dacă există o funcție reală  $\varphi$  de clasă  $C^2$  și o funcție reală continuă  $\psi$  astfel încit

$$\frac{\Delta h}{\|\nabla h\|^2} = -\frac{\varphi''(h)}{\varphi'(h)} = \psi(h).$$

**Demonstrație.** Implicația  $h(x) = c \Rightarrow (x) = a$  este echivalentă cu existența unei funcții reale  $\varphi$  de clasă  $C^2$  astfel încit  $f = \varphi(h)$ . Deci  $df = \varphi'(h) dh$ ,  $d^2f = \varphi''(h) dh^2 + \varphi'(h) d^2h$ . Reținând numai urma hessianei, găsim  $\Delta f = \varphi''(h) \|\nabla h\|^2 + \varphi'(h) \Delta h$  și  $\Delta f = 0$  arată că relația din teorema este necesară.

Reciproc, din  $\frac{\varphi''(h)}{\varphi'(h)} + \psi(h) = 0$  deducem  $\varphi'(h) = A e^{-\int \psi(h) dh}$  și deci  $f = \varphi(h) = A \int e^{-\int \psi(h) dh} + B$ , unde  $A$  și  $B$  sunt constante.

**Aplicația 2.2.** Ne referim la  $\mathbb{R}^3$  și cercetăm dacă o familie de semiconuri circulare drepte cu aceeași axă și același virf este o familie de hipersuprafețe de nivel constant ale unui cimp scalar armonic.

Fără a scădea generalitatea, putem presupune că familia de semiconuri este descrisă de  $x^2 + y^2 = cz^2, z > 0$ . Rezultă  $h(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2}, z > 0$  și condiția din teorema devine

$$\frac{\varphi''(h)}{\varphi'(h)} = -\frac{\frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^2} + \frac{6(x^2 + y^2)}{z^4}}{\frac{4x^2}{z^4} + \frac{4y^2}{z^4} + \frac{4(x^2 + y^2)^2}{z^6}} = -\frac{2 + 3h}{2h(h+1)} = -\frac{1}{h} - \frac{1}{2(h+1)}.$$

Deci  $\ln|\varphi'(h)| + \ln|h| + \frac{1}{2} \ln|h+1| = \ln A$  sau  $d\varphi = \frac{A dh}{h\sqrt{h+1}}$ . Punind  $h = \operatorname{tg}^2 \theta$  găsim

$d\varphi = \frac{2A d\theta}{\sin \theta}$  și  $f = \varphi(h) = 2A \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| + B$ , unde  $A$  și  $B$  sunt constante arbitrară. Evident  $0$  este semiunghiul unui con.

## 2.2. Cîmpuri vectoriale cu simetrie sferică

Fie  $y = (y_1, \dots, y_n)$  un punct fixat și  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un punct variabil din  $\mathbb{R}^n$ . Notăm  $\mathbf{r} = \mathbf{yx}$  și  $r = \|\mathbf{yx}\| = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ .

Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^\infty$ . Cîmpul scalar definit pe  $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$  prin  $f(r)$  se numește *cîmp scalar cu simetrie sferică de centru de simetrie y* (întrucît nu depinde decît de distanța de la punctul fixat  $y$  la punctul variabil  $x$ ). Hipersuprafețele de nivel constant ale unui cîmp scalar cu simetrie sferică sunt sfere.

Gradientul unui cîmp scalar cu simetrie sferică este

$$\text{grad } f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Fie  $\varphi(r)$  un cîmp scalar cu simetrie sferică de centru de simetrie  $y$ . Cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  definit pe  $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$  prin

$$\mathbf{X}(x) = \varphi(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

se numește *cîmp vectorial cu simetrie sferică de centru de simetrie y*.

Orice cîmp vectorial cu simetrie sferică de centru de simetrie  $y$  este un cîmp potențial pe  $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$  avînd drept hipersuprafețe echipotențiale sferele cu centrul în  $y$ . Într-adevăr, pentru orice funcție  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^\infty$  există o funcție  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clasă  $C^\infty$  astfel încît  $f' = \varphi$  și multimea ecuațiilor  $f(r) = \text{const}$  este echivalentă cu multimea ecuațiilor  $r = \text{const}$ .

Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial cu simetrie sferică. Se constată că  $\text{div } \mathbf{X}(x) = \frac{r\varphi'(r) + (n-1)\varphi(r)}{r}$  și deci  $\mathbf{X}$  este solenoidal dacă și numai dacă  $\varphi(r) = c/r^{n-1}$ , unde  $c$  este o constantă.

**Cîmpuri newtoniene.** a) Conform legii lui Newton, în  $\mathbb{R}^3$  forța de atracție cu care acționează o masă  $m$  situată în punctul fixat  $y(y_1, y_2, y_3)$  asupra masei unitate care se găsește în punctul variabil  $x(x_1, x_2, x_3)$  este

$$\mathbf{X}(x) = -\frac{m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

unde  $\mathbf{r} = \mathbf{yx}$ ,

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Cîmpul  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial pe  $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$  numit *cîmp newtonian sau gravitațional* (fig. 2.6). Avînd simetrie sferică, este evident un cîmp potențial cu potențialul

$$f(r) = m/r.$$

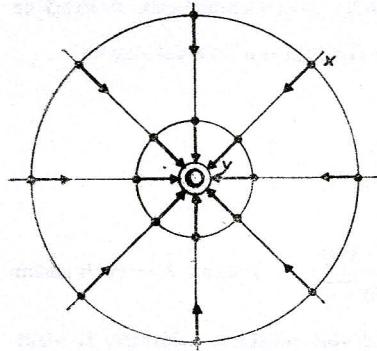


Fig. 2.6

## Altfel. Cîmpul newtonian

$$\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{(x_1 - y_1)\mathbf{i} + (x_2 - y_2)\mathbf{j} + (x_3 - y_3)\mathbf{k}}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{3/2}},$$

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(y_1, y_2, y_3)\}$ , este un cîmp irațional al cărui domeniu de definiție este conex și simplu conex, dar nu este convex. Utilizând formulele din 2.1, teorema a doua, pe un paralelipiped deschis sau pe o mulțime convexă deschisă  $D$  din  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(y_1, y_2, y_3)\}$ , se găsește potențialul  $f(x_1, x_2, x_3) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)]^{-1/2}$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \in D$ . Se constată însă că  $f$  se prelungeste diferențialabil la  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(y_1, y_2, y_3)\}$  și de aceea cîmpul newtonian  $\mathbf{X}$  este un cîmp potențial pe  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(y_1, y_2, y_3)\}$ .

b) În  $\mathbb{R}^3$  considerăm *cîmpul gravitațional* general de masele  $m_1, \dots, m_k$  plasate în punetele  $y^1, \dots, y^k$  și acțiunea asupra masei unitate plasate în punctul  $x$ . Acest cîmp este dat prin

$$\mathbf{X}(x) = \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{r_i^2} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{y^1, \dots, y^k\},$$

și admite potențialul

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{r_i}, \quad \text{unde } \mathbf{r}_i = \mathbf{y}^i \mathbf{x}, r_i = \|\mathbf{r}_i\|.$$

c) Fie  $D$  o mulțime deschisă, conexă și mărginită din  $\mathbb{R}^3$ , cu frontiera  $\partial D$  netedă pe porțiuni. Considerăm o distribuție de mase pe  $\bar{D} = D \cup \partial D$ , cu densitatea  $\mu(y)$  continuă. Forța totală de gravitație

$$\mathbf{X}(x) = - \int_{\bar{D}} \frac{\mu(y)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} dy, \quad \mathbf{r} = (y, x),$$

delinește un *cîmp newtonian* pe  $\mathbb{R}^3$  (în cazul în care  $x \in \bar{D}$  integrala precedentă este improprie, dar absolut convergentă).

Potențialul cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  este

$$f(x) = \int_{\bar{D}} \frac{\mu(y)}{r} dy.$$

d) Notiunea de cîmp newtonian se extinde la  $\mathbb{R}^n$ . De exemplu, dacă  $D$  este o mulțime deschisă, conexă și mărginită din  $\mathbb{R}^n$ , cu frontiera  $\partial D$  netedă pe porțiuni, iar  $\mu : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă, atunci cîmpul vectorial definit pe  $\mathbb{R}^n$  prin

$$\mathbf{X}(x) = - \int_{\bar{D}} \frac{\mu(y)}{r^{n-1}} \frac{\mathbf{r}}{r} dy, \quad \mathbf{r} = (y, x),$$

se numește *cîmp newtonian*. Se constată că acesta posedă potențialul

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} \int_D^{\mu(y)} \frac{dy}{r^{n-2}} & \text{pentru } n > 2, \\ \int_D^{\mu(y)} \mu(y) \ln \frac{1}{r} dy & \text{pentru } n = 2. \end{cases}$$

**Cimpuri electrostatice.** a) Coulomb a ajuns la concluzia că forța de interacțiune dintre două corperi punctiforme purtătoare de sarcini electrice este proporțională cu produsul sarcinilor electrice și invers proporțională cu pătratul distanței dintre centrele corpurilor respective. Conform acestei legi, forța (de atracție sau de respingere) cu care sarcina  $q$  situată în punctul fixat  $y = (y_1, y_2, y_3)$  acționează asupra sarcinii unitate  $+1$  situată în punctul arbitrar  $x = (x_1, x_2, x_3)$  este

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{y\},$$

unde  $\epsilon_0 \approx 8,86 \cdot 10^{-12}$  F/m este constanta dielectrică a vidului, iar  $\mathbf{r} = \mathbf{y}\mathbf{x}$ .

Forța  $\mathbf{E}$  determină un cîmp vectorial pe  $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$  numit *cîmp electrostatic*. Acest cîmp are simetrie sferică (pentru  $q < 0$  vezi fig. 2.6, pentru  $q > 0$  vezi fig. 2.7). Potențialul corespunzător este  $j(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ .

b) *Cîmpul electrostatic* generat de sarcinile  $q_1, \dots, q_k$  situate în punctele  $y^1, \dots, y^k$  și acționând asupra sarcinii unitate situate în punctul  $x$  este

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{y^1, \dots, y^k\}$$

unde  $\mathbf{r} = \mathbf{y}^i \mathbf{x}$ . Acesta admite potențialul

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^k \frac{q_i}{r_i}.$$

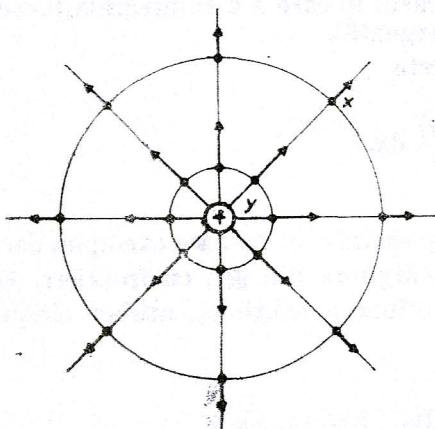


Fig. 2.7

### 2.3. Cimpuri vectoriale solenoidale

Un cîmp vectorial  $\mathbf{X}$  se numește *solenoidal* dacă  $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$ .

**Exemplu.** 1) Cîmpul newtonian  $\mathbf{X} = -\frac{xi + yj + zk}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , este irațional și solenoidal.

2) Cîmpul vectorial  $\mathbf{X} = \operatorname{grad} f$  este solenoidal dacă și numai dacă  $f$  este o funcție armonnică, adică  $\Delta f = 0$ .

3) Cimpul vectorial  $\mathbf{X} = \frac{y}{x^2+y^2} \mathbf{i} - \frac{x}{x^2+y^2} \mathbf{j}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  este irotațional și solenoidal, dar nu este global potențial.

4) Dacă  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sint de clasă  $C^2$ , atunci cimpul vectorial  $\mathbf{X} = \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g$  este solenoidal pe  $\mathbb{R}^3$ .

5) Dacă  $\mathbf{Y}$  este un cimp vectorial de clasă  $C^2$  pe  $\mathbb{R}^3$ , atunci cimpul vectorial  $\mathbf{X} = \operatorname{rot} \mathbf{Y}$  este solenoidal.

6) Fie  $\mathbb{R}^6 = \{(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)\}$  privit ca spațiul fazelor asociat ecuației Lorentz care descrie mișcarea unei particule încărcate, de sarcină  $q$  și masă  $m$ , într-un cimp electromagnetic staționar generat de cimpul electric  $\mathbf{E}(x) = (E_1(x), E_2(x), E_3(x))$  și cimpul magnetic  $\mathbf{B}(x) = (B_1(x), B_2(x), B_3(x))$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Cimpul vectorial  $\mathbf{X} = \left( v_1, v_2, v_3, \frac{q}{m} (E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2), \frac{q}{m} (E_2 + v_3 B_1 - v_1 B_3), \frac{q}{m} (E_3 + v_1 B_2 - v_2 B_1) \right)$ , care local reprezintă viteza de evoluție a fenomenului în  $\mathbb{R}^6$ , este solenoidal. Într-adevăr,

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} + \frac{\partial X_4}{\partial v_1} + \frac{\partial X_5}{\partial v_2} + \frac{\partial X_6}{\partial v_3} = 0.$$

În cele ce urmează arătăm că orice cimp solenoidal de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^3$  se reduce local la un cimp de rotori, adică (local)  $\mathbf{X} = \operatorname{rot} \mathbf{Y}$ . Cimpul vectorial  $\mathbf{Y}$  este unic determinat abstracție făcind de un gradient aditiv și se numește *potențialul vector* al lui  $\mathbf{X}$ .

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial pe o mulțime deschisă și convexă  $D \subset \mathbb{R}^3$ . Dacă  $\mathbf{X}$  admite pe  $D$  un potențial vector  $\mathbf{Y}$  de clasă  $C^1$ , atunci acest potențial este unic determinat pînă la un gradient aditiv.

**Demonstrație.** Fie  $\mathbf{X} = \operatorname{rot} \mathbf{Y}_1$  și  $\mathbf{X} = \operatorname{rot} \mathbf{Y}_2$ . Rezultă  $\operatorname{rot} \mathbf{Y}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{Y}_2$  și deci  $\operatorname{rot}(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2) = 0$ . Deoarece  $\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2$  este un cimp vectorial irotațional de clasă  $C^1$ , conform unei teoreme din 2.1 există un cimp scalar  $f$  pe  $D$  astfel încît  $\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2 = \operatorname{grad} f$ .

**Teoremă.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^3$  o mulțime deschisă și  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$ . Următoarele afirmații sunt echivalente :

- 1)  $\mathbf{X}$  este solenoidal;
- 2) pentru orice punct  $p \in D$  există o vecinătate deschisă  $U \subset D$ ,  $p \in U$ , și un cimp vectorial  $\mathbf{Y}$  pe  $U$  astfel încât  $\mathbf{X} = \operatorname{rot} \mathbf{Y}$  pe  $U$ ;
- 3) fluxul lui  $\mathbf{X}$  prin frontieră oricărui corp sferic conținut în  $D$  este nul.

**Demonstrație.** 1)  $\Rightarrow$  2). Fie  $\mathbf{X} = (P, Q, R)$ . Ipoteza  $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$  pe  $D$  se transcrie

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad \forall (x, y, z) \in D.$$

Fie  $(x_0, y_0, z_0) \in D$  și  $U$  o bilă deschisă centrată în  $(x_0, y_0, z_0)$  situată în  $D$  (sau un interval tridimensional deschis). Funcțiile

$$f, g : U \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \int_{z_0}^z Q(x, y, t) dt, g(x, y, z) =$$

$$= - \int_{z_0}^z P(x, y, t) dt + \int_{x_0}^x R(t, y, z_0) dt$$

determină pe  $U$  cimpul vectorial  $\mathbf{Y} = (f, g, 0)$  cu proprietatea  $\operatorname{rot} \mathbf{Y} = \mathbf{X}$ .

**O b s e r v a t i e.** Potențialul vector  $\mathbf{Y} = (f, g, 0)$ , cu  $f, g$  definite ca mai sus, este de clasă  $C^1$  și cu  $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$  de clasă  $C^1$ . Dacă  $\mathbf{X}$  este un cimp vectorial solenoidal pe  $\mathbb{R}^3$ , atunci reprezentarea  $\mathbf{X} = \operatorname{rot} \mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Y} = (f, g, 0)$  este globală.

2)  $\Rightarrow$  1). Evident,  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{Y} = 0$ .

1)  $\Rightarrow$  3). Se aplică formula Gauss-Ostrogradski :

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{X}, \mathbf{N}) d\sigma = \iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{X}) dx dy dz.$$

3)  $\Rightarrow$  1). Fie  $p \in D$  și  $\Omega$  un corp sferic cu centru în  $p$  și de rază  $\epsilon$ , inclus în  $D$ . Formula Gauss-Ostrogradski implică

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{X}) dx dy dz = 0.$$

Se utilizează formula de medie și se trece la limită pentru  $\epsilon \rightarrow 0$ . Rezultă  $(\operatorname{div} \mathbf{X})(p) = 0$ ,  $\forall p \in D$ .

**Teorema lui Euler.** Fie  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^3$ . Dacă  $\mathbf{X}$  este solenoidal, atunci pentru fiecare punct  $(x_0, y_0, z_0) \in D$  cu  $\mathbf{X}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  există o mulțime deschisă  $U \subset D$  care conține pe  $(x_0, y_0, z_0)$  și două cimpuri scalare  $f, g$  de clasă  $C^\infty$  pe  $U$  astfel încât (fig. 2.8)

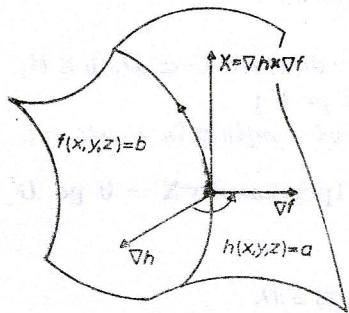


Fig. 2.8

$$\mathbf{X}|_U = \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g,$$

unde  $\mathbf{X}|_U$  este restricția lui  $\mathbf{X}$  la  $U$ .

Cimpurile scalare  $f, g$  se numesc *potențiale Euler ale lui  $\mathbf{X}$* . Acestea nu sunt unice.

Demonstrația clasică a teoremei Euler este specifică spațiului cu trei dimensiuni, făcând apel la noțiunea de potențial vector. De aceea preferăm generalizarea și o demonstrație care este bună pentru orice dimensiune  $n \geq 3$ . Acestea vor fi date în 3.2.

**Aplicații. 2.3.** Să se determine cimpul vitezelor unui fluid incompresibil datorat unei surse de debit  $q$  situată într-un punct  $M_0$ .

*Rezolvare.* Particulele de fluid care izvorăsc din  $M_0$  descriu semidrepte cu originea  $M_0$ , fapt echivalent cu aceea că viteza  $\mathbf{V}$  este un cimp vectorial cu simetrie sferică pe  $\mathbb{R}^3 \setminus \{M_0\}$ , adică

$$\mathbf{V}(M) = \varphi(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \text{ unde } \mathbf{r} = M_0 M. \text{ Debitul } q \text{ al sursei situate în } M_0 \text{ este } q = \iint_S (\mathbf{N}, \mathbf{V}) d\sigma, \text{ unde}$$

$S$  este o sferă cu centru în  $M_0$  și de rază  $r$ . Rezultă  $q = \varphi(r) 4\pi r^2$  și deci  $\mathbf{V}(M) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

Aceste este un cimp vectorial solenoidal.

**2.4. Cimpul Biot-Savart.** Fie  $D$  o mulțime deschisă, conexă și mărginită din  $\mathbb{R}^3$  și  $\partial D$  frontieră sa pe care o presupunem netedă pe porțiuni. Notăm cu  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $\bar{D} = D \cup \partial D$ . Cimpul vectorial definit pe  $\mathbb{R}^3$  prin

$$\mathbf{Y}(x) = \iint_D \frac{1}{r^3} \mathbf{X}(y) \times \mathbf{r} dy, \quad \mathbf{r} = (y, x).$$

se numește *cimpul Biot-Savart*. Denumirea provine din faptul că în cazul în care  $\bar{D}$  este umplut cu sarcini electrice în mișcare, cu  $\mathbf{X}(y)$  ca densitate de curent electric, cimpul magnetic  $\mathbf{Y}$  generat de acest curent este dat de legea Biot-Savart (egalitatea precedentă).

În general cimpul  $\mathbf{Y}$  nu este irotational, dar este solenoidal. Potențialul vectorial său este

$$\mathbf{Z}(x) = \iint_D \frac{\mathbf{X}(y)}{r} dy.$$

## 2.4. Reprezentările Monge și Stokes

**Teorema lui Monge.** Dacă  $\mathbf{X}$  este un cimp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^3$ , atunci pentru orice  $x_0 \in D$  cu  $\operatorname{rot} \mathbf{X}(x_0) \neq 0$  există o mulțime deschisă  $U \subset D$  care conține pe  $x_0$  și trei cimpuri scalare  $h, f, g$  de clasă  $C^\infty$  pe  $U$  astfel încât

$$\mathbf{X}|_U = \operatorname{grad} h + f \operatorname{grad} g.$$

Cimpurile scalare  $h, f, g$  se numesc *potențiale Monge* ale lui  $\mathbf{X}$ . Ele nu sunt unice.

**Demonstrație.** Cimpul  $\operatorname{rot} \mathbf{X}$  este solenoidal pe  $D$  deoarece întotdeauna  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{X}) = 0$ . Înțînd seama de teorema Euler de la cimpurile solenoide, rezultă că pentru fiecare  $x_0 \in D$  cu  $\operatorname{rot} \mathbf{X}(x_0) \neq 0$  există o mulțime deschisă  $U_1 \subset D$  care conține pe  $x_0$  și două cimpuri scalare  $f, g$  de clasă  $C^\infty$  pe  $U_1$  astfel încât

$$\operatorname{rot} \mathbf{X} = \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g \text{ pe } U_1.$$

Această egalitate se transcrie  $\operatorname{rot}(\mathbf{X} - f \operatorname{grad} g) = 0$  și deci cimpul vectorial  $\mathbf{X} - f \operatorname{grad} g$  este irotational pe  $U_1$ . De aceea există o vecinătate  $U \subset U_1$  a lui  $x_0$  și un cimp scalar  $h$  de clasă  $C^\infty$  pe  $U$  astfel încât

$$\mathbf{X} - f \operatorname{grad} g = \operatorname{grad} h \text{ pe } U.$$

**Teorema lui Stokes.** Dacă  $\mathbf{X}$  este un cimp vectorial de clasă  $C^1$  și  $\text{div } \mathbf{X}$  de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^3$ , atunci pentru fiecare  $x_0 \in D$  există o mulțime deschisă  $U \subset D$  care conține pe  $x_0$ , un cimp scalar  $h$  de clasă  $C^2$  pe  $U$  și un cimp vectorial  $\mathbf{Y}$  de clasă  $C^2$  și cu  $\text{rot } \mathbf{Y}$  de clasă  $C^1$  pe  $U$  astfel încât

$$\mathbf{X}|_U = \text{grad } h + \text{rot } \mathbf{Y}.$$

Cimpul scalar  $h$  și cimpul vectorial  $\mathbf{Y}$  se numesc *potențiale Stokes* ale lui  $\mathbf{X}$ . Ele nu sunt unice.

**Demonstrație.** Este suficient să arătăm că există un cimp scalar local  $h$  de clasă  $C^2$  astfel încât  $\mathbf{X} - \text{grad } h$  să fie cimp solenoidal. Dar  $\text{div}(\mathbf{X} - \text{grad } h) = 0$  arată că  $h$  trebuie să fie o soluție a ecuației Poisson

$$\Delta h = \text{div } \mathbf{X}.$$

O asemenea ecuație admite o infinitate de soluții locale. De exemplu, dacă  $U$  este o mulțime deschisă, conexă și mărginită, cu frontieră  $\partial U$  netedă pe porțiuni și  $a$  este un parametru vector, atunci

$$h_a(x) = (a, \mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \int_U \frac{\text{div } \mathbf{X}(y)}{\|x - y\|} dy, \quad x \in U,$$

sunt soluții ale ecuației Poisson  $\Delta h = \text{div } \mathbf{X}$ .

**Observație.** Dacă  $\mathbf{X}$  este de clasă  $C^\infty$ , atunci reprezentarea lui Stokes este echivalentă cu reprezentarea  $\mathbf{X}|_U = \text{grad } h + \text{grad } f \times \text{grad } g$ . Întrucătă  $n > 3$ , această variantă se generalizează prin

$$\mathbf{X}|_U = \text{grad } f_n + \text{grad } f_1 \times \dots \times \text{grad } f_{n-1}, \text{ unde } U \subset \mathbb{R}^n.$$

## 2.5. Cimpuri vectoriale armonice

Un cimp vectorial  $\mathbf{X}$  se numește *armonic* dacă el este ierotațional și solenoidal.

**Exemplu.** Cimpul newtonian  $\mathbf{X} = -m \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ ,  $m > 0$ , este armonic pe  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

**Teoremă.** Dacă  $D \subset \mathbb{R}^n$  este o mulțime deschisă și convexă și  $\mathbf{X}$  este un cimp de clasă  $C^1$  pe  $D$ , atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1)  $\mathbf{X}$  este armonic pe  $D$ ;
- 2) există un cimp scalar armonic  $j : D \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $\mathbf{X} = \text{grad } j$ .

**Demonstrație.** 1)  $\Rightarrow$  2). Din  $\text{rot } \mathbf{X} = 0$  ajungem la concluzia că există  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $\mathbf{X} = \text{grad } f$ . Dar  $\text{div } \mathbf{X} = 0$  impune  $\text{div}(\text{grad } f) = 0$ , adică  $\Delta f = 0$ . Cu alte cuvinte,  $j$  este armonică.

2)  $\Rightarrow$  1). Ipotezele  $\mathbf{X} = \text{grad } f$ ,  $\Delta f = 0$  implică  $\text{rot } \mathbf{X} = 0$  și  $\text{div } \mathbf{X} = 0$ . Deci  $\mathbf{X}$  este armonic pe  $D$ .

**Aplicația 2.5.** O parte dintr-un fluid se poate identifica cu o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^3$ . Densitatea fluidului  $\mu(x, y, z, t)$  și viteza fluidului  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  sunt presupuse funcții de clasă  $C^1$  pe  $D \times \mathbb{R}$ .

Partea din fluid corespunzătoare corpului șferic  $\Omega \subset D$ , cu  $\partial\Omega = \Sigma$ , are masa

$$m(t) = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z, t) dx dy dz,$$

funcție de clasă  $C^1$  de  $t$ . Rezultă  $m'(t) = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \mu}{\partial t} dx dy dz$ .

Considerente de ordin fizic arată că  $m'(t)$  trebuie să fie fluxul lui  $\mu \mathbf{v}$  prin  $\Sigma$ , adică

$$m'(t) = \iint_{\Sigma} (\mu \mathbf{v}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) dx dy dz.$$

Din  $\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial \mu}{\partial t} - \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) \right) dx dy dz = 0$ ,  $\forall \Omega \subset D$ , se obține ecuația de continuitate  $\operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) = \partial \mu / \partial t$ .

Dacă  $\mu = \operatorname{const}$  și  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$ , atunci se spune că fluidul este incompresibil, iar  $f$  se numește *potențialul vitezelor*. În acest caz ecuația de continuitate se reduce la  $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$ , adică  $\Delta f = 0$  și deci  $\mathbf{X}$  este un cîmp armonic pe  $D$ .

## 2.6. Cîmpuri vectoriale Killing

Un cîmp vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$  se numește *cîmp Killing* dacă satisfacă ecuațiile Killing

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Evident, sistemul (1) implica  $\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , adică  $X_i = X_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Aceasta înseamnă că în cazul  $n = 1$  cîmpurile vectoriale Killing se reduc la cîmpuri paralele. În general,  $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$  și deci orice cîmp Killing este un cîmp solenoidal.

Fie  $n \geq 2$ . Derivînd pe (1) și permuteazănd indicii, găsim

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 X_j}{\partial x_k \partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 X_j}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$

Adunăm primele două egalități și o scădem pe a treia; în baza condițiilor de complet integrabilitate  $\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_k \partial x_j}$  obținem  $\frac{\partial^2 X_j}{\partial x_k \partial x_i} = 0$ . Re-

zultă  $\frac{\partial X_j}{\partial x_i} = a_{ji}$  (constante), iar (1) impune condiția de antisimetrie pentru matricea  $[a_{ij}]$ . Astfel un cîmp Killing pe  $\mathbb{R}^n$  are componente de forma

$$X_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i + c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

unde  $a_{ij} = -a_{ji}$  și  $c_j$  sunt constante arbitrară. Deoarece dimensiunea spațiului vectorial al matricelor antisimetrice  $[a_{ji}]$  de ordinul  $n$  este  $n(n-1)/2$ , iar dimensiunea spațiului vectorial al matricelor coloană  $[c_j]$  este  $n$ , rezultă că pe  $\mathbb{R}^n$  există  $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$  cimpuri Killing liniar-

independente în  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  (a nu se confunda cu liniar independența punctuală în  $\mathbb{R}^n$ ).

Croșetul a două cimpuri vectoriale Killing este un cimp vectorial Killing. Acest lucru se poate demonstra fie arătind că dacă  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  sunt soluții ale sistemului (1), atunci și  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = (\mathbf{X}(Y_i) - \mathbf{Y}(X_i))$  este soluție, fie punând  $\mathbf{X} = (\sum_k a_{jk} x_k + c_j)$ ,  $\mathbf{Y} = = (\sum_k b_{jk} x_k + d_j)$  și calculind  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = (\sum_k \sum_j (a_{jk} b_{ij} - b_{jk} a_{ij}) x_k) = (\sum_k d_{ik} x_k)$ , unde  $[d_{ik}]$  este evident o matrice antisimetrică. Rezultă că mulțimea cimpurilor vectoriale Killing pe  $\mathbb{R}^n$  este o algebră Lie de dimensiune  $n(n+1)/2$ .

**Observație.** Dacă  $\mathbf{A} = ai + bj + ck$  este un cimp paralel și  $\mathbf{X} = xi + yj + zk$  atunci  $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = (bz - cy)\mathbf{i} + (cx - az)\mathbf{j} + (ay - bx)\mathbf{k}$  este un cimp Killing pe  $\mathbb{R}^3$ . Reciproc, orice cimp Killing  $\mathbf{Y}$  pe  $\mathbb{R}^3$  care nu este un cimp paralel se poate scrie în forma  $\mathbf{A} \times \mathbf{X}$ . Acest rezultat ține de teorema lui Euler de reprezentare a unui cimp vectorial solenoidal (v. 2.3).

**Aplicația 2.6.** (fig. 2.9). Considerăm rotația unui solid  $S$  cu viteza unghiulară  $\omega$  în jurul unei axe  $\Delta$  care trece prin origine. Un punct  $(x, y, z)$  al solidului  $S$  descrie un cerc  $C$  cu centrul pe axă, de rază  $d$ , cuprins într-un plan perpendicular pe axă. Viteza tangențială este un vector  $\mathbf{V}(x, y, z)$  tangent la cerc, dirijat în sensul mișcării și având modulul  $V = \omega d$ .

Notăm cu  $\omega$  vectorul de modul  $\omega$ , care are direcția axei și care este dirijat în sensul indus pe axă de rotația solidului (regula burghiu lui drept). Atunci  $\mathbf{V}(x, y, z) = \omega \times \mathbf{r}$ , unde  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ . Cimpul vectorial  $\mathbf{V}$  este un cimp Killing.

## 2.7. Cimpuri vectoriale conforme

Un cimp vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$  se numește **cimp conform** dacă satisfacă ecuațiile

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \psi \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

unde  $\delta_{ij}$  este simbolul lui Kronecker, iar  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $\psi$  este o constantă, atunci cimpul conform se numește **cimp omotetic**. Dacă  $\psi = 0$ , atunci cimpul conform este un cimp Killing.

Sistemul (2) implica  $\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \frac{\psi}{2}$  și deci  $\psi = \frac{2 \operatorname{div} \mathbf{X}}{n}$ .

În particular se observă că în cazul  $n = 1$  cimpurile conforme se identifică cu funcțiile de clasă  $C^\infty$ .

Presupunem că  $\psi$  nu se reduce la o constantă și  $n \geq 2$ . Derivând pe (2) și permutând indicele, obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 X_j}{\partial x_k \partial x_i} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad \frac{\partial^2 X_j}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \delta_{jk}, \\ \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \delta_{ki}. \end{aligned}$$

Adunăm primele două egalități și o scădem pe a treia; în baza condițiilor de integrabilitate completă  $\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_k \partial x_j}$ , obținem

$$2 \frac{\partial^2 X_j}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \delta_{jk} - \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \delta_{ki}. \quad (3)$$

Impunem și aici condițiile de integrabilitate completă,

$$\frac{\partial^3 X_j}{\partial x_k \partial x_i \partial x_l} = \frac{\partial^3 X_j}{\partial x_k \partial x_l \partial x_i}.$$

Găsim

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_l} \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_l} \delta_{ki} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_i} \delta_{lj} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i} \delta_{ki}.$$

Sumind după  $i$  și  $j$  deducem

$$(2-n) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_l} = (\Delta \psi) \delta_{kl}.$$

O nouă sumare după  $k$  și  $l$  dă  $(1-n)\Delta \psi = 0$ .

Fie  $n > 2$ . Rezultă  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_l} = 0$  și deci  $\psi(x) = \sum_{l=1}^n c_l x_l + c$ . Cu această sistemul (3) se transcrie

$$2 \frac{\partial^2 X_j}{\partial x_k \partial x_i} = c_k \delta_{ij} + c_i \delta_{jk} - c_j \delta_{ki}.$$

Prin integrare găsim

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^n c_k x_k + c_i x_j - c_j x_i \right) + c_{ji}.$$

Ecuațiile (2) impun asupra matricei  $[c_{ji}]$  condițiile  $c_{ij} + c_{ji} = c \delta_{ij}$ . O nouă integrare dă

$$\begin{aligned} X_j &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \sum_i \left( \delta_{ij} \sum_k c_k x_k + c_i x_j - c_j x_i \right) dx_i + \sum_i c_{ji} x_i = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^x d \left[ \left( \sum_k c_k x_k \right) x_j - \frac{1}{2} c_j \sum_i x_i^2 \right] + \sum_i c_{ji} x_i = \\ &= \frac{1}{2} x_j \sum_k c_k x_k - \frac{1}{4} c_j \sum_k x_k^2 + \sum_k c_{jk} x_k + d_j, \end{aligned}$$

unde  $d_j$  sunt constante arbitrarе. Deoarece dimensiunea spațiului vectorial al matricelor  $[c_{ij}]$  de ordinul  $n$  este  $\frac{n^2 - n}{2} + 1$  și avem doi vectori matrice arbitrară  $[c_k]$ ,  $[d_j]$ , rezultă că pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ , există

$$\frac{n^2 - n}{2} + 1 + n + n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

cîmpuri conforme liniar independente în  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ .

Un raționament analog cu cel din paragraful precedent arată că crosul a două cîmpuri conforme este un cîmp conform. De aceea mulțimea cîmpurilor vectoriale conforme pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ , este o algebră Lie de dimensiune  $(n+1)(n+2)/2$ .

Fie  $n = 2$ . Ecuatiile (2) se transcriu

$$2 \frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \psi, \quad 2 \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = \psi, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = 0.$$

Rezultă că  $X = (X_1, X_2)$  satisfac pe  $\mathbb{R}^2$  condițiile Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \frac{\partial X_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial X_2}{\partial x_1}$$

și deci  $X_1, X_2$  sunt respectiv partea reală și partea imaginară ale unei funcții monogene  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Cu alte cuvinte, mulțimea cîmpurilor conforme pe  $\mathbb{R}^2$  este echivalentă cu mulțimea funcțiilor monogene pe  $\mathbb{C}$ .

Presupunem că  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  este un cîmp vectorial omotetic, adică  $\psi(x) = c$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . În acest caz găsim  $X_j = \sum_{i=1}^n c_{ji}x_i + d_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , unde  $c_{ij}$  sunt constante ce satisfac relațiile  $c_{ij} + c_{ji} = c\delta_{ij}$ , iar  $d_j$  sunt constante arbitrară. Fie  $c \neq 0$ ; atunci pe  $\mathbb{R}^n$  există  $\frac{n^2 - n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$  cîmpuri vectoriale omotetice, liniar independente în  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ .

**Observație.** Ecuatiile (2) constituie o generalizare naturală a condițiilor Cauchy-Riemann.

## 2.8. Cîmpuri vectoriale affine și proiective

Un cîmp vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$  care satisfac ecuațiile cu deriveate parțiale

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \tag{4}$$

se numește *cîmp afin*.

Sistemul (4) implică  $\frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{div} \mathbf{X} = 0$  și deci orice cîmp afin are divergență constantă. Tot din (4) se observă că  $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = a_{ij}$  (constante). De aceea un cîmp afin pe  $\mathbb{R}^n$  are componente de forma

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + c_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

unde  $c_i$  sunt constante.

Dimensiunea spațiului vectorial al matricelor pătratice  $[a_{ij}]$  de ordinul  $n$  este  $n^2$ , iar dimensiunea spațiului vectorial al matricelor coloană  $[c_i]$  este  $n$ . Rezultă că pe  $\mathbb{R}^n$  există  $n^2 + n$  cîmpuri affine liniar independente în  $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ .

Dacă  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$  sunt cîmpuri vectoriale affine, atunci croșetul  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - D_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial afin. De aceea mulțimea cîmpurilor vectoriale affine pe  $\mathbb{R}^n$  este o algebră Lie de dimensiune  $n^2 + n$ . Să observăm că orice cîmp vectorial Killing este un cîmp vectorial afin.

Un cîmp vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$  pentru care există un cîmp vectorial  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$  astfel încît

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = Y_j \delta_{ik} + Y_k \delta_{ij}, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (5)$$

unde  $\delta_{ij}$  este simbolul lui Kronecker, se numește cîmp proiectiv.

Orice cîmp vectorial afin este un cîmp vectorial proiectiv. De asemenea din (5) rezultă  $\frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{div} \mathbf{X} = (n+1) Y_j$ , adică  $\mathbf{Y}$  este în mod necesar un cîmp potențial.

În cazul  $n = 1$  cîmpurile proiective se identifică cu funcțiile de clasă  $C^\infty$ . Pentru  $n \geq 2$ , impunem condițiile de complet integrabilitate pentru sistemul cu deriveate parțiale (5), adică

$$\frac{\partial^3 X_i}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 X_i}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}.$$

Deoarece  $\frac{\partial^3 X_i}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \delta_{ik} + \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} \delta_{ij}$ , găsim

$$\frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \delta_{ik} + \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} \delta_{ij} = \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \delta_{il}.$$

Sumind după  $i$  și  $j$ , obținem  $n \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial Y_i}{\partial x_k}$ . Dar  $\frac{\partial Y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial Y_i}{\partial x_k}$ , aşa încit

$(n-1) \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} = 0$  sau  $\frac{\partial Y_k}{\partial x_i} = 0$ . Ultimele ecuații cu deriveate parțiale impun ca  $\mathbf{Y}$  să fie un cîmp vectorial paralel, adică  $Y_k = c_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Cu această observație sistemul (5) se retranscrie în forma

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = c_j \delta_{ik} + c_k \delta_{ij},$$

de unde

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \delta_{ik} \sum_{j=1}^n c_j x_j + c_k x_i + a_{ik}$$

și în final

$$\begin{aligned} X_i &= \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^n \left( \delta_{ik} \sum_{j=1}^n c_j x_j + c_k x_i \right) dx_k + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = \\ &= \int_{x_0}^x d \left[ x_i \sum_{j=1}^n c_j x_j \right] + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = x_i \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + d_i. \end{aligned}$$

Dimensiunea spațiului vectorial al matricelor  $[a_{ij}]$  de ordinul  $n$  este  $n^2$  și vectorii coloană  $[c_j]$ ,  $[d_i]$  sunt arbitrați. Aceasta înseamnă că pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , există  $n^2 + 2n$  cîmpuri proiective liniar independente în  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ .

Se poate dovedi că croșetul a două cîmpuri vectoriale proiective este un cîmp vectorial proiectiv. Aceasta înseamnă că mulțimea cîmpurilor vectoriale proiective pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , este o algebră Lie de dimensiune  $n^2 + 2n$ .

## 2.9. Cîmpuri vectoriale torsionale

Un cîmp vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  de clasă  $C^\infty$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$  se numește *torsional* dacă există un cîmp scalar  $a : D \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^\infty$  și un cîmp vectorial  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  de clasă  $C^\infty$  pe  $D$  astfel încât

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = a \delta_{ij} + X_i Y_j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

unde  $\delta_{ij}$  este simbolul lui Kronecker. Evident, relațiile (6) sunt echivalente cu  $D_{\mathbf{Z}} \mathbf{X} = a \mathbf{Z} + (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \mathbf{X}$ ,  $\forall \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(D)$ .

Din definiție se observă că un cîmp torsional  $\mathbf{X}$  nu poate fi identic nul decât dacă  $a$  este funcția identic nulă. De asemenea tot din definiție rezultă  $\text{rot } \mathbf{X} = \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ ,  $\text{div } \mathbf{X} = an + (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ . De aceea un cîmp torsional este: (1) irotațional dacă și numai dacă  $\mathbf{Y}$  este coliniar cu  $\mathbf{X}$ , (2) solenoidal dacă și numai dacă  $an + (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ , (3) potențial sau biscalalar.

Pentru  $n = 1$ , cîmpurile vectoriale torsionale se reduc la soluții ale ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul întîi. Pentru  $n \geq 2$ , condițiile de complet integrabilitate ale sistemului (6),  $\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_k \partial x_j}$ , se trans-

criu în forma

$$\frac{\partial a}{\partial x_k} \delta_{ij} + a \delta_{ik} Y_j + X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} = \frac{\partial a}{\partial x_j} \delta_{ik} + a \delta_{ij} Y_k + X_i \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}. \quad (7)$$

Sumind după  $i$  și  $j$ , deducem consecința

$$\sum_{i=1}^n X_i \left( \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} \right) = (1-n) \left[ \frac{\partial a}{\partial x_k} - a Y_k \right]. \quad (8)$$

Sumările după  $i$  și  $k$  sau  $j$  și  $k$  nu dă condiții suplimentare.

Pentru  $n \geq 2$ , cazurile particulare cele mai interesante de cîmpuri torsionale sunt:

1) *Cîmp concircular*, dacă  $\mathbf{Y}$  este un cîmp potențial. Relațiile (8) arată că dacă  $a \neq 0$ , atunci în mod necesar  $\mathbf{Y} = \text{grad} \ln |a|$ . Din (6) rezultă  $d(X_i/a) = dx_i$  și deci  $X_i(x) = a(x)(x_i + c_i)$  sunt componentele unui cîmp concircular.

2) *Cîmp concurrent* (fig. 2.10), dacă  $a \neq 0$ ,  $\mathbf{Y} = 0$ . În acest caz relațiile (8) implică  $a = \text{const}$  și  $X_i(x) = a(x_i + c_i)$ . Schimbarea de variabile  $y_i = ax_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , arată că nu se renunță la generalitate dacă se presupune  $a = 1$ .

3) *Cîmp recurrent*, dacă  $a = 0$ . În această ipoteză ecuațiile (6) se reduc la  $\frac{\partial \ln |X_i|}{\partial x_j} = Y_j$  și deci  $\mathbf{Y}$  este în mod necesar un cîmp vectorial irațional [fapt ce rezultă și din relațiile (7)]. Apoi  $\ln |X_i| = \int_{x_0}^x \sum_{j=1}^n Y_j dx_j$ .

4) *Cîmp constant (paralel)*, dacă  $a = 0$ ,  $\mathbf{Y} = 0$ .

Lăsăm pe cititor să verifice că, în afară de cazuri particulare, un cîmp torsional pe  $\mathbb{R}^n$  nu poate fi cîmp Killing și nici cîmp conform. Dar cîmp afin sau proiectiv poate fi?

Croșetul a două cîmpuri vectoriale torsionale  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$  este un cîmp vectorial coplanar cu  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$ . Într-adevăr, relațiile  $D_Z \mathbf{X} = a \mathbf{Z} + (\mathbf{U}, \mathbf{Z}) \mathbf{X}$ ,  $D_Z \mathbf{Y} = b \mathbf{Z} + (\mathbf{V}, \mathbf{Z}) \mathbf{Y}$ ,  $\forall \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(D)$ , implică  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = D_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - D_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = (b - (\mathbf{U}, \mathbf{Y})) \mathbf{X} + ((\mathbf{V}, \mathbf{X}) - a) \mathbf{Y}$ .

**Exemplu.** 1) Să determinăm cîmpul concircular pentru care  $Y_j = x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Conform explicațiilor precedente găsim  $a(x) = b e^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k^2}$ ,  $b = \text{const}$  și  $X_i(x) = b e^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k^2} (x_i + c_i)$ ,  $c_i = \text{const}$ .

2) Orice cîmp vectorial cu simetrie sferică este torsional. Într-adevăr, dacă  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i(x) = f(r)(x_i - y_i)$ ,  $f(r) = \varphi(r)/r$ ,  $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ , atunci

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = f(r) \delta_{ij} + \frac{f'(r)}{r} (x_i - y_i)(x_j - y_j) = f(r) \delta_{ij} + \frac{f'(r)}{rf^2(r)} X_i X_j. \quad (8)$$

Evident,  $\mathbf{X}$  poate fi privit ca un cîmp vectorial concircular cu  $\mathbf{Y} = \text{grad} \ln |f(r)|$ .

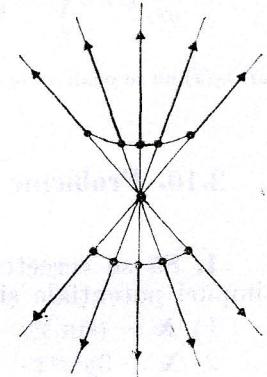


Fig. 2.10

În particular, cimpurile vectoriale newtoniene și cimpurile vectoriale electrostatice, cu simetrie sferică, sunt cimpuri torsionale (concirculare; coliniare cu cimpuri concurente). Aceste cimpuri torsionale sunt irotaționale și solenoidale.

**Contraexemplu.** Cimpul vectorial newtonian  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i(x) = -\int_D \frac{\mu(y)}{r^{n-1}} \frac{x_i - y_i}{r} dy$ ,

$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  nu este un cimp torsional pe  $\mathbb{R}^n$  deoarece

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \int_D \mu(y) \left( -\frac{1}{r^n} \delta_{ij} + nr^{n-2} \frac{x_i - y_i}{r^n} \frac{x_j - y_j}{r^n} \right) dy = a(x) \delta_{ij} + \psi_{ij}(x),$$

iar  $\psi_{ij}(x)$  nu se poate scrie ca sumă de termeni care să convină pentru cimpurile vectoriale torsionale.

## 2.10. Probleme propuse

1. Să se cerceteze care dintre următoarele cimpuri vectoriale sunt cimpuri potențiale și când este cazul să se găsească potențialul.

1)  $\mathbf{X} = (\sin xy + xy \cos xy) \mathbf{i} + (x^2 \cos xy) \mathbf{j}$ .

2)  $\mathbf{X} = 3y^4z^2 \mathbf{i} + 4x^3z^2 \mathbf{j} - 3x^2y^2 \mathbf{k}$ .

3)  $\mathbf{X} = (y^2 \cos x + z^2) \mathbf{i} - (4 - 2y \sin x) \mathbf{j} + (2xz + 1) \mathbf{k}$ .

2. Să se arate că familia de elipsoizi  $u(x, y, z) = \text{const} \geq 0$  definită de ecuația

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1$$

rezolvă problema potențială a cimpului creat de un elipsoid conductor de semiaxe  $a > b > c$ .

3. Să se determine potențialele Monge și respectiv potențialele Stokes pentru cimpul vectorial

$$\mathbf{X} = x^2y \mathbf{i} + y^2z \mathbf{j} + z^2x \mathbf{k}$$

4. Fie  $\varphi(x) = f(r)$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  un cimp scalar cu simetrie sferică pe  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $n \geq 2$ , de clasă  $C^2$ .

1) Să se arate că  $\Delta \varphi = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r)$ .

2) Să se găsească soluțiile cu simetrie sferică ale ecuației Laplace  $\Delta \varphi = 0$ .

R.  $\varphi(x) = f(r) = \begin{cases} A \ln r + B & \text{pentru } n = 2 \\ Ar^{2-n} + B & \text{pentru } n > 2 \end{cases}, \quad A, B, = \text{const.}$

5. Fie  $\mathbf{V} = f((\mathbf{a}, \mathbf{r}))(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ , unde  $f$  este o funcție de clasă convenabilă.

1) Să se determine  $f$  astfel încât rot  $\mathbf{V}$  să fie coliniar cu  $\mathbf{r}$ .

2) Să se calculeze fluxul lui  $\mathbf{V}$  printr-o suprafață închisă.

**6.** Fie  $\mathbf{V} = f(\|\mathbf{a} \times \mathbf{r}\|)(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ , unde  $f$  este o funcție de clasă conve-nabilă.

1) Să se calculeze grad  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{r}\|$ , rot  $\mathbf{V}$  și div  $\mathbf{V}$ .

2) Să se determine  $f$  astfel încât  $\mathbf{V}$  să fie irotațional și să se găsească un potențial local.

**7.** Pe  $\mathbb{R}^3$  se dă cîmpul vectorial  $\mathbf{V} = \varphi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + \psi(r)\mathbf{r}$ , unde  $\mathbf{a}$  este un vector constant coliniar cu  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{r}$  este vectorul de poziție, iar  $\varphi$  și  $\psi$  sint funcții de clasă  $C^1$ .

1) Să se determine circulația lui  $\mathbf{V}$  pe un cerc  $\Gamma$  cu centrul în origine situat în planul  $xOy$  și fluxul lui  $\mathbf{V}$  prin discul limitat de  $\Gamma$ .

2) Să se determine funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  astfel încât fluxul cîmpului  $\mathbf{V}$  prin orice suprafață închisă să fie zero, iar rot  $\mathbf{V}$  să fie coliniar cu  $\mathbf{r}$ .

**8.** Să se determine cîmpurile vectoriale armonice pe  $\mathbb{R}^2$  ale căror potențiale sint polinoame armonice pe  $\mathbb{R}^2$ .

**9.** Să se verifice afirmațiile : 1) croșetul a două cîmpuri conforme este un cîmp conform, 2) croșetul a două cîmpuri affine este un cîmp afin, 3) croșetul a două cîmpuri proiective este un cîmp proiectiv.

Indicație.  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - D_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$ .

**10.** Se consideră un cîmp vectorial torsional definit pe o vecinătate a originii lui  $\mathbb{R}^n$ . Utilizînd formula lui Taylor, să se găsească aproximarea liniară și aproximarea pătratică ale acestui cîmp în vecinătatea originii.

**11.** Există cîmpuri vectoriale torsionale armonice ?

**12.** Să se cerceteze care dintre cîmpurile vectoriale torsionale sint respectiv cîmpuri vectoriale Killing, cîmpuri vectoriale conforme cîmpuri vectoriale affine sau cîmpuri vectoriale proiective.

**13.** Să se arate că mulțimea tuturor cîmpurilor vectoriale solenoide de clasă  $C^\infty$  pe  $D \subset \mathbb{R}^n$  este o algebră Lie.

### 3. LINII DE CÎMP

Liniile de cîmp ale unui cîmp vectorial de clasă  $C^1$  sunt curbe orientate de clasă  $C^2$  cu proprietatea că valorile cîmpului vectorial pe aceste curbe se autorepartizează ca vectori tangenți la curbe. Drept exemple pentru explicitarea liniilor de cîmp ne-au servit cîmpurile vectoriale paralele, torsionale, newtoniene, electrostatice etc. (v. 3.1, 3.2).

Teorema de îndreptare a unui cîmp vectorial este echivalentă cu teorema de existență a integralelor prime locale, iar orbitele pot fi reprezentate local ca intersecții de familii de hiper-suprafețe de nivel constant atașate la integrale prime (locale) funcțional independente. Integralele prime globale apar doar în cazuri de excepție cum sunt cîmpurile vectoriale hamiltoniene, cîmpurile Killing (v. 3.2), cîmpurile magnetice ale circuitelor electrice filiforme (v. 3.3) etc.

Pentru unele cîmpuri vectoriale liniile de cîmp se pot explicita relativ ușor, prin formule (v. 3.1, 3.2), cel mai simplu exemplu în acest sens constituindu-l cîmpurile vectoriale liniare (v. 3.4). Cind nu este posibilă explicitarea prin formule, facem apel la tehnici numerice de calcul cum este de exemplu metoda Runge-Kutta (v. 3.5).

Problema completitudinii cîmpurilor vectoriale prezintă un interes deosebit atât teoretic și practic. Explicațiile din 3.6 sunt exemplificate prin cîmpurile vectoriale newtoniene și cîmpurile vectoriale electrostatice, cu simetrie sferică, prin cîmpurile vectoriale conforme, prin cîmpurile vectoriale torsionale și pe ecuațiile Lorenz de mișcare a unui fluid. În particular problema completitudinii se pune la cîmpurile vectoriale hamiltoniene care joacă un rol esențial în descrierea unor fenomene ale naturii (v.3.7).

Curenții generați de cîmpurile vectoriale au proprietăți fizico-geometrice interesante dintre care am menționat teorema Liouville (v.3.8) și teoremele de caracterizare a cîmpurilor Killing, affine (v. 3.9), conforme (v. 3.10) și proiective (v. 3.11). Teorema de conservare a volumului este exemplificată prin cîmpurile electromagnetice staționare, cîmpurile magnetice staționare, cîmpurile Biot-Savart, cîmpurile hamiltoniene și cîmpurile newtoniene (v. 3.8). De asemenea se explicitează curenții generați de cîmpurile vectoriale Killing, affine (v. 3.9), conforme (v. 3.10), și proiective (v. 3.11) și se exemplifică procedeul de obținere a cîmpurilor vectoriale din grupurile locale de difeomorfisme (v. 3.12).

Problemele din 3.13 se referă la îndreptarea cîmpurilor vectoriale, integrale prime, explicitarea analitică a soluțiilor unor sisteme diferențiale, metoda Runge-Kutta, completitudine și curenți.

#### 3.1. Liniile de cîmp

Fie  $D \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și conexă, iar  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$ . O curbă  $\alpha : I \rightarrow D$  de clasă  $C^1$  al cărei cîmp vectorial tangent  $\alpha'$  coincide cu  $\mathbf{X} \circ \alpha$  se numește *linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$* . Imaginea  $\alpha(I) \subset D$  a unei liniile de cîmp se numește *orbită a lui  $\mathbf{X}$*  (fig. 3.1).

Liniile de cîmp ale cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  sunt caracterizate prin ecuația diferențială  $\alpha'(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))$  sau prin ecuația integrală  $\alpha(t) = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{X}(\alpha(s))ds$ . Deoarece  $\mathbf{X}$  și  $\alpha$  sunt funcții de clasă  $C^1$ , liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  sint în mod necesar de clasă  $C^2$ .

**Teorema.** Dacă  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , atunci pentru orice  $x_0 \in D$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , există un interval deschis  $I$  și o linie de cîmp  $\alpha : I \rightarrow D$  a lui  $\mathbf{X}$  astfel încît :

$$1) \quad \alpha(t_0) = x_0,$$

2) orice altă linie de cîmp  $\beta : J \rightarrow D$  a lui  $\mathbf{X}$  cu  $\beta(t_0) = x_0$  are proprietatea  $J \subseteq I$  și  $\beta(t) = \alpha(t)$ ,  $\forall t \in J$ .

În acest caz  $\alpha$  se numește linie de cîmp maximală a lui  $\mathbf{X}$  prin  $x_0$ .

*Demonstratie.* Aici avem o reformulare a teoremei de existență și unicitate pentru soluțiile unui sistem diferențial de ordinul întâi [1]. Într-adevăr, utilizând notatiile

$$\mathbf{X}(x) = (X_1(x), \dots, X_n(x)), \quad X_i : D \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad x_i : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\alpha'(t) = \left( \frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t) \right),$$

ecuația diferențială vectorială  $\alpha'(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))$ ,  $\forall t \in I$ , se transcrie sub forma unui sistem diferențial autonom

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

Teorema de existență arată că există o vecinătate  $I_1$  a lui  $t_0$  și  $n$  funcții  $x_i : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^1$  care satisfac sistemul (1) și condițiile inițiale  $x_i(t_0) = x_{i0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ . Ansamblul  $\beta_1(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  definește o linie de cîmp  $\beta_1 : I_1 \rightarrow D$  a lui  $\mathbf{X}$  cu  $\beta_1(t_0) = x_0$ .

Teorema de unicitate arată că dacă  $\tilde{x}_i : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , este o altă soluție a sistemului (1) care satisface condițiile inițiale  $\tilde{x}_i(t_0) = x_{i0}$ , atunci  $\tilde{x}_i(t) = x_i(t)$ ,  $\forall t \in I_1 \cap I_2$ . Echivalent, dacă  $\beta_2 = (x_1, \dots, x_n) : I_2 \rightarrow D$  este o altă linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$  cu  $\beta_2(t_0) = x_0$ , atunci  $\beta_1(t) = \beta_2(t)$ ,  $\forall t \in I_1 \cap I_2$ .

Din acestea rezultă : (1) există o singură linie de cîmp maximală  $\alpha$  a lui  $\mathbf{X}$ , cu  $\alpha(t_0) = x_0$ , definită pe reuniunea domeniilor de definiție ale liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  care aplică pe  $t_0$  în  $x_0$ ; (domeniul de definiție al unei linii de cîmp maximale este un interval deschis din  $\mathbb{R}$ ); (2) orice altă linie de cîmp  $\beta : J \rightarrow D$  a lui  $\mathbf{X}$  cu  $\beta(t_0) = x_0$  este o restricție a lui  $\alpha$ .

Soluțiile sistemului algebric

$$X_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, X_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (2)$$

adică zerourile cîmpului vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , generează soluții ale sistemului diferențial (1). Într-adevăr, dacă  $a = (a_1, \dots, a_n)$  este o soluție a lui (2), atunci  $x(t) = a$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , este o soluție (constantă, invariantă în timp) a lui (1). O astfel de soluție se numește punct de echilibru.

Lungimea  $\|\mathbf{X}(x)\|$  este de fapt viteza cu care o soluție a sistemului (1) trece prin punctul  $x$ .

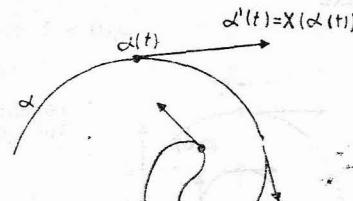


Fig. 3.1

**Aplicații 3.1.** Fie  $\mathbf{X}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ . Liniile sale de cimp sunt soluțiile sistemului:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1,$$

adică

$$x_1(t) = 0, \quad x_2(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \text{ (punct de echilibru),}$$

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad x_2(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t, \quad t \in \mathbb{R}$$

(soluția generală). Linia de cimp maximală care trece prin punctul  $x_1(0) = a, x_2(0) = b$  este

$$\alpha(t) = (a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Evident,  $\|\alpha(t)\|^2 = a^2 + b^2, \forall t \in \mathbb{R}$  și deci orbita este un cerc de rază  $\sqrt{a^2 + b^2}$  (fig. 3.2). De asemenea  $\lim_{t \rightarrow 0} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} x_2(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$  (punctul de echilibru), iar  $\lim_{t \pm \infty} \alpha(t)$  nu există

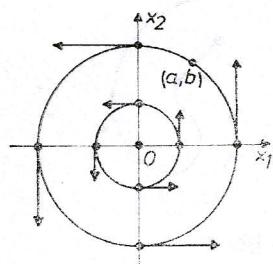


Fig. 3.2

**3.2.** Fie  $\mathbf{X} = (a_1, \dots, a_n)$  un cimp vectorial paralel pe  $\mathbb{R}^n$ .

Sistemul care dă liniile de cimp  $\frac{dx_i}{dt} = a_i, i = 1, \dots, n$ , admite soluția generală  $x_i = a_i t + c_i, t \in \mathbb{R}$ . În concluzie liniile de cimp ale unui cimp vectorial paralel sint drepte paralele.

**3.3.** Să găsim liniile de cimp ale unui cimp vectorial torsional  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$ . Prin definiție avem  $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = a \delta_{ij} + X_i Y_j, i, j = 1, \dots, n$ . Ple-

cind de la  $\frac{dx_i}{dt} = X_i(x), i = 1, \dots, n$  și derivind găsim

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = (a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y}))(x) \frac{dx_i}{dt}.$$

Făcind substituția

$$s = c_1 + c_2 \int_{t_0}^t \exp \left( \int_{t_0}^r (a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \circ \alpha(u) du \right) dr, \quad c_1, c_2 = \text{const},$$

obținem  $\frac{ds^2}{ds^2} = 0$  și deci  $x_i = a_i + b_i s, s \in I \subset \mathbb{R}, a_i, b_i = \text{const}, i = 1, \dots, n$ . Astfel liniile de cimp ale unui cimp torsional (care nu sunt puncte de echilibru) sint porțiuni de drepte reparametrizezate prin  $s$ .

*Cazuri particulare.* 1) Liniile de cimp ale unui cimp vectorial concurent pe  $\mathbb{R}^n$  (diferite de punctul de echilibru) sunt semidrepte deschise, toate având drept origine poziția de echilibru. Într-adevăr, în acest caz  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0, a = 1$  și  $x_i = a_i + d_i e^t, t \in \mathbb{R}, d_i$  fiind constante arbitrate. Punctul de echilibru  $x_i = a_i$  este un punct asimptotic al tuturor celorlalte liniilor de cimp deoarece  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i = a_i$  (fig. 2.10).

2) Orbitele unui cimp vectorial cu simetrie sferică,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i(x) = \varphi(r)(x_i - y_i)/r, r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ , sunt semidrepte deschise, iar punctul  $y$  apare ca punct asimptotic pentru acestea. Sensul pe orbită este impus de semnul lui  $\varphi$ . În acest context se situează cimpurile newtoniene cu simetrie sferică (cimpuri de atracție) și cimpurile electrostatice cu simetrie sferică (cimpuri de atracție sau de respingere).

**Lemă.** Fie  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , iar  $\alpha : I \rightarrow D$  o linie de cimp a lui  $\mathbf{X}$ . Dacă  $s$  este un punct

*fixat al lui I și  $\tau_s : J \rightarrow I$ ,  $\tau_s(t) = t + s$  (translația în  $\mathbb{R}$  prin  $s$ ), atunci curba  $\beta = \alpha \circ \tau_s$  este o linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$  definită pe intervalul  $J = \tau_{-s}(I)$ .*

*Demonstrație* (fig. 3.3). Dacă  $t \rightarrow \alpha(t)$  este o linie de cîmp, atunci și  $t \rightarrow \alpha(t + s)$  este tot o linie de cîmp. Într-adevăr,

$$\frac{d\alpha}{dt}(t+s)\Big|_{t=t_0} = \frac{d\alpha}{dt}(t)\Big|_{t=t_0+s} = \mathbf{X}(\alpha(t_0+s)) = \mathbf{X}(\alpha(t+s))\Big|_{t=t_0}.$$

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , fie  $x_0 \in D$  și  $\alpha_{x_0} : I(x_0) \rightarrow D$  linia de cîmp maximală a lui  $\mathbf{X}$  prin  $x_0$ . Dacă  $s$  este un punct fixat al lui  $I(x_0)$ , atunci  $\alpha_{x_0} \circ \tau_s : \tau_{-s} I(x_0) \rightarrow D$  este linia de cîmp maximală a lui  $\mathbf{X}$  prin  $\alpha_{x_0}(t_0 + s)$ .

*Demonstrație.* Conform lemei,  $\alpha_{x_0} \circ \tau_s$  este o linie de cîmp prin  $x_1 = \alpha_{x_0}(t_0 + s)$  definită pe  $\tau_{-s} I(x_0)$ .

Deoarece ea trebuie să coincidă pe acest domeniu cu linia de cîmp maximală  $\alpha_{x_1}$  se impune  $\tau_{-s} I(x_0) \subset I(x_1)$ . Rezultă  $t_0 - s \in I(x_1)$ . Aplicăm din nou lema care arată că  $\alpha_{x_1} \circ \tau_{-s}$  este linia de cîmp prin  $\alpha_{x_1}(t_0 - s) = x_0$  definită pe  $\tau_s I(x_1)$ . De aceea  $\tau_s I(x_1) \subset I(x_0)$ . Rezultă că domeniul de definiție al lui  $\alpha_{x_0} \circ \tau_s$  este egal cu  $I(x_1)$  și deci  $\alpha_{x_0} \circ \tau_s = \alpha_{x_1}$ .

Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Teoremele precedente arată că două linii de cîmp maximale distincte ale lui  $\mathbf{X}$  nu se întâlnesc (dacă ar avea un punct comun, ele ar trebui să coincidă pe un interval). Drept urmare, un punct de echilibru nu poate fi valoare inițială a unei soluții diferită de el, dar poate fi punct asymptotic al acesteia (limita în raport cu  $t$ ) sau limita soluției în raport cu punctul inițial.

Există linii de cîmp care se autoîntesectează, adică sunt curbe închise. În particular, punctele de echilibru ale sistemului fac parte din această categorie de curbe. O linie de cîmp închisă are alura din fig. 3.4 și nu cea din fig. 3.5, deoarece vectorul tangent la curbă în fiecare punct este unic (valoare a cîmpului  $\mathbf{X}$ ). Teorema precedentă arată că fiecare linie de cîmp maximală este fie injectivă, fie simplă și închisă, fie constantă.

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dacă  $\alpha : I \rightarrow D$  este o linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$  cu  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ ,  $t_1, t_2 \in I$ ,  $t_1 < t_2$  (adică  $\alpha$  este închisă), atunci  $\alpha$  se poate prelungi la întreaga axă  $\mathbb{R}$ , prelungirea  $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow D$  fiind periodică de perioadă  $T \in (0, t_2 - t_1]$ .

*Demonstrație.* Orice  $s \in \mathbb{R}$  se poate reprezenta univoc în formă  $s = t + n(t_2 - t_1)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Funcția  $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow D$ , definită prin  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(t)$  este periodică și are perioada  $\min \{T | \tilde{\alpha}(s + T) = \tilde{\alpha}(s)\} \in$

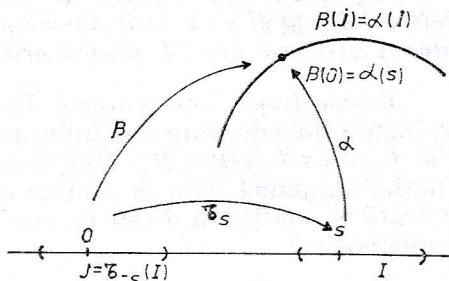


Fig. 3.3

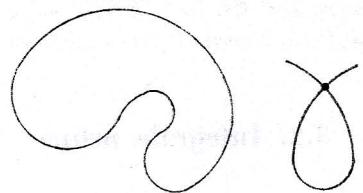


Fig. 3.4

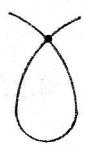


Fig. 3.5

$\in (0, t_2 - t_1]$ . Pe de altă parte, în baza teoremei precedente,  $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow D$  este o linie de cîmp. În plus  $\tilde{\alpha}(t_1) = \alpha(t_1)$ .

Se știe că pentru o funcție continuă periodică mulțimea perioadelor coincide sau cu dreapta reală (caz în care funcția este constantă) sau cu mulțimea multiplilor întregi ai celei mai mici perioade [1].

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe mulțimea deschisă și conexă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$  și  $M \subset D$  o subvarietate închisă cu proprietatea că pentru fiecare punct  $x \in M$  vectorul  $\mathbf{X}(x)$  este tangent la  $M$  în  $x$ . Dacă  $I$  este un interval din  $\mathbb{R}$  și  $\alpha : I \rightarrow D$  este o linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$  astfel încât  $\alpha(t_0) \in M$ , atunci  $\alpha(t)$  este din  $M$  pentru orice  $t \in I$ .

**Demonstrație.** Din teorema de existență și unicitate rezultă că există o singură linie de cîmp  $\alpha$  definită pe o vecinătate a lui  $t_0$  și cu valori în  $M$ . Fie  $J = \{t \in I \mid \alpha(t) \in M\}$ . Mulțimea  $J$  este deschisă, deoarece nu poate să conțină un punct, fără să conțină o întreagă vecinătate; continuitatea lui  $\alpha$  arată că mulțimea  $J$  este și închisă,  $J = \alpha^{-1}(M)$ . Deci  $J = I$ , deoarece  $I$  este conexă.

**O b s e r v a t i i .** 1) Liniile de cîmp sint de fapt curbe orientate. Într-adevăr, dacă  $\alpha(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , este o linie de cîmp a cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  care unește punctul  $\alpha(a)$  cu punctul  $\alpha(b)$  atunci  $\alpha(a + b - u)$ ,  $u \in [a, b]$ , este o linie de cîmp a lui  $-\mathbf{X}$  care unește punctul  $\alpha(b)$  cu punctul  $\alpha(a)$ .

2) Liniile de cîmp ale cîmpului vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  de clasă  $C^2$  sunt drepte dacă

și numai dacă  $D_{\mathbf{X}} \mathbf{X} = 0$ . Într-adevăr, din  $dx_i/dt = X_i(x)$  găsim  $\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} X_j = D_{\mathbf{X}} \mathbf{X}$ , iar  $\frac{d^2x_i}{dt^2} = 0$  este echivalentă cu  $x_i = a_i + b_i t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Complemente.** Întru teoria din 3.6 și din cap. 4 este util să dăm enunțul altor două teoreme de bază din teoria sistemelor diferențiale autonome [1, 25, 36].

**Teorema de prelungire.** Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Fie  $K \subset D$  o mulțime compactă și  $x_0 \in K$ . Linia de cîmp  $\alpha_{x_0}$  a lui  $\mathbf{X}$  fixată prin condiția inițială  $\alpha_{x_0}(t_0) = x_0$  poate fi prelungită în viitor (în trecut) și nemărginit, și pînă la frontieră  $\partial K$ . Prelungirea este unică în sensul că orice două linii de cîmp cu aceeași condiție inițială coincid pe intersecția intervalor de definiție.

**Teorema de diferențierabilitate.** Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , fie  $x_0 \in D$  și  $\alpha_x : I \rightarrow D$  linia de cîmp a lui  $\mathbf{X}$  fixată prin condiția inițială  $\alpha_x(t_0) = x$ . Funcția  $(t, x) \rightarrow \alpha_x(t)$  este de clasă  $C^\infty$  pe o vecinătate a punctului  $(t_0, x_0)$  din  $I \times D$ .

### 3.2. Integrale prime

Să presupunem că  $\varphi : D \rightarrow D_*$ ,  $y = \varphi(x)$  este un difeomorfism de clasă  $C^1$ , unde  $D$  și  $D_*$  sunt mulțimi deschise în  $\mathbb{R}^n$ . Atunci sistemul diferențial autonom

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1')$$

pe  $D$  este echivalent cu sistemul diferențial autonom

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y) \frac{dy_j}{dt} = X_i(\varphi^{-1}(y)), \quad i = 1, \dots, n,$$

sau

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} X_i \right) (\varphi^{-1}(y)), \quad j = 1, \dots, n,$$

sau

$$\frac{dy_j}{dt} = (D_{\mathbf{x}} y_j)(\varphi^{-1}(y)), \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{pe } D_* = \varphi(D).$$

Teorema care urmează dă condiții care asigură existența unui difeomorfism local  $y = \varphi(x)$  cu proprietatea

$$D_{\mathbf{x}} y_j = \begin{cases} 0 & \text{pentru } j = 1, \dots, n-1, \\ 1 & \text{pentru } j = n. \end{cases}$$

**Teorema de îndreptare.** Dacă  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  este un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$  și  $x_0 \in D$  este un punct în care  $\mathbf{X}(x_0) \neq 0$ , atunci există o vecinătate  $U$  a lui  $x_0$  și un difeomorfism  $\varphi: U \rightarrow U_*$ ,  $y = \varphi(x)$  de clasă  $C^1$  astfel încât sistemul autonom  $\frac{dx_i}{dt} = X_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , pe  $U$  se reduce la sistemul autonom  $\frac{dy_1}{dt} = 0, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dt} = 0, \frac{dy_n}{dt} = 1$  pe  $U_* = \varphi(U)$ .

**Demonstrație.** Este suficient să găsim un difeomorfism local care să schimbe cîmpul vectorial paralel  $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$  în cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$ . Pentru aceasta gîndim spațiul tangent  $T_{x_0} \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$  ca suma directă dintre partea orizontală  $H = \{h \in \mathbb{R}^n | (h, \mathbf{X}(x_0)) = 0\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$  și partea verticală  $V = \{t\mathbf{X}(x_0) | t \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$ , unde  $\simeq$  înseamnă identificare prin izomorfismul canonic. În  $H$  considerăm bila  $H_\rho: \|h\| < \rho$ , iar în  $V$  considerăm segmentul  $V_\delta: |t| < \delta$ .

Continuitatea lui  $\mathbf{X}$  și ipoteza  $\mathbf{X}(x_0) \neq 0$  asigură existența unei vecinătăți a lui  $x_0$  pe care nu avem puncte de echilibru.

Fiecărei perechi  $(h, t) \in H_\rho \times V_\delta$  îi atașăm punctul  $\Phi(h, t) = \alpha_h(t) \in \mathbb{R}^n$ , unde  $\alpha_h(t)$  este soluția sistemului (1') fixată prin condiția inițială  $\Phi(h, 0) = \alpha_h(0) = h$ . Vom arăta că funcția  $(h, t) \rightarrow \Phi(h, t)$  de clasă  $C^1$  [1], [36] este difeomorfismul local căutat.

Relația  $H \perp V$  impune descompunerea ortogonală

$$\Phi(h, t) = u(h, t) + v(h, t)\mathbf{X}(x_0),$$

unde  $u(h, t)$  este partea orizontală și  $v(h, t)\mathbf{X}(x_0)$  este partea verticală.

Deoarece  $v(h, t) = (\Phi(h, t), \mathbf{X}(x_0)) / \|\mathbf{X}(x_0)\|^2$ , obținem  $\frac{\partial v}{\partial t}(0, 0) = 1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) = 0$ . Identificînd pe  $\Phi(h, t)$  cu perechea  $(u(h, t), v(h, t))$ , găsim matricea jacobian

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial h}(0, 0) & 1 \end{bmatrix}$$

care este nesingulară. Conform teoremei funcției inverse  $(h, t) \rightarrow \Phi(h, t)$  este un difeomorfism pe o vecinătate  $U_* \subset H_\rho \times V_\delta$  a punctului  $(0, 0)$ . Notând  $y = (h, t)$ ,  $x = \Phi(y)$ , găsim  $\varphi = \Phi^{-1}$  și  $U = \Phi(U_*)$ . Mai mult

$$0 \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_1}(\Phi(y)) + \dots + 0 \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_{n-1}}(\Phi(y)) + 1 \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_n}(\Phi(y)) = \\ = \frac{\partial x_i}{\partial y_n}(\Phi(y)) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(\Phi(h, t)) = X_i(\Phi(h, t)) = X_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

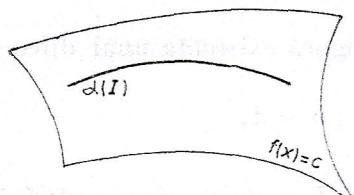


Fig. 3.6.

adică  $f \circ \alpha = \text{const}$ , deoarece  $D_X f \circ \alpha = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)$ ;

— fiecare orbită a lui  $\mathbf{X}$  este conținută în una și numai una dintre mulțimile de nivel constant ale funcției  $f$  (fig. 3.6).

O integrală primă reprezintă o lege de conservare.

**Aplicația 3.4.** Hamilton a arătat că unele probleme de mecanică, optică, calcul variațional etc. pot fi modelate cu ajutorul sistemului de ecuații

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

unde  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție de clasă  $C^2$  de  $2n$  variabile  $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$ . Legea conservării energiei este echivalentă cu faptul că  $H$  este o integrală primă a sistemului precedent. Într-adevăr, dacă notăm

$$X_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad X_{n+i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{2n}),$$

atunci

$$D_{\mathbf{X}} H = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n X_{n+i} \frac{\partial H}{\partial y_i} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} = 0.$$

Funcția  $H$  este un exemplu de integrală primă globală, caz întâlnit destul de rar.

**Aplicația 3.5.** Fie  $A = [a_{ij}]$  o matrice antisimetrică de ordinul  $n$  și  $X = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i = \sum_j a_{ij} x_j$ , un cimp vectorial Killing. Sistemul care dă liniile de cimp  $\frac{dx_i}{dt} = \sum_j a_{ij} x_j$ ,  $i = 1, \dots, n$  (sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți) admite integralele prime globale  $f_m(x) = \|A^m x\|^2$ ,  $m = 0, 1, \dots, n-2$ . Într-adevăr,

$$D_A x f_0(x) = D_A x(x, x) = 2(x, D_A x) = 2(x, Ax) = 0,$$

$$D_A x f_1(x) = D_A x(Ax, Ax) = 2(Ax, D_A x Ax) = 2(Ax, A^2 x) = 2(Ax, A(Ax)) = 0,$$

și în general

$$D_A x f_m(x) = D_A x(A^m x, A^m x) = 2(A^m x, A^m D_A x) = 2(A^m x, A(A^m x)) = 0,$$

În baza antisimetriei matricei  $A$ , Teorema care urmează arată că nu putem avea mai mult de  $n - 1$  integrale prime funcțional independente.

Hipersuprafețele de nivel constant ale funcției  $f_0(x) = \|x\|^2$  sunt hipersfere. De aceea orbitele cîmpului vectorial Killing  $X_i = \sum_i a_{ij}x_j$  aparțin unor hipersfere.

Hipersuprafețele de nivel constant ale funcțiilor  $f_m(x) = \|Ax^m\|^2$ ,  $m = 1, \dots, n - 2$ , pot fi difeomorfe cu hipersfere (dacă  $A$  este nesingulară și deci  $n$  este par) sau sunt subvariații cilindrice de rotație (dacă  $A$  este singulară). Într-adevăr, acestea sunt caracterizate prin ecuații de tipul  $y_1^2 + \dots + y_n^2 = c$ , unde  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sunt forme liniare, fie liniar independente, fie liniar dependente.

În general nu există integrale prime globale ci locale, în sensul teoremei care urmează.

**Teoremă.** Dacă  $\mathbf{X}$  este un cîmp de clasă  $C^1$  pe  $D$  și  $x_0 \in D$  este un punct în care  $\mathbf{X}(x_0) \neq 0$ , atunci există o vecinătate  $U$  a lui  $x_0$  astfel încât sistemul  $(1')$  admite  $n - 1$  integrale prime  $f_1, \dots, f_{n-1}$  funcțional independente pe  $U$  și orice altă integrală primă este o funcție de clasă  $C^1$  de acestea. În aceste condiții, orbitele pe  $U$  ale cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  sunt

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = c_{n-1}.$$

*Demonstrație.* În ipotezele făcute există un difeomorfism de îndreptare  $y_1 = f_1(x), \dots, y_{n-1} = f_{n-1}(x), y_n = f_n(x)$ ,  $x \in U$ , adică un difeomorfism care satisfac relațiile  $(1'')$ . Evident, funcțiile  $f_1, \dots, f_{n-1}$  sunt cele  $n - 1$  integrale prime funcțional independente ale sistemului  $(1')$  pe  $U$ .

Fie  $f_1, \dots, f_{n-1}$  integrale prime funcțional independente ale sistemului  $(1')$  pe o mulțime deschisă  $U$ . Dacă  $f$  este o altă integrală primă pe  $U$ , atunci

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0,$$

.....

$$X_1 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0.$$

Dar acesta este un sistem liniar omogen de  $n$  ecuații care admite prin ipoteză soluția nebanală  $(X_1, \dots, X_n)$ . Rezultă că determinantul sistemului trebuie să fie nul pe  $U$ ,  $\frac{D(f, f_1, \dots, f_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0$ , deci  $f, f_1, \dots, f_{n-1}$  sunt funcțional dependente, adică există  $\psi$  astfel încât  $f = \psi(f_1, \dots, f_{n-1})$ . Reciproc, orice funcție de clasă  $C^1$  de tipul  $f = \psi(f_1, \dots, f_{n-1})$  este o integrală primă a sistemului  $(1')$ . Într-adevăr,

$$D_x f = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial f_j} D_x f_j = 0.$$

Orbitele arbitrară în jurul lui  $x_0$  ale cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  sunt descrise de sistemul de ecuații carteziene implice

$$f_1(x) = c_1, \dots, f_{n-1}(x) = c_{n-1}.$$

prin  $x_0$  trecînd orbita pentru care  $c_i = f_i(x_0)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

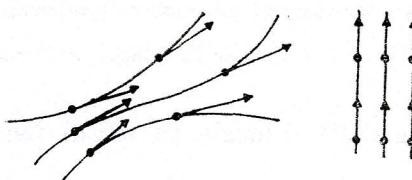


Fig. 3.7

*Variantă.* Noțiunile de integrală primă și independență funcțională sunt invariante în raport cu difeomorfismele (nu depind de sistemul de coordonate ales). De aceea este suficient să demonstrăm afirmațiile teoremei pe sistemul în  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dat în teorema de îndreptare. În acest caz este evident că funcțiile coor-

donate  $g_i(y) = y_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , sunt  $n-1$  integrale prime funcțional independente și că orice integrală primă este o funcție de clasă  $C^1$  de cele  $n-1$  integrale prime  $y_1, \dots, y_{n-1}$ .

Orbitele pe  $U$  sunt segmente de dreptă de ecuații carteziene implice  $y_1 = c_1, \dots, y_{n-1} = c_{n-1}$  (fig. 3.7.)

Uneori sistemul diferențial autonom (1') se înlocuiește cu sistemul simetric

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)} (= dt). \quad (3)$$

Pentru aceasta se convine că dacă un numitor este funcția zero, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero. Punctele în care se anulează toți numitorii generează punctele de echilibru.

Scrierea în forma simetrică (3) permite determinarea integralelor prime prin metoda combinațiilor integrabile (vezi și cap. 8). În ipoteza că există funcțiile  $\lambda_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , de clasă  $C^0$ , astfel încît

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j dx_j = df \text{ și } \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j = 0, \text{ din}$$

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j dx_j}{\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j} = \frac{df}{0}$$

rezultă ecuația Pfaff exactă  $df = 0$  cu soluția generală  $f(x) = c$ . Cu alte cuvinte, funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow f(x)$  este o integrală primă. Diferențiala  $\sum_j \lambda_j dx_j = df$ , cu condiția  $\sum_j \lambda_j X_j = 0$ , care marchează ortogonalitatea cîmpurilor vectoriale  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  și  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , se numește *combinatie integrabilă*.

**Exemplu** (fig. 3.8; vezi și 2.6). Fie

$$\frac{dx}{bx - cy} = \frac{dy}{cx - az} = \frac{dz}{ay - bx} = \frac{adx + bdy + cdz}{0} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}.$$

Rezultă  $adx + bdy + cdz = 0$ ,  $xdx + ydy + zdz = 0$  și deci  $ax + by + cz = c_1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$ . Integralelor prime definite prin  $f_1(x, y, z) = ax + by + cz$ , respectiv  $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  li se atașează matricea jacobian

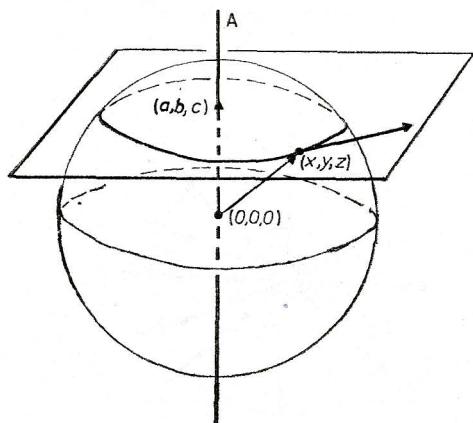


Fig. 3.8

$$J = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

cu rang  $J = \begin{cases} 1 \text{ pe } A = \{(x, y, z) | \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\} \\ 2 \text{ pe } \mathbb{R}^3 \setminus A. \end{cases}$

Rezultă că soluția generală a sistemului pe  $\mathbb{R}^3 \setminus A$  este familia de cercuri  $ax + by + cz = c_1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$ . Evident, A coincide cu mulțimea punctelor de echilibru și este normală ce trece prin origine a familiei de plane paralele  $ax + by + cz = c_1$ . Atât soluția generală cât și punctele de echilibru fac parte din familia de mulțimi descrisă de ecuațiile  $ax + by + cz = c_1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$ .

**Observații.** 1) Fie  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , fără zerouri. Dacă  $f_1(x) = c_1, \dots, f_{n-1}(x) = c_{n-1}$  sunt orbitele lui  $\mathbf{X}$  pe  $U \subset D$ , atunci există  $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  astfel incit  $\mathbf{X}|_U = f_n \operatorname{grad} f_1 \times \dots \times \operatorname{grad} f_{n-1}$ .

2)  $k (\leq n - 1)$  integrale prime funcțional independente determină o subvarietate a lui  $\mathbb{R}^n$  cu  $n - k$  dimensiuni, iar liniiile de cimp (orbitele) sunt complet incluse în această subvarietate.

3) Dacă găsim  $n - 2$  integrale prime funcțional independente  $f_1, \dots, f_{n-2}$  ale sistemului (3), atunci găsirea soluției generale se reduce la găsirea soluției generale a unei ecuații diferențiale de ordinul intui.

Pentru a justifica afirmația precedență, fie subvarietatea bidimensională

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \dots, f_{n-2}(x_1, \dots, x_n) = c_{n-2}.$$

Avem un sistem de  $n - 2$  ecuații care definesc pe  $x_1, \dots, x_{n-2}$  în funcție de  $x_{n-1}, x_n$ :

$$x_k = \varphi_k(x_{n-1}, x_n; c_1, \dots, c_{n-2}), \quad k = 1, \dots, n - 2.$$

Dar  $\frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{dx_n}{X_n}$ . Înlocuind pe  $x_k$  obținem o ecuație diferențială de ordinul unu cu soluția

$$\Phi(x_{n-1}, x_n; c_1, \dots, c_{n-2}) = c_{n-1}.$$

Punind  $c_k = f_k$ , rezultă  $f_{n-1}(x) = c_{n-1}$  și astfel am găsit o nouă integrală primă funcțional independentă de celelalte.

**Exemplu.** Fie sistemul

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dx}{-xy} = \frac{dz}{y^2}.$$

Din  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$  rezultă  $xy = c_1$ . Din  $\frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{y^2}$  găsim  $\frac{dy}{c_1} + \frac{dx}{y^2} = 0$  sau  $\frac{y^3}{3} + c_1 z = \frac{1}{3} c_2$ , adică  $y^3 + 3xyz = c_2$ . Soluția generală și punctele de echilibru (axa Oz :  $x = 0, y = 0$ ) ale sistemului dat fac parte din familia de mulțimi descrisă de ecuațiile  $xy = c_1$ ,  $y^3 + 3xyz = c_2$ . Într-adevăr, integralelor prime definite prin  $f_1(x, y, z) = xy$ ,  $f_2(x, y, z) = y^3 + 3xyz$  le corespunde matricea jacobian

$$J = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ 3yz & 3y^2 + 3xz & 3xy \end{bmatrix}, \quad \text{rang } J = \begin{cases} 1 \text{ pe } A = \{(x, y, z) | y = 0\}, \\ 2 \text{ pe } \mathbb{R}^3 \setminus A. \end{cases}$$

4) Considerăm două cimpuri vectoriale coliniare. Scrierea simetrică (3) arată că dacă facem abstracție de punctele de echilibru ce pot fi introduse de factorul de coliniaritate, atunci cele două cimpuri vectoriale coliniare au aceleași orbite.

5) În cazul spațiului cu trei dimensiuni se utilizează și notațiile  $\mathbf{V}(x, y, z) = v_1(x, y, z) \cdot \mathbf{i} + v_2(x, y, z) \mathbf{j} + v_3(x, y, z) \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ ,  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , iar sistemul simetric

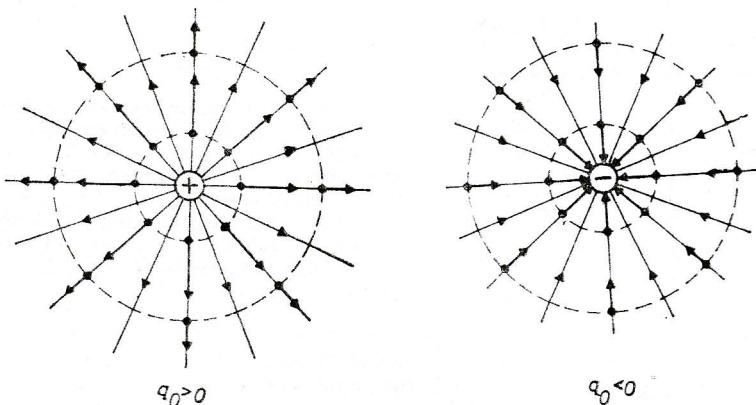


Fig. 3.9

$$\frac{dx}{v_1(x, y, z)} = \frac{dy}{v_2(x, y, z)} = \frac{dz}{v_3(x, y, z)}$$

este echivalent cu ecuația vectorială  $\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = 0$ .

**Aplicația 3.6.** Fie

$$\mathbf{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

cimpul electrostatic produs de sarcina  $q_0$ . Liniile de cimp sunt soluțiile sistemului  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , adică familia de semidrepte  $x = c_1 y$ ,  $x = c_2 z$ ;  $y = 0$ ,  $z = 0$ ;  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . În plus  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E} = 0$  și deci punctul de la  $\infty$  în  $\mathbb{R}^3$  poate fi privit ca un punct de echilibru (fig. 3.9).

**C o m e n t a r i u.** Existența integralelor prime ale cimpului vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  este echivalentă cu existența difeomorfismului de îndreptare. Dacă presupunem că am demonstrat existența integralelor prime  $f_1, \dots, f_{n-1}$ , atunci difeomorfismul  $\varphi$  de îndreptare se poate obține astfel: sistemul cartezian implicit  $f_1(x) = c_1, \dots, f_{n-1}(x) = c_{n-1}$  determină funcția de componentă

$x_1 = \chi_1(x_n, c_1, \dots, c_{n-1}), \dots, x_{n-1} = \chi_{n-1}(x_n, c_1, \dots, c_{n-1})$ ; notăm  $h_n = X_n \circ (\chi_1, \dots, \chi_{n-1})$  și definim

$$\varphi : y_1 = f_1(x), \dots, y_{n-1} = f_{n-1}(x), y_n = \left( \int \frac{dx_n}{h_n(x_n, c_1, \dots, c_{n-1})} \right) \Big|_{c_i = f_i(x)}.$$

**Aplicația 3.7.** Să se determine un difeomorfism local care îndreaptă cimpul vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ ,  $X_1 = x^3 + 3xy^2$ ,  $X_2 = 2y^3$ ,  $X_3 = 2y^2z$  și să se controleze rezultatul găsit prin calcul direct.

*Rezolvare.* Sistemul simetric  $\frac{dx}{x^3 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2z}$  și ipoteza  $X_3 = 2y^2z \neq 0$  conduc la  $\frac{z}{y} = c_1$  și la ecuația Bernoulli  $\frac{dx}{dy} - \frac{x^3}{2y^3} - \frac{3x}{2y} = 0$ . Ecuația Bernoulli se transformă într-o ecuație liniară prin substituția  $u = \frac{1}{x^2}$ ,  $x \neq 0$ . Rezultă soluția  $\frac{5y^2 + x^2}{5x^2y^5} = c_2$ .

$$\text{Din } X_3 = 2y^2z, \frac{z}{y} = c_1, \frac{5y^2 + x^2}{5x^2y^5} = c_2 \text{ găsim } h_3 = \frac{2z^3}{c_1^2} \text{ și } \int \frac{dz}{h_3} = -\frac{c_1}{4z^2} = -\frac{1}{4y^2}.$$

Difeomorfismul căutat este definit prin  $x' = \frac{z}{y}$ ,  $y' = \frac{5y^2 + x^2}{5x^2y^5}$ ,  $z' = -\frac{1}{4y^2}$  (pentru a dovezi că acesta este un difeomorfism se folosește teorema funcțiilor inverse).

Pentru verificare notăm cu  $X_1'$ ,  $X_2'$ ,  $X_3'$  componentele lui  $\mathbf{X}$  în noile coordonate  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  și ținem seama de regula de schimbare a componentelor la o schimbare de coordonate (v. 1.5):

$$X_1' = X_1 \frac{\partial x'}{\partial x} + X_2 \frac{\partial x'}{\partial y} + X_3 \frac{\partial x'}{\partial z} = 0, \quad X_2' = X_1 \frac{\partial y'}{\partial x} + X_2 \frac{\partial y'}{\partial y} + X_3 \frac{\partial y'}{\partial z} = 0,$$

$$X_3' = X_1 \frac{\partial z'}{\partial x} + X_2 \frac{\partial z'}{\partial y} + X_3 \frac{\partial z'}{\partial z} = 1.$$

**Generalizarea teoremei lui Euler.** Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . Dacă  $\mathbf{X}$  este solenoidal, atunci pentru orice punct  $x_0 \in D$  cu  $X(x_0) \neq 0$  există o mulțime deschisă  $U \subset D$  care conține pe  $x_0$  și  $n-1$  cîmpuri scalare  $f_1, \dots, f_{n-1}$  de clasă  $C^\infty$  pe  $U$  astfel încît

$$\mathbf{X}|_U = \text{grad } f_1 \times \dots \times \text{grad } f_{n-1}.$$

**Demonstrație.** Există o vecinătate  $U_1 \subset D$  a lui  $x_0$  și  $n-1$  integrale prime funcțional independente  $g_1, \dots, g_{n-1}: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^\infty$ , iar orice altă integrală primă este o funcție de clasă  $C^\infty$  de acestea. Deoarece orbitele lui  $\mathbf{X}$  pe  $U_1$  au ecuațiile carteziene implice  $g_1(x) = c_1, \dots, g_{n-1}(x) = c_{n-1}$ , există  $g_n: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^\infty$  astfel încât  $\mathbf{X} = g_n \text{ grad } g_1 \times \dots \times \text{grad } g_{n-1}$  pe  $U_1$ . Relația  $\text{div}(\text{grad } g_1 \times \dots \times \text{grad } g_{n-1}) = 0$  implică  $\text{div } \mathbf{X} = (\text{grad } g_n, \text{grad } g_1 \times \dots \times \text{grad } g_{n-1})$  și deci condiția ca  $\mathbf{X}$  să fie solenoidal este echivalentă cu dependența funcțională a cîmpurilor scalare  $g_1, \dots, g_{n-1}, g_n$ . Deci există o vecinătate  $U \subset U_1$  a lui  $x_0$  astfel încât  $g_n|_U$  este o funcție de clasă  $C^\infty$  de  $g_1, \dots, g_{n-1}$ , adică  $g_n|_U$  este o integrală primă.

Considerăm un difeomorfism local de clasă  $C^\infty$  care face trecerea de la integralele prime  $g_1, \dots, g_{n-1}$  la integralele prime  $f_1 = f_1(g_1, \dots, g_{n-1}), \dots, f_{n-1} = f_{n-1}(g_1, \dots, g_{n-1})$  pe o vecinătate a punctului  $(g_1(x_0), \dots, g_{n-1}(x_0))$ . Notăm inversa locală cu  $g_1 = g_1(f_1, \dots, f_{n-1}), \dots, g_{n-1} = g_{n-1}(f_1, \dots, f_{n-1})$ . Atunci

$$\mathbf{X} = g_n(g_1(f_1, \dots, f_{n-1}), \dots, g_{n-1}(f_1, \dots, f_{n-1})) \frac{D(g_1, \dots, g_{n-1})}{D(f_1, \dots, f_{n-1})} \text{grad } f_1 \times \dots \times \text{grad } f_{n-1}.$$

Fixind pe  $f_1, \dots, f_{n-1}$  prin condiția

$$\frac{D(f_1, \dots, f_{n-1})}{D(g_1, \dots, g_{n-1})} = g_n(g_1, \dots, g_{n-1}),$$

obținem reprezentarea

$$X|_U = \text{grad } f_1 \times \dots \times \text{grad } f_{n-1}.$$

**Exemplu.** Fie cîmpul vectorial solenoidal  $X = (x^2 - y^2)(yz, zx, xy)$ . Orbitele lui  $X$  sunt descrise de ecuațiile carteziene implicate  $x^2 - y^2 = c_1$ ,  $x^2 - z^2 = c_2$ . Deci  $g_1 = x^2 - y^2$ ,  $g_2 = x^2 - z^2$  și din  $X = g_3$  grad  $g_1 \times$  grad  $g_2$  rezultă  $g_3 = g_1/4$ . Punind  $f_1 = g_1^2/8$ ,  $f_2 = g_2$  găsim  $X = \text{grad } f_1 \times \text{grad } f_2$ . Evident, putem lua  $f_1' = \frac{g_1^2}{8}$ ,  $f_2' = g_1 + g_2$  și atunci  $X = \text{grad } f_1' \times \text{grad } f_2'$ .

### 3.3. Conjectura lui Sabba Ștefănescu

Liniile cîmpurilor magnetice (cîmpuri solenoidale) determinate de unele circuite electrice filiforme (circuit filiform de două ori cotit, triunghi de curenti rectilinii, poligoane regulate de curenti rectilinii, dicurent directiliniu strîmb, dreptunghi central de curenti rectilinii egali, paralelogram central de curenti rectilinii egali etc.) au fost găsite de acad. Sabba Ștefănescu prin tehnici elementare ingenioase [51]. Cu această ocazie s-au făcut următoarele observații :

- există linii de cîmp magnetic deschise,
- pentru modelele analizate, liniile de cîmp magnetic sunt descrise cu ajutorul unor integrale prime,
- în toate cazurile studiate, printre integralele prime găsite se află cel puțin una care este funcție rațională.

Pentru exemplificare considerăm trei cazuri în care cîmpul magnetic derivă dintr-un potențial, ipoteză ce susține faptul că liniile de cîmp sunt deschise (v. 5.1) și un caz în care cîmpul magnetic este rotațional. În fiecare caz dăm integrala primă rațională.

Deoarece raționamentele matematice se fac în  $\mathbb{R}^3$ , cunoașterea unei integrale prime reduce găsirea liniilor de cîmp la determinarea soluției generale a unei ecuații diferențiale de ordinul întâi.

1) *Cazul unui dicurent directiliniu strîmb* (fig. 3.10). Potențialul magnetic al dicurentului directiliniu strîmb are expresia

$$f_a(x, y, z) = (xy - az)/(y^2 + z^2), (y, z) \neq (0, 0),$$

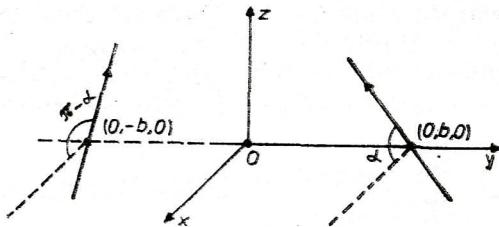


Fig. 3.10

(cîmp scalar armonic) și deci  $H = -\text{grad } f_a(x, y, z)$ . Sistemul care dă liniile de cîmp ale lui  $H$  admite integrala primă rațională

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \\ &= \frac{(xz + ay)^2 + z^2(x^2 + y^2)}{(y^2 + z^2)^2} \end{aligned}$$

deoarece se verifică  $D_H \varphi = 0$ . Mulțimile de nivel constant  $\varphi(x, y, z) = c$  sunt suprafețe riglate cu axa  $Ox$  ca axă de simetrie.

2) *Cazul a doi curenți electrici rectilinii egali.* Potențialul magnetic al ansamblului celor doi curenți este

$$f_{\mu\gamma b}(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{x\gamma - z\mu}{y - b} + \operatorname{arctg} \frac{x\gamma + z\mu}{y + b}, y \neq -b, y \neq b.$$

Orbitele lui  $H = \text{grad } f_{\mu\gamma b}$  sunt conținute în mulțimile de nivel constant

$$\begin{aligned} & \frac{[x^2\gamma^2 + y^2 + z^2(1 + \gamma^2) + b^2(1 + \gamma^2)/\mu]}{[(z\mu - x\gamma)^2 + (y - b^2)][(z\mu + x\gamma)^2 + (y + b)^2]} = \\ & = c, \end{aligned}$$

care se dovedesc a fi suprafete riglate cu  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  ca axe de simetrie.

3) *Cazul a patru curenți electrici liniari de aceeași intensitate, situați în perechi în două plane paralele* (fig. 3.11). În acest caz cîmpul magnetic  $H$  derivă din potențialul

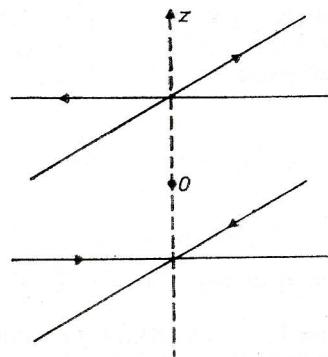


Fig. 3.11

$$\begin{aligned} f_{\mu\gamma h}(x, y, z) = & \operatorname{arctg} \frac{x\gamma + y\mu}{z + h} - \operatorname{arctg} \frac{-x\gamma + y\mu}{z + h} + \\ & + \operatorname{arctg} \frac{-x\gamma + y\mu}{z - h} - \operatorname{arctg} \frac{x\gamma + y\mu}{z - h} \end{aligned}$$

definit pentru  $z \neq -h$ ,  $z \neq h$ . Sistemul care dă liniile de cîmp ale lui  $H$  admite integrala primă

$$\varphi(x, y, z) = 4y^2z^2 \frac{[\gamma^2(1 + \mu^2)x^2 + \mu^2\gamma^2y^2 + \gamma^2z^2 + h^2(1 + \mu^2)]^2}{D_1^2 D_2^2 D_3^2 D_4^2},$$

unde

$$D_1^2 = (z + h)^2 + (-x\gamma + y\mu)^2, D_2^2 = (z - h)^2 + (-x\gamma + y\mu)^2$$

$$D_3^2 = (z + h)^2 + (x\gamma + y\mu)^2, D_4^2 = (z - h)^2 + (x\gamma + y\mu)^2.$$

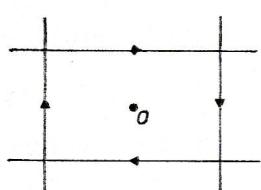


Fig. 3.12

4) *Cazul unui dreptunghi central de curenți rectilini egali* (fig. 3.12). Cîmpul magnetic  $H$  al întregului sistem de curenți are componentele

$$H_x = \frac{-y}{y^2 + (x + a)^2} + \frac{y}{y^2 + (x - a)^2},$$

$$H_z = \frac{-y}{y^2 + (z + b)^2} + \frac{y}{y^2 + (z - b)^2},$$

$$H_y = \frac{z + b}{y^2 + (z + b)^2} - \frac{z - b}{y^2 + (z - b)^2} + \frac{x + a}{y^2 + (x + a)^2} - \frac{x - a}{y^2 + (x - a)^2}.$$

De aici se observă că  $H$  este un cîmp vectorial rotațional.

Orbitele lui  $H$  sunt conținute în mulțimile de nivel constant ale funcției

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2z^2[-mx^2 + (1-m)y^2 + z^2 - a^2m(m-1)]^2}{[y^2 + (z+b)^2][y^2 + (z-b)^2][y^2 + (x+a)^2][y^2 + (x-a)^2]}.$$

Rezultatele obținute în legătură cu liniile de cîmp magnetic l-au determinat pe Sabba Ștefănescu să formuleze următoarea conjectură : *sistemul care dă liniile de cîmp magnetic al unui circuit electric filiform admite o integrală primă ratională.*

### 3.4. Linii de cîmp ale cîmpurilor vectoriale liniare

Un cîmp vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  pe  $\mathbb{R}^n$  se numește *liniar* dacă toate componentele  $X_i$  sunt funcții liniare pe  $\mathbb{R}^n$ , adică  $X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ , unde  $a_{ij}$  sunt  $n^2$  numere reale date. Un cîmp vectorial care nu este liniar se numește *neliniar*. Un cîmp vectorial liniar este :

- 1) *potențial*, dacă  $a_{ij} = a_{ji}$  (potențialul este o formă pătratică cu coeficienții  $a_{ij}$ );
- 2) *solenoidal*, dacă  $a_{11} + \dots + a_{nn} = 0$ ;
- 3) *armonic*, dacă  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $a_{11} + \dots + a_{nn} = 0$ ;
- 4) *Killing*, dacă  $a_{ij} = -a_{ji}$ ;
- 5) *omotetic*, dacă  $a_{ij} + a_{ji} = \psi\delta_{ij}$ ,  $\psi = \text{const} \neq 0$ .

Croșetul a două cîmpuri vectoriale liniare  $Ax$  și  $Bx$  este cîmpul vectorial liniar  $[Ax, Bx] = D_{Ax}Bx - D_{Bx}Ax = (BA - AB)x$ . De aceea mulțimea cîmpurilor vectoriale liniare pe  $\mathbb{R}^n$  este o algebră Lie de dimensiune  $n^2$  (dimensiunea spațiului vectorial real al matricelor pătratice reale de ordinul  $n$ ).

Liniile de cîmp ale unui cîmp vectorial liniar sunt soluțiile sistemului diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Utilizînd notații matriceale  $A = [a_{ij}]$ ,  $x = {}^t[x_1, \dots, x_n]$ , obținem transcrierea

$$dx/dt = Ax. \tag{5}$$

Punctele de echilibru ale sistemului diferențial (5) sunt generate de soluțiile sistemului algebric liniar  $Ax = 0$ .

Liniile de cîmp ale cîmpului vectorial liniar  $Ax$  pot fi găsite sub formă explicită cu ajutorul matricei exponențiale

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} (tA)^n/n!, \quad t \in \mathbb{R},$$

care este o funcție analitică.

**Teorema.** Linia de cimp a lui  $Ax$  care trece prin punctul  $x_0$  la momentul  $t_0$  este definită prin

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Demonstrație.** Deoarece

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{(t-t_0)A}x_0 = Ax, \quad x(t_0) = e^{(t_0-t_0)A}x_0 = x_0,$$

funcția dată este o soluție a problemei Cauchy  $\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(t_0) = x_0$ .

Această soluție este unică, în baza teoremei de unicitate [1, 25, 36].

Tinând seama de faptul că matricea exponențială este nesingulară, mulțimea  $\{x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 \mid x_0 \in \mathbb{R}^n\}$  este un spațiu vectorial izomorf cu  $\mathbb{R}^n$ .

**Aplicația 3.8.** Să se determine linia de cimp a lui  $Ax$ ,  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$ , care

trece prin punctul  $(-1, 2, 0)$  la momentul  $t = 0$ .

**Rezolvare.** Ecuația caracteristică  $\det(A - \lambda I) = 0$  are soluțiile  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$ . Vectorii proprii corespunzători sunt

$$e_1 = {}^t[1, 0, -1], \quad e_2 = {}^t[2, -1, 0], \quad e_3 = {}^t[0, 1, -1].$$

Matricea vectorilor proprii

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

este matricea diagonalizatoare pentru  $A$ , adică

$$D = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obținem

$$x(t) = Se^{tD}S^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} -3e^{-3t} & +2e^{-2t} \\ -e^{-2t} & +3 \\ 3e^{-3t} & -3 \end{bmatrix}$$

sau explicit  $x_1(t) = -3e^{-3t} + 2e^{-2t}, \quad x_2(t) = -e^{-2t}, \quad x_3(t) = 3e^{-3t} - 3, \quad t \in \mathbb{R}$ .

O observație. Fie  $c = {}^t[c_1, \dots, c_n]$  un vector constant arbitrar. Soluția  $x(t) = e^{tA}c$ ,  $t \in \mathbb{R}$  a sistemului (5) se numește soluție generală. Din ea se obține orice altă soluție prin particularizarea lui  $c$ .

Calcularea matricei exponențiale este destul de dificilă și uneori face apel la tehnici speciale. Pentru găsirea soluției generale a sistemului liniar omogen cu coeficienți constanți se poate proceda în felul următor. Prin calcul direct se observă că  $x(t) = he^{At}$ ,  $h$  fiind vector coloană cu coordonate constante,  $t \in \mathbb{R}$ , este o soluție a sistemului liniar omogen cu coeficienți constanți dacă și numai dacă  $h$  este un vector propriu, iar  $\lambda$  este valoarea proprie corespunzătoare a matricei  $A$  în C. Implicit soluțiile se caută de fapt în complexificatul spațiului vectorial  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

**Cazul 1.** Să presupunem că valorile proprii  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ale matricei  $A$  sunt diferite și că  $h_1, \dots, h_n$  sunt vectorii proprii corespunzători. Acestea le corespund soluțiile liniar independente

$$x_k = h_k e^{\lambda_k t}, t \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n.$$

Deci soluția generală a sistemului diferențial este

$$x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n.$$

Evident unele  $\lambda_k$  pot fi complexe și se grupează în perechi. În acest caz, partea reală sau partea imaginară din  $x$  sunt soluții generale reale.

*Practic.* Se determină rădăcinile ecuației caracteristice atașate matricei  $A$ . În ipoteza că acestea sunt simple se caută soluții de forma  $x(t) = h e^{\lambda t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , unde  $h$  este un vector coloană real sau complex după cum este  $\lambda$ . Dacă  $\lambda$  este un număr complex, nu este necesară utilizarea rădăcinii complex conjugate.

**Exemplu.** Fie sistemul

$$x' = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei  $A$  sunt  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ . De aceea se caută soluții de forma

$$x(t) = \begin{bmatrix} a + ib \\ c + id \end{bmatrix} e^{(1+i)t}.$$

care se introduce în sistem ; se găsesc  $b = c$ ,  $a = -d$ . Astfel

$$x(t) = \begin{bmatrix} a + ib \\ b - ia \end{bmatrix} e^{(1+i)t}$$

este soluția generală. Evident  $\text{Re}x(t)$  sau  $\text{Im}x(t)$  este soluția generală reală a sistemului.

**Cazul 2.** Să presupunem că ecuația caracteristică posedă o valoare proprie  $\lambda$  multiplă de ordinul  $m$  și că  $h_1, \dots, h_m$  sunt vectorii atașați lui  $\lambda$  astfel încit

$$Ah_1 = \lambda h_1, \quad Ah_2 = \lambda h_2 + h_1, \dots, \quad Ah_m = \lambda h_m + h_{m-1}.$$

Construim funcțiile vectoriale

$$P_j(t) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} h_1 + \frac{t^{j-2}}{(j-2)!} h_2 + \dots + h_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Să arătăm că funcțiile vectoriale definite prin  $x_j(t) = P_j(t) e^{\lambda t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , sunt soluții ale sistemului omogen. Mai întâi observăm că

$$\frac{dP_j}{dt} = P_{j-1}, \quad AP_j = \lambda P_j + P_{j-1}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Introducind pe  $x_j$  în  $\frac{dx}{dt} = Ax$ , obținem o identitate.

Astfel unei valori proprii multiple de ordinul  $m$  pentru care există vectorii  $h_1, \dots, h_m$  îi corespund  $m$  soluții liniar independente de tipul precedent. Partea din soluția generală corespunzătoare acestor

soluții este de forma  $x(t) = P(t) e^{\lambda t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  unde  $P(t)$  este o matrice coloană de polinoame de gradul  $m - 1$ .

*Practic.* Dacă  $\lambda$  este o valoare proprie multiplă de ordinul  $m$ , atunci se încearcă o soluție de tipul  $x(t) = P(t) e^{\lambda t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  unde  $P(t)$  este o matrice coloană ale cărei elemente sunt polinoame de gradul  $m - 1$ , cu coeficienți reali sau complecsi după cum este  $\lambda$ .

Dacă soluția generală găsită este complexă, atunci se separă partea reală sau partea imaginară care sunt soluții generale reale.

**Exemplu.** Sistemului

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3 + x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2$$

i se atașează matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

care admite valorile proprii  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_{2,3} = -1$ .

Pentru  $\lambda_1 = 2$  căutăm  $x_1 = a e^{2t}$ ,  $x_2 = b e^{2t}$ ,  $x_3 = c e^{2t}$ . Introducind în sistem, rezultă  $a = b = c = c_1$ . Pentru  $\lambda_{2,3} = -1$  căutăm  $x_1 = (\alpha_1 t + \beta_1) e^{-t}$ ,  $x_2 = (\alpha_2 t + \beta_2) e^{-t}$ ,  $x_3 = (\alpha_3 t + \beta_3) e^{-t}$ . Înlocuind în sistem, găsim  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ,  $\beta_1 = c_2$ ,  $\beta_2 = c_3$ ,  $\beta_3 = -c_2 + c_3$ . Soluția generală a sistemului este

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

**O b s e r v a ᄀ i e.** Dacă  $\text{rang}[a_{ij}] = p$ , atunci sistemul diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

admete  $n - p$  integrale prime liniare. Într-adevăr, se observă că

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \lambda_i \right) x_j = 0$$

dacă și numai dacă  $\sum_{i=1}^n a_{ij} \lambda_i = 0$ . Acest sistem algebric admite  $n - p$  soluții nenule  $\lambda_i^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n - p$ , și integralele prime sunt

$$f^\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha x_i.$$

### 3.5. Metoda Runge-Kutta

Raționamentele prezentate în 3.4 arată că liniile de cimp ale cimpurilor vectoriale liniare se explicitează întotdeauna prin evasipolinoame iar raționamentele din 3.2, 3.3 arată că există cimpuri vectoriale ale

cărora linii de cîmp se pot explicita prin ecuații carteziene implicate atașate integralelor prime. În general însă explicitarea exactă a liniilor de cîmp nu este posibilă și de aceea facem apel la aproximări.

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D \subset \mathbb{R}^n$  și sistemul autonom

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x), i = 1, \dots, n,$$

care dă liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$ . Problema Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x), x(t_0) = x_0$$

are o soluție unică  $t \rightarrow x(t)$ ,  $t \in I$ , întrucît se verifică condițiile din teorema de existență și unicitate. Găsirea soluției exacte  $t \rightarrow x(t)$  este posibilă numai în unele cazuri particulare. În general nu dispunem decit de metode care dă aproximări ale soluției exacte. Un exemplu este metoda Runge-Kutta care funcționează în ipoteza că  $\mathbf{X}$  este cel puțin de clasă  $C^2$ .

Fie  $h > 0$  un pas de integrare fixat, fie formula Taylor

$$x(t + h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2} x''(t) + o(h^3)$$

sau

$$x(t + h) = x(t) + h\mathbf{X}'(x(t)) + \frac{h^2}{2} \mathbf{X}'(x(t))(\mathbf{X}'(x(t))) + o(h^3)$$

și

$$k_1 = h\mathbf{X}(x), k_2 = h\mathbf{X}(x + \lambda_{21}k_1).$$

$$k_3 = h\mathbf{X}(x + \lambda_{31}k_1 + \lambda_{32}k_2), k_4 = h\mathbf{X}(x + \lambda_{41}k_1 + \lambda_{42}k_2 + \lambda_{43}),$$

.....

în care  $\lambda_{ij}$  sunt constante deocamdată nedeterminate (prin  $\mathbf{X}'$  înțelegem matricea jacobian a lui  $\mathbf{X}$ ).

Ideea Runge-Kutta constă în a determina parametrii  $\lambda_{ij}$  și  $\alpha_i$  astfel încât coeficienții puterilor lui  $h$ , din expresia lui  $x(t + h)$  și din suma  $x + \sum_{i=1}^s \alpha_i k_i$ , să coincidă pînă la puteri cât mai mari, adică să putem adopta aproximarea

$$x(t + h) \approx x(t) + \sum_{i=1}^s \alpha_i k_i.$$

Pentru simplificare vom efectua calculele în cazul  $s = 2$ . Înînd seama de formula Taylor, găsim

$$\begin{aligned} k_2 &= h\mathbf{X}(x) + h\lambda_{21}\mathbf{X}'(x)(k_1) + \frac{h\lambda_{21}^2}{2} \mathbf{X}''(x)(k_1, k_1) + o(k_1^3) = \\ &= h\mathbf{X}(x) + h^2 \lambda_{21} \mathbf{X}'(x)(\mathbf{X}(x)) + \frac{h^3 \lambda_{21}^2}{2} \mathbf{X}''(x)(\mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x)) + o(h^4), \end{aligned}$$

unde  $k_1 = h \mathbf{X}(x)$ . Atunci

$$x + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 = x + h(\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{X}(x) + h^2 \alpha_2 \lambda_{21} \mathbf{X}'(x)(\mathbf{X}(x)) + \\ + \frac{h^3 \alpha_2 \lambda_{21}^2}{2} \mathbf{X}''(x)(\mathbf{X}(x), \mathbf{X}(x)) + o(h^4).$$

Comparind cu expresia lui  $x(t+h)$ , din egalitatea coeficientilor lui  $h$  și  $h^2$  obținem  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_2 \lambda_{21} = 1/2$ . Notind  $\alpha_2 = \lambda$ , găsim  $\alpha_1 = 1-\lambda$ ,  $\alpha_2 = \lambda$ ,  $\lambda_{21} = 1/(2\lambda)$ . Rezultă sistemul cu diferențe finite

$$x_{k+1}^* = x_k^* + (1 - \lambda)k_1 + \lambda k_2, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

unde

$x_0^* = x_0$ ,  $k_1 = h \mathbf{X}(x_k^*)$ ,  $k_2 = h \mathbf{X}\left(x_k^* + \frac{1}{2\lambda} k_1\right)$ , care aproximează pe  $x' = \mathbf{X}(x)$  cu o precizie pînă la termenii de gradul doi, inclusiv, în raport cu  $h$ . Acest sistem a fost obținut prin fixarea unei diviziuni  $t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_0 + 2h, \dots, t_n = t_0 + nh$  a intervalului  $[t_0, T]$  pe care este definită funcția necunoscută  $x$  și  $x_k^* \approx x(t_k)$ .

Un caz care mărește precizia este  $s = 4$  cînd

$$x_{k+1}^* = x_k^* + \frac{1}{6} [k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4], \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

și

$$k_1 = h \mathbf{X}(x_k^*), \quad k_2 = h \mathbf{X}(x_k^* + k_1/2), \quad k_3 = h \mathbf{X}(x_k^* + k_2/2)$$

$$k_4 = h \mathbf{X}(x_k^* + k_3).$$

Pentru  $h \rightarrow 0$  soluția aproximativă tabelată

t	$t_0$	$t_1$	$t_2$	...
$x(t)$	$x(t_0) = x_0$	$x(t_1) = x_1$	$x(t_2) = x_2$	...

converge către soluția exactă a problemei Cauchy  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

De regulă, soluția aproximativă se determină cu ajutorul calculatorului și nu manual, cum procedăm cu exercițiile aranjate de autori pentru nevoi metodologice.

În încheiere reproducem calculele pentru cazul  $\mathbf{X}(x, y) = (x^3 + y, -x + y^3)$ ,  $\frac{dx}{dt} = x^3 + y$ ,  $\frac{dy}{dt} = -x + y^3$ ,  $x(0) = x_0 = 1$ ,  $y(0) = y_0 = -1$ ,  $t \in [0; 0,1]$ ,  $h = 0,01$  conform ultimelor formule. Succesiv

găsim

$$\begin{aligned}
 (x_0, y_0) &= (1; -1), k_1 = h\mathbf{X}(x_0, y_0) = 0, 1(0; -2) = \\
 &= (0; -0,2), (x_0, y_0) + \frac{k_1}{2} = (1; -1) + (0; -0,2) = (1; -1,2); \\
 k_2 &= h\mathbf{X}\left((x_0, y_0) + \frac{k_1}{2}\right) \approx 0,1 (-0,2; -2,7) = (-0,02; -0,27), \\
 (x_0, y_0) + \frac{k_2}{2} &\approx (1; -1) + (-0,01; -0,13) = (0,99; -1,13), \\
 k_3 &= h\mathbf{X}\left((x_0, y_0) + \frac{k_2}{2}\right) = 0,1 (-0,16; -2,43) \approx \\
 &\approx (-0,02; -0,24), (x_0, y_0) + k_3 = (1, -1) + (-0,02; -0,24) = \\
 &= (0,98; -1,24), k_4 = h\mathbf{X}((x_0, y_0) + k_3) = 0,1 (-0,3; -2,88) \approx \\
 &\approx (-0,03; -0,29), (x_1, y_1) = (x_0, y_0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = \\
 &= (1; -1) + \frac{1}{6}[(0; -0,2) + 2(-0,02; -0,27) + 2(-0,02; -0,24) + \\
 &+ (-0,03; -0,29)] = (1; -1) + \frac{1}{6}(-0,11; -1,51) = (0,98; -1,25).
 \end{aligned}$$

### 3.6. Completitudinea cîmpurilor vectoriale

Un cîmp vectorial  $\mathbf{X}$  de clasă  $C^1$ , pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , cu proprietatea că pentru fiecare  $x_0 \in D$  linia de cîmp maximală a lui  $\mathbf{X}$  prin  $x_0$  are domeniul de definiție egal cu  $\mathbb{R}$  se numește *complet*.

Întrucît reparametrizările prin translații sunt admise, în cele ce urmează simplificăm expunerea considerînd că linia de cîmp trece prin punctul  $x_0$  la momentul  $t_0 = 0$ .

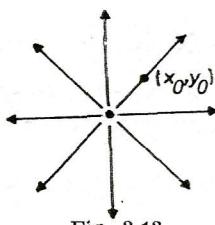


Fig. 3.13

**Exemplu.** 1) Orice cîmp vectorial liniar este complet. De exemplu cîmpul vectorial  $\mathbf{X} = (x, y)$  pe  $\mathbb{R}^2$  admite linile de cîmp  $\alpha(t) = (x_0 e^t, y_0 e^t)$ ,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , definite pe  $\mathbb{R}$ ; zeroul  $(0,0)$  al lui  $\mathbf{X}$  generează punctul de echilibru (fig. 3.13).

În particular, cîmpurile vectoriale Killing sunt complete.

2) Un cîmp vectorial cu toate linile de cîmp închise este complet.

3) Cîmpurile vectoriale  $\mathbf{X} = (y, 0)$ ,  $\mathbf{Y} = (0, x^2/2)$  sunt complete dar croșetul  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  nu este complet.

4) Cîmpurile vectoriale newtoniene și cîmpurile vectoriale electrostatice, cu simetrie sferică, sunt complete (v. 3.1).

Completitudinea cîmpurilor vectoriale poate fi caracterizată prin oricare dintre următoarele două teoreme.

**Teoremă.** Un cîmp vectorial  $\mathbf{X}$  de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$  este complet dacă și numai dacă există o vecinătate  $I$  a lui  $0$  în  $\mathbb{R}$  astfel încît fiecare linie de cîmp maximală a lui  $\mathbf{X}$  să fie definită pe  $I$ .

**Demonstrație.** Necesitatea fiind evidentă, rămîne să dovedim suficiența. Presupunem că există o mulțimea  $I$  deschisă în  $\mathbb{R}$  cu proprietatea specificată și notăm cu  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , un interval închis din  $I$  și cu  $J(x_0)$  domeniul de definiție (interval deschis) al liniei de cîmp maximale  $\alpha_{x_0}$  a lui  $\mathbf{X}$  prin  $x_0$ . Prin ipoteză  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  este inclus în domeniile de definiție ale tuturor liniilor de cîmp maximale.

Procedăm prin reducere la absurd. Presupunem că există  $x_0 \in D$  astfel încît  $J(x_0) \neq \mathbb{R}$ , fapt ce implică existența numărului  $\sup J(x_0) = b$  sau a numărului  $\inf J(x_0) = a$ . Fie  $\sup J(x_0) = b$ ; linia de cîmp prin  $x_1 = \alpha_{x_0}(b - \varepsilon)$  are domeniul de definiție  $J(x_1)$  egal cu translația mulțimii deschise  $J(x_0)$  prin  $-(b - \varepsilon)$  și deci  $J(x_1)$  nu conține pe  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ; contradicție. Fie  $\inf J(x_0) = a$ ; linia de cîmp prin  $x_2 = \alpha_{x_0}(a + \varepsilon)$  are domeniul de definiție  $J(x_2)$  egal cu translația mulțimii deschise  $J(x_0)$  prin  $-(a + \varepsilon)$  și deci  $J(x_2)$  nu conține pe  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ; contradicție.

**Teoremă.** Un cîmp vectorial  $\mathbf{X}$  de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$  este complet dacă și numai dacă pentru orice linie de cîmp  $\alpha : I \rightarrow D$  a lui  $\mathbf{X}$  există o mulțime compactă  $K$  (care depinde de linia de cîmp) astfel încît, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , cu  $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I$ , imaginea  $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon)$  să rămînă în  $K$ .

**Demonstrație.** Necesitatea fiind evidentă, rămîne să dovedim suficiența. Fie  $\alpha : I \rightarrow D$  linia de cîmp maximală care trece prin punctul  $x_0$  la momentul  $t_0 = 0$  și care are proprietatea că  $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon)$  este inclusă într-un compact  $K$  pentru  $\forall \varepsilon > 0$  cu  $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I$ . Deoarece  $\mathbf{X}$  este o funcție continuă, restricția lui  $\|\mathbf{X}\|$  la  $K$  este mărginită.

Să arătăm că  $T = \sup \{\varepsilon | (-\varepsilon, \varepsilon) \subset I\}$  este  $\infty$ . Pentru aceasta procedăm prin reducere la absurd. Presupunem că  $T$  este finit și ținem seama că  $\alpha(t) = x_0 + \int_0^t \mathbf{X}(\alpha(s)) ds$   $t \in [0, T]$ . Rezultă  $\|\alpha(t') - \alpha(t'')\| \leq c|t' - t''| \forall t', t'' \in [0, T]$ . De aceea  $\lim_{t \nearrow T} \alpha(t)$  există (prin criteriul Cauchy) și aparține lui  $K$ , iar  $\lim_{t \nearrow T} \frac{d\alpha}{dt}(t)$  există în baza legăturii  $\frac{d\alpha}{dt} = \mathbf{X}(\alpha)$ . În consecință, restricția lui  $\alpha$  la  $[0, T]$  este o soluție pentru  $\frac{d\alpha}{dt} = \mathbf{X}(\alpha)$ .

Considerăm linia de cîmp  $\beta : J \rightarrow D$  care trece prin punctul  $\lim_{t \nearrow T} \alpha(t)$  la momentul  $T \in \text{int } J$ . Teorema de existență și unicitate arată că  $\beta$  coincide cu  $\alpha$  pentru  $t \in [0, T] \cap J$ . Aceasta impune că  $\alpha$  poate fi prelungită la dreapta lui  $T$ . Analog se arată că  $\alpha$  poate fi prelungită la stînga lui  $-T$ , ceea ce contrazice definiția lui  $T$ .

**O b s e r v a t i e.** Această teoremă a fost formulată și demonstrată de Șerban Bolintineanu și după un enunț ambigu din [24] atribuit lui Hartman [26].

**Consecințe.** 1) Dacă sistemul diferențial  $dx/dt = \mathbf{X}(x)$  admite o integrală primă globală ale cărei mulțimi de nivel constant sunt compacte, atunci cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  este complet.

2) Dacă închiderea mulțimii  $\{x \in D \mid \mathbf{X}(x) \neq 0\} \subset D$  este compactă, atunci cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  este complet.

**Demonstrație.** 2) Orice linie de cîmp care intersectează mulțimea precizată în enunț este în întregime conținută în această mulțime. În caz contrar linia de cîmp se reduce la un punct de echilibru.

Să dăm acum alte condiții suficiente pentru completitudinea unor cîmpuri vectoriale.

**Teorema [24].** Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dacă există o funcție  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^1$ , o funcție proprie  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^0$  și constantele  $A, B$  astfel încât

$$|D_x g(x)| \leq A |g(x)|, \quad |h(x)| \leq B |g(x)|, \quad \forall x \in D,$$

atunci cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  este complet.

**Demonstrație.** Precizăm că funcția  $h$  este proprie dacă  $h^{-1}$  (compact) = compact.

Fie  $\alpha(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  o linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$ . Notând  $\varphi(t) = g(\alpha(t))$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , și ținind seama de relația  $D\varphi(z, t) = \frac{d}{dt} g(\alpha(t))$ , prima ipoteză inegalitate implică

$$\left| \frac{d}{dt} \varphi(t) \right| \leq A |\varphi(t)|, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

sau în detaliu

$$-A \varphi(t) \operatorname{sign} \varphi(t) \leq \frac{d}{dt} \varphi(t) \leq A \varphi(t) \operatorname{sign} \varphi(t), \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

unde

$$\operatorname{sign} u = \begin{cases} -1 & \text{pentru } u < 0, \\ 0 & \text{pentru } u = 0, \\ 1 & \text{pentru } u > 0. \end{cases}$$

Funcția  $|\varphi| : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă și  $\frac{d}{dt} |\varphi(t)| = \frac{d\varphi}{dt}(t) \operatorname{sign} \varphi(t)$ .

Într-adevăr, funcția  $\varphi$  este de clasă  $C^1$ , mulțimile  $\{t \mid t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\varphi(t) > 0\}$  și  $\{t \mid t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\varphi(t) < 0\}$  sunt deschise, iar dacă  $\exists t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  astfel încât  $\varphi(t_0) = 0$ , atunci  $\frac{d\varphi}{dt}(t_0) = 0$  și, în consecință, funcția  $|\varphi|$  este derivabilă în punctul  $t_0$ , avînd derivata nulă în acest punct.

Fie  $t \in [0, \varepsilon)$ . Observăm că

$$\frac{d}{dt} e^{-At} |\varphi(t)| = e^{-At} (-A |\varphi(t)| + \frac{d\varphi}{dt}(t) \operatorname{sign} \varphi(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, \varepsilon).$$

Rezultă că funcția definită prin  $e^{-At}|\varphi(t)|$ ,  $t \in [0, \varepsilon]$ , este decrescătoare și deci  $e^{-At}|\varphi(t)| \leq |\varphi(0)|$  sau  $|\varphi(t)| \leq |\varphi(0)|e^{-At}$ ,  $t \in [0, \varepsilon]$ .

Fie  $t \in (-\varepsilon, 0]$ . Se observă că

$$\frac{d}{dt} e^{At} |\varphi(t)| = e^{At} \left( A |\varphi(t)| + \frac{d\varphi}{dt}(t) \operatorname{sign} \varphi(t) \right) \geq 0, \quad \forall t \in (-\varepsilon, 0].$$

Rezultă că funcția definită prin  $e^{At}|\varphi(t)|$ ,  $t \in (-\varepsilon, 0]$  este crescătoare și deci  $e^{At}|\varphi(t)| \leq |\varphi(0)|e^{At}$  sau  $|\varphi(t)| \leq |\varphi(0)|e^{At}$ ,  $t \in (-\varepsilon, 0]$ .

În concluzie,  $|\varphi(t)| \leq |\varphi(0)|e^{A|t|}$ ,  $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , sau, altfel scris,  $|g(x(t))| \leq |g(x(0))|e^{A|t|}$ ,  $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . De aici și din a doua ipoteză inegalitate găsim  $|h(x(t))| \leq B|g(x(0))|e^{A|t|}$ ,  $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Deoarece  $h$  este proprietate, punctele  $x(t)$  rămân într-o mulțime compactă cind  $t$  variază pe o vecinătate mărginită a lui 0 (pe care este definită o soluție). Conform teoremei precedente  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial complet.

Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , iar  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  un cîmp scalar de clasă  $C^1$ . Liniile de cîmp ale lui  $f\mathbf{X}$  sunt reparametrizări ale linilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$ . Folosind teorema precedentă vom arăta că putem fixa pe  $f$  astfel încît să asigurăm pentru liniile de cîmp ale lui  $f\mathbf{X}$  un parametru care să parcurgă toată mulțimea numerelor reale.

**Consecință.** Pentru fiecare cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$  există un cîmp scalar  $f : D \rightarrow (0, \infty)$  de clasă  $C^1$  astfel încât cîmpul vectorial  $f\mathbf{X}$  să fie complet.

**Demonstrație.** Considerăm funcția proprie  $g : D \rightarrow [1, \infty)$ ,  $g(x) = 1 + \sum_{j=1}^n x_j^2$ , care este de clasă  $C^\infty$ . Cu ajutorul lui  $\mathbf{X}$  și al lui  $g$  construim funcția  $j = 2/[1+(D\mathbf{x}g)^2]$ , care este strict pozitivă și de clasă  $C^1$  pe  $D$ . Deoarece  $|D_f\mathbf{x}g(x)| = j'(x)|D\mathbf{x}g(x)| \leq 1 \leq g(x)$ ,  $\forall x \in D$ , se aplică teorema precedentă cu  $h = g$  și  $A = B = 1$ . În concluzie,  $f\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial complet.

**Aplicația 3.9.** 1) Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial omotetic (vezi 2.7) pe  $\mathbb{R}^n$  și  $f = (X_1^2 + \dots + X_n^2)/2$  energia atașată lui  $\mathbf{X}$ . Definiția cîmpului vectorial omotetic implică  $D_{\mathbf{X}}f = \frac{2c}{n}f$ , unde  $c = \operatorname{div} \mathbf{X}$  este o constantă. Dacă  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție proprie, atunci teorema precedentă, cu  $g = h = f$ ,  $A = 2|c|/n$ ,  $B = 1$  arată că  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial complet.

**O b s e r v a t i e.** Energia cîmpului vectorial Killing ( $z - y$ ,  $x - z$ ,  $y - x$ ) nu este o funcție proprie deoarece posedă mulțimi de nivel constant nemărginite. În concluzie, există cîmpuri vectoriale omotetice ale căror energii nu sunt funcții proprii.

2) Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial torsional (vezi 2.9) pe  $D \subset \mathbb{R}^n$  și  $f = 0,5(X_1^2 + \dots + X_n^2)$  energia atașată lui  $\mathbf{X}$ . Energia  $f$  satisfacă  $D_{\mathbf{X}}f = 2(a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y}))f$ . Dacă  $f$  este proprie și  $a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  este mărginită pe  $D$ , atunci teorema precedentă, cu  $g = h = f$ ,  $A = \sup |a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y})|$ ,  $B = 1$ , arată că  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial complet.

3) *Ecuatiile Lorenz* [34]

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \quad \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz$$

sint o idealizare a ecuațiilor de mișcare a unui fluid într-un strat de adâncime uniformă cind diferența de temperatură dintre suprafață și fund este menținută constantă. Variabila  $x$  este proporțională cu intensitatea mișcării convective,  $y$  este proporțională cu diferența de temperatură între curenții ascendenți și descendenți, iar semnele similare ale lui  $x$  și  $y$  indică faptul că fluidul cald se ridică, iar fluidul rece coboară. Variabila  $z$  este proporțională cu distorsiunea profilului temperaturii verticale de la liniaritate, o valoare pozitivă indicând că gradienții cei mai puternici apar îngă frontiere. Constanta  $\sigma = K^{-1}$  este numărul Prandtl,  $K$  este coeficientul de dilatare termală,  $r$  este viscozitatea, iar  $r$  este numărul Rayleigh.

Cimpul vectorial  $\mathbf{X} = (-\sigma x + \sigma y, -xz + rx - y, xy - bz)$  este complet, adică soluțiile sistemului Lorenz sunt definite pe toată dreapta reală. Într-adevăr, este suficient să punem  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $h(x, y, z) = g(x, y, z)$ ,  $B = 1$ , deoarece există o constantă pozitivă  $A$  astfel încât  $-A(x^2 + y^2 + z^2) \leq D_{\mathbf{X}}g = 2(-\sigma x^2 - y^2 - bz^2 + (\sigma + r)xy) \leq A(x^2 + y^2 + z^2)$ .

### 3.7. Completitudinea cîmpurilor vectoriale hamiltoniene

Un cîmp scalar  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto H(x, y)$ , de clasă  $C^2$ , se numește *hamiltonian*, iar cîmpul vectorial definit pe  $\mathbb{R}^{2n}$  prin

$$\mathbf{X} = (X_i, X_{n+i}), X_i = \partial H / \partial y_i, X_{n+i} = \partial H / \partial x_i, i = 1, \dots, n,$$

se numește *cîmp vectorial hamiltonian*. Hamilton a fost primul care a arătat că funcții de tipul  $H$  și  $\mathbf{X}$  joacă un rol esențial în descrierea unor fenomene ale lumii reale (v. 3.2).

Dacă  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial hamiltonian, atunci

$$\text{rot } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial y_i} & - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_j} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_j} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial y_i} \end{bmatrix}, \quad \text{div } \mathbf{X} = 0.$$

Astfel, în general,  $\mathbf{X}$  nu este irotațional dar este solenoidal.

Se știe că sistemul diferențial care dă liniile de cîmp ale unui cîmp vectorial hamiltonian admite pe  $H$  ca integrală primă globală (v. 3.2), iar una dintre teoremele din paragraful precedent arată că dacă mulțimile de nivel constant ale lui  $H$  sunt compacte, atunci cîmpul vectorial hamiltonian  $\mathbf{X}$  este complet.

Concretizăm expunerea în felul următor. Fie  $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$  fibratul tangent atașat lui  $\mathbb{R}^n$ . Coordonatele locale în  $T\mathbb{R}^n$  sunt  $(x, y)$ , unde  $x \in \mathbb{R}^n$  și  $y \in T_x\mathbb{R}^n$ . Un cîmp scalar  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^2$  va fi numit *energie potențială* pe  $\mathbb{R}^n$ . Cîmpul scalar  $T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2$  se

numește *energia cinetică* atașată structurii euclidiene a lui  $\mathbb{R}^n$ , iar hamiltonianul  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H = T + V$  se mai numește și *energie totală* pe  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Să dăm condiții suficiente pentru completitudinea cîmpului vectorial hamiltonian asociat energiei totale, diferite de cea menționată anterior.

**Teoremă.** Fie  $H = T + V$  energia totală pe  $\mathbb{R}^{2n}$ . Cîmpul vectorial hamiltonian  $\mathbf{X}$  este complet dacă una dintre afirmațiile următoare este adevarată :

- 1)  $V$  este o funcție proprie mărginită inferior (de exemplu  $V \geq 0$ ).
- 2)  $V$  este o funcție mărginită inferior (de exemplu  $V \geq 0$ ).

3)  $\|\text{grad } V\|$  este mărginită.

4)  $\|\text{grad } V\| \leq \text{const } \|\varphi\|$ , unde  $x \rightarrow \varphi(x)$  este o scufundare izometrică a lui  $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij})$  în  $(\mathbb{R}^{n+1}, \delta_{\alpha\beta})$ .

*Demonstratie.* 1) Funcția  $H$  este proprie pe  $\mathbb{R}^{2n}$ , deoarece  $V$  este proprie pe  $\mathbb{R}^n$  și  $V \geq 0$ . Ea satisfacă relația  $D_x H = 0$ , fiind o integrală primă a sistemului care dă liniile de cîmp (v. 3.2). Se aplică ultima teoremă din paragraful precedent cu  $g = h = H$ .

Fie  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0)$  scufundarea izometrică canonica a lui  $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij})$  în  $(\mathbb{R}^{n+1}, \delta_{\alpha\beta})$ . Spațiul euclidian  $\mathbb{R}^n$  este complet. De asemenea el este o subvarietație închisă a spațiului euclidian  $\mathbb{R}^{n+1}$ , deoarece este caracterizat prin ecuația  $x_{n+1} = 0$ . Rezultă că funcția reală  $r^2(x) = \|\varphi(x)\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , este proprie. Această funcție satisfacă relațiile

$$|D_x r^2| = 2 \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq 2r(x)(2T)^{1/2},$$

unde  $X$  este cîmpul vectorial hamiltonian asociat energiei totale.

2) Pentru  $g = H + r^2$  se verifică  $|D_x g| \leq 2|g|$ . Adăugăm  $h = r^2$  sau  $h = g$  și aplicăm ultima teoremă din paragraful precedent.

3) + 4) Fie  $g = h = T + r^2/2$ . Găsim

$$|D_x T| = \left| \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| \leq (2T)^{1/2} \|\text{grad } V\|$$

și deci

$$\left| \frac{D_x g}{g} \right| \leq (2T)^{1/2} \|\varphi\| \left( 1 + \frac{\|\text{grad } V\|}{\|\varphi\|} \right) / \left( T + \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 \right).$$

Cu acestea 4) devine evidentă, iar pentru 3) este suficient să alegem o scufundare pentru care  $\|\varphi\|$  să fie mărginită inferior de un număr strict pozitiv; de exemplu  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 1)$ .

Cîmpurile vectoriale hamiltoniene apar deseori din sistemele conservative. Prin *sistem conservativ cu n grade de libertate* se înțelege un sistem fizic descris de un sistem diferențial de ordinul doi de forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \text{grad } V = 0, \quad (6)$$

unde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , iar potențialul  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  are o clasă convenabilă. Notînd  $\frac{dx}{dt} = y$ , acesta se transferă în spațiul fazelor  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$  într-un sistem hamiltonian,

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = \text{grad } V \text{ cu } H(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2 + V(x). \quad (6')$$

Faptul că  $H$  este o integrală primă pentru (6') se traduce prin aceea că energia totală  $H$  a sistemului (6) se conservă. Ca o consecință apare faptul că dacă în momentul inițial energia totală era egală cu  $H$ , atunci

întreaga traекторie a lui (6) este conținută în domeniul caracterizat prin  $V(x) \leq H$  (punctul  $x$  aparține întotdeauna interiorului gropii de potențial).

**O b s e r v a t i e [2].** Toate problemele ce s-au imaginat pînă în prezent referitoare la sistemele conservative cu un grad de libertate au fost complet rezolvate. Nu se poate afirma același lucru despre sistemele conservative cu cel puțin două grade de libertate (în acest caz există încă probleme deschise).

### 3.8. Curenti și teorema Liouville

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$ . Din fiecare punct  $x$  al lui  $\mathbb{R}^n$  pleacă linia de cîmp maximală (unică)  $\alpha_x(t)$ ,  $t \in I(x)$ , determinată de condițiile inițiale  $(0, x)$ . Teorema de existență și unicitate și teorema de diferențierabilitate în raport cu condițiile inițiale (v. 3.1) arată că pentru fiecare  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  există o vecinătate  $U_1$  a lui  $x_0$  în  $\mathbb{R}^n$  și o vecinătate  $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$  a lui 0 în  $\mathbb{R}$  astfel încît regula  $(t, x) \rightarrow \alpha_x(t)$  definește o funcție  $T : I \times U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clasă  $C^\infty$ . (fig. 3.14). Funcția parțială  $T^t : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $T^t(x) = \alpha_x(t)$  este implicit de clasă  $C^\infty$  și  $T^0(x) = x$ ,  $\forall x \in U_1$ . Tot teoreme din 3.1 arată că mulțimea  $\{T^t | t \in I\}$  are proprietatea de grup  $T^{r+s} = T^r \circ T^s$  ori de câte ori membrul al doilea este bine definit. Deci  $T^{-t} = (T^t)^{-1}$ , adică  $T^t : U \rightarrow T^t(U)$ ,  $U \subset U_1$ , este un difeomorfism.

Mulțimea de difeomorfisme  $\{T^t | t \in I, T^t : U \rightarrow T^t(U)\}$  se numește *curent local pe  $U \subset \mathbb{R}^n$*  sau *grup local cu un parametru de difeomorfisme (transformări) pe  $U$  generat de  $\mathbf{X}$* , atributul *local* referindu-se la  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . Zerourile cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  sunt *punctele fixe* ale curentului.

Pentru  $t$  dintr-o vecinătate a lui 0 putem scrie

$$T^t(x) = x + t\mathbf{X}(x) + o(t^2)$$

sau

$$x'_i = x_i + tX_i(x) + o_i(t^2), \quad i = 1, \dots, n.$$

Funcția definiată prin  $x \rightarrow x + t\mathbf{X}(x)$  se numește transformare infinitesimală asociată lui  $\mathbf{X}$ . Evident, aceasta este aproximarea liniară a lui  $T^t$  pentru  $t$  suficient de apropiat de 0.

Orice integrală primă a sistemului  $\frac{dx_i}{dt} = X_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , este o funcție invariantă față de curentul local  $x \rightarrow T^t(x)$  generat de cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$ . Într-adevăr, ținind seama de definiția integralelor prime, se satisfacă condiția de conservare

$$\frac{d}{dt} f(T^t(x)) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x'_i}(x'_i) \frac{dx'_i}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = D_{\mathbf{X}} f(x) = 0$$

(ce se întimplă pentru  $t = 0$  se întimplă și pentru  $t = t_0 \in I$ , adică  $\frac{d}{dt} f(T^t(x)) \Big|_{t=t_0} = 0$ ). Rezultă  $f(x'_1, \dots, x'_n) = f(x_1, \dots, x)$ .

Notăm cu  $D(0)$  o mulțime deschisă, conexă și mărginită din  $\mathbb{R}^n$  de volum  $v(0)$ , inclusă în domeniul de definiție al lui  $T^t$ . Atunci  $D(t) = T^t(D(0))$  va avea volumul  $v(t)$ .

**Teorema lui Liouville.** Funcția  $t \rightarrow v(t)$  are derivată

$$\frac{dv}{dt}(t_0) = \int_{D(t_0)} \operatorname{div} \mathbf{X} dx, \forall t \in I.$$

**Demonstratie.** Pornim de la egalitatea

$$v(t) = \int_{D(t)} dx' = \int_{D(0)} \left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right| dx$$

(vezi schimbarea de variabile în integrală multiplă de ordinul  $n$ ). Relațiile

$$x'_i = x_i + t X_i(x) + o_i(t^2),$$

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + t \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + o_{ij}(t^2), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

implică

$$\left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right| = 1 + t \operatorname{div} \mathbf{X} + o(t^2)$$

și deci  $v(t) = \int_{D(0)} [1 + t \operatorname{div} \mathbf{X} + o(t^2)] dx$ . Prin derivare în  $t = 0 \in I$  găsim

$\frac{dv}{dt}(0) = \int_{L(0)} \operatorname{div} \mathbf{X} dx$ . Schimbarea lui 0 în  $t_0 \in I$  nu afectează egalitatea,

mai precis

$$\frac{dv}{dt}(t_0) = \int_{D(t_0)} \operatorname{div} \mathbf{X} dx.$$

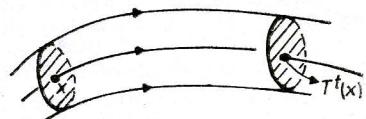


Fig. 3.15

**Consecințe.** 1) Dacă  $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$  (adică  $\mathbf{X}$  este un cîmp solenoidal), atunci curentul local  $\{T^t \mid t \in I\}$  conservă volumul, adică  $v(t) = v(0), \forall t \in I$  (fig. 3.15)

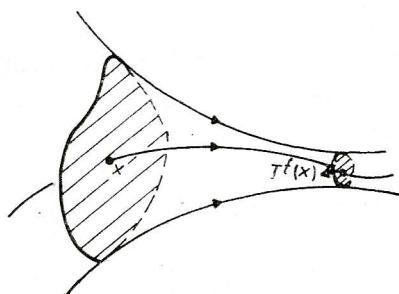


Fig. 3.16

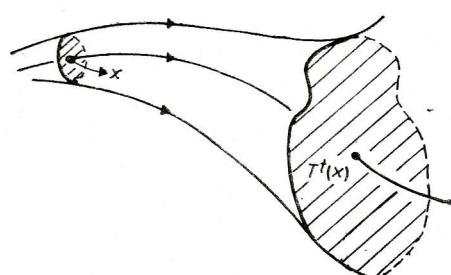


Fig. 3.17

- 2) Dacă  $\operatorname{div} \mathbf{X} < 0$ , atunci curentul generat de  $\mathbf{X}$  micșorează volumul (contractie v. fig. 3.16).
- 3) Dacă  $\operatorname{div} \mathbf{X} \geq 0$ , atunci curentul local asociat lui  $\mathbf{X}$  mărește volumul (dilatație, v. fig. 3.17).

**O b s e r v a t i i.** 1) Din teorema Liouville rezultă că divergența unui cimp vectorial definește viteza de contracție-dilatație a volumelor de către curentul local corespunzător.

2) Curentul local generat de  $\mathbf{X}$  mărește volumul dacă și numai dacă curentul local generat de  $-\mathbf{X}$  mărește volumul.

3) Inversa matricei jacobian de elemente  $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + t \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + o_{ij}(t^2)$  este matricea de elemente  $\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = \delta_{ij} - t \frac{\partial X_i}{\partial x'_j} + o_{ij}(t^2)$ .

4) Teorema Liouville are aplicații importante în mecanica statistică și permite studiul sistemelor mecanice prin metodele teoriei ergodice [13].

Să presupunem acum că  $\mathbf{X}$  este un cimp vectorial (de clasă  $C^\infty$ ) complet pe  $\mathbb{R}^n$ . Cu alte cuvinte, prin fiecare punct al lui  $\mathbb{R}^n$  trece cîte o linie de cimp maximală a lui  $\mathbf{X}$  (și numai una) care este definită pe întreaga axă reală ( $\mathbb{R}^n$  apare ca reuniunea disjunctă a orbitelor lui  $\mathbf{X}$ ). Notind cu  $\alpha_x(t)$  linia de cimp determinată de condițiile inițiale  $(0, x)$ , regula  $x \rightarrow T^t(x) = \alpha_x(t)$  definește un difeomorfism  $T^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clasă  $C^\infty$ ; în particular  $T^0(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Proprietatea  $T^{r+s} = T^r \circ T^s = T^s \circ T^r$  arată că  $\{T^t | t \in \mathbb{R}\}$  este un grup comutativ. Grupul  $\{T^t | t \in \mathbb{R}\}$  se numește *curent global* pe  $\mathbb{R}^n$  sau *grup (global) cu un parametru de difeomorfisme (transformări)* pe  $\mathbb{R}^n$  generat de  $\mathbf{X}$ .

**O b s e r v a t i i.** 1) Multimea  $\mathbb{R}^n$  poate fi înlocuită cu orice submulțime deschisă și conexă.

2) Dacă  $\mathbf{X}$  este de clasă  $C^p$ ,  $p \geq 1$ , atunci difeomorfismul  $T^t$  este de clasă  $C^p[1]$ .

3) Mulțimea difeomorfismelor (transformărilor) pe  $\mathbb{R}^n$  este un grup în raport cu compunerea funcțiilor. Funcția parțială  $t \rightarrow T^t(x)$  este un omomorfism de la grupul  $\mathbb{R}$  la grupul transformărilor lui  $\mathbb{R}^n$ .

4) Fie  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ . Liniile de cimp ale cimpurilor vectoriale coliniare  $\mathbf{X}$  și  $f\mathbf{X}$  sunt parametrizări diferite ale același orbite. De aceea, fiind dat un cimp vectorial  $\mathbf{X}$ , există un cimp scalar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$  astfel încît  $f\mathbf{X}$  să genereze un curent global (v. și 3.6).

5) O submulțime  $S$  a lui  $\mathbb{R}^n$  se numește *multime (local) invariantă* față de curentul (local) global generat de cimpul vectorial  $\mathbf{X}$  dacă imaginea fiecărui punct din  $S$  este tot un punct din  $S$ .

**Apliția 3.10. 1) Mișarea unei particule încărcate într-un cimp electromagnetic staționar.** Fie cimpul electromagnetic pe  $\mathbb{R}^3$  dat de cimpul electric  $\mathbf{E}(x) = (E_1(x), E_2(x), E_3(x))$  și cimpul magnetic  $\mathbf{B}(x) = (B_1(x), B_2(x), B_3(x))$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Mișarea în acest cimp a unei particule de masă  $m$  și sarcină  $q$  este descrisă de ecuația Lorentz,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

unde  $\mathbf{v}$  este cimpul vitezelor. Adăugind ecuația vectorială  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{v}$ , obținem un sistem de ecuații în spațiul fazelor  $\mathbb{R}^6 = \{(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)\}$  și anume sistemul care dă liniile de cimp ale cimpului vectorial  $\mathbf{X} = \left( \mathbf{v}, \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right)$  sau, în extenso,

$$\mathbf{X} = \left( v_1, v_2, v_3, \frac{q}{m}(E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2), \frac{q}{m}(E_2 + v_3 B_1 - v_1 B_3), \frac{q}{m}(E_3 + v_1 B_2 - v_2 B_1) \right).$$

Deoarece

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} + \frac{\partial X_4}{\partial v_1} + \frac{\partial X_5}{\partial v_2} + \frac{\partial X_6}{\partial v_3} = 0,$$

curentul local generat de  $\mathbf{X}$  conservă volumul.

2) Cimpul magnetic staționar este descris de vectorul intensitate  $\mathbf{B}(x) = (B_1(x), B_2(x), B_3(x))$ , iar liniile magnetice de forță sint soluțiile sistemului

$$\frac{dx_i}{dt} = B_i(x), \quad i = 1, 2, 3.$$

Ecuatia Maxwell,  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , asigura faptul ca curentul local generat de  $\mathbf{B}$  conserva volumul.

3) Cimpul Biot-Savart (v. 2.3) este solenoidal. De aceea curentul local generat de el conserva volumul.

4) Curentul local generat de un cimp vectorial hamiltonian conserva volumul. Intr-adevar, pentru  $\mathbf{X} = (X_i, X_{n+i})$ ,  $X_i = \partial H / \partial y_i$ ,  $X_{n+i} = \partial H / \partial x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gasim  $\operatorname{div} \mathbf{X} = \sum_i \left( -\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_i} \right) = 0$ , adica orice cimp hamiltonian este solenoidal.

5) Cimpul newtonian  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i(x) = mx_i / (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2}$  este solenoidal pe  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . De asemenea el este complet. Rezulta ca acest cimp genereaza un curent global pe  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  care conserva volumul.

### 3.9. Curentul global generat de un cimp vectorial Killing sau afin

Fie  $A = [a_{ij}]$  o matrice antisimetrica si  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , un cimp vectorial Killing. Sistemul care dă liniile de cimp este  $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + c_i$  si are solutia generala

$$x = e^{At} \left[ x_0 + \left( \frac{t}{1!} I - \frac{t^2}{2!} A + \dots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} A^n + \dots \right) c \right],$$

$t \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $c = [c_1, \dots, c_n]$ . Rezulta curentul global pe  $\mathbb{R}^n$ ,

$$x = e^{At}y + e^{At} \left[ \frac{t}{1!} I - \frac{t^2}{2!} A + \dots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} A^n + \dots \right] c.$$

Acest curent păstreaza volumul, deoarece  $\operatorname{div} \mathbf{X} = \operatorname{urma} A = 0$ .

Curentul generat de cimpul vectorial Killing  $X_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ , adica  $x = e^{At}y$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  este un grup uniparametric de rotatii. Intr-adevar, matricea  $e^{At}$  este ortogonală și are determinantul egal cu 1 [notind operația de transpunere cu  $*$ , gasim  $(e^{At})^* = e^{A^*t} = e^{-At}$ , iar  $e^{-At}$  este inversa lui  $e^{At}$ ; aceasta înseamna că  $e^{At}$  este o matrice ortogonală și deci  $\det(e^{At}) = \pm 1$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ; dar  $e^0 = I$  și  $\det I = +1$ ; se obtine  $\det(e^{At}) = 1$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ].

Dacă  $A$  este nesingulară (rezulta că  $n$  este par), atunci curentul generat de cimpul Killing  $Ax + c$  se reduce la rototranslații,

$$x = e^{At}(y + A^{-1}c) - A^{-1}c.$$

Dacă  $A$  este singulară și  $Ac = 0$ , atunci curentul generat de cimpul Killing  $Ax + c$  se reduce la

$$x = e^{At}(y + tc).$$

Un difeomorfism  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se numeste izometrie dacă păstreaza distanța euclidiană.

**Teorema.** Un cimp vectorial  $\mathbf{X}$  de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$  este cimp vectorial Killing dacă și numai dacă curentul generat de  $\mathbf{X}$  constă din izometrii.

**Demonstratie.** Fie  $T^t(x) = x + t\mathbf{X}(x) + o(t^2)$  curentul global generat de  $\mathbf{X}$ . Este suficient să folosim condiția de conservare a produsului scalar

$$(\operatorname{d} T^t(x)\mathbf{u}, \operatorname{d} T^t(x)\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{const},$$

unde  $\mathbf{u}$  și  $\mathbf{v}$  sunt vectori arbitrară legați în punctul  $x \in \mathbb{R}^n$ . Mai întâi, observăm că

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{d} T^t(x)\mathbf{u}, \mathbf{d} T^t(x)\mathbf{v})|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n \left( \delta_{ij} + t \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) + \dots \right) u_j \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \sum_{k=1}^n \left( \delta_{ik} + t \frac{\partial X_i}{\partial x_k}(x) + \dots \right) v_k \right]|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ (u, v) + t \sum_{j,k} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(x) \right) u_j v_k + \dots \right]|_{t=0} = \\ &= \sum_{j,k} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(x) \right) u_j v_k. \end{aligned}$$

Condiția de conservare a produsului scalar pe  $\mathbb{R}^n$ ,

$$0 = \frac{d}{dt} (\mathbf{d} T^t(x)\mathbf{u}, \mathbf{d} T^t(x)\mathbf{v})|_{t=0}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v},$$

(ce se întimplă pentru  $t = 0$  se întimplă și pentru  $t = t_0$ ) este echivalentă cu ecuațiile Killing  $\frac{\partial X_j}{\partial x_k} + \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = 0$  pe  $\mathbb{R}^n$ .

Curentul global generat pe  $\mathbb{R}^n$  de cîmpul vectorial afin  $Ax + c$  (v. 2.8) este

$$x = e^{At}y + e^{At} \left[ \frac{t}{1!} I - \frac{t^2}{2!} A + \dots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} A^n + \dots \right] c,$$

$$t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n.$$

Pentru teorema care urmează acceptăm următoarele definiții :

1) o curbă regulată  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $s \rightarrow \gamma(s)$ , se numește dreaptă dacă cîmpul vectorial tangent  $d\gamma/ds$  este paralel, adică  $d^2\gamma/ds^2 = 0$ ;

2) un difeomorfism  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se numește transformare afină dacă  $F \circ \gamma$  este o dreaptă pentru fiecare dreaptă  $\gamma$ .

Evident o izometrie este o transformare afină.

**Teoremă.** Un cîmp vectorial  $\mathbf{X}$  de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$  este un cîmp vectorial afin dacă și numai dacă curentul generat de  $\mathbf{X}$  constă din transformări affine.

**Demonstrație.** Pentru  $n \geq 2$ , fie  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s))$ , o dreaptă oarecare (maximală), adică  $\frac{d^2\gamma}{ds^2} = 0$  și  $T^t(x) = x + t\mathbf{X}(x) + o(t^2)$  curentul global generat de  $\mathbf{X}$ . Găsim

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (T^t \circ \gamma) &= \mathbf{d} T^t \left( \frac{d\gamma}{ds} \right), \quad \frac{d^2}{ds^2} (T^t \circ \gamma) = \mathbf{d}^2 T^t \left( \frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds} \right) = \\ &= t \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial x_j \partial x_k} (\gamma(s)) \frac{dx_j}{ds} \frac{dx_k}{ds} + o(t^2). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\frac{d}{dt} \frac{d^2}{ds^2} (T^t \circ \gamma)|_{t=0} = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial x_j \partial x_k} (\gamma(s)) \frac{dx_j}{ds}(s) \frac{dx_k}{ds}(s),$$

fapt ce arată că condiția de conservare a calității de dreapta,  $0 = \frac{d}{dt} \frac{d^2}{ds^2} (T^t \circ \gamma)|_{t=0}$  (ce se întimplă pentru  $t = 0$  se întimplă și pentru  $t = t_0$ ) este echivalentă cu ecuațiile  $\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0, i, j, k = 1, \dots, n$ , pe  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.10. Curentul local generat de un cîmp vectorial conform

Fie cîmpul vectorial conform  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,

$$X_i(x) = \frac{1}{2} x_i \sum_{j=1}^n c_j x_j - \frac{1}{4} c_i \sum_{j=1}^n x_j^2 + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + d_i, \quad c_{ij} + c_{ji} = \frac{c}{2} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . În cazul  $n = 2$ , acesta este un cîmp vectorial conform particular, cel mai general, identificîndu-se cu o funcție monogenă arbitrară pe  $\mathbb{C}$  (v. 2.7). Notînd  $a_{ij} = (c_{ij} - c_{ji})/2$ , avem transcrierea echivalentă

$$X_i(x) = \frac{1}{2} x_i \sum_{j=1}^n c_j x_j - \frac{1}{4} c_i \sum_{j=1}^n x_j^2 + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \frac{c}{2} x_i + d_i.$$

Curentul global generat de cîmpul vectorial paralel

$$\mathbf{Y}(x) = d \text{ constă din translații}, \quad x = td + y, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Curentul global determinat de cîmpul vectorial concurrent

$$\mathbf{Z}(x) = x \text{ constă din dilatări}, \quad x = e^t y, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Curentul global atașat unui cîmp vectorial Killing  $\mathbf{V}(x) = Ax$  constă din rotații.

Să găsim curentul local generat de cîmpul vectorial

$$\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_n), \quad W_i(x) = \frac{1}{2} x_i \sum_{j=1}^n c_j x_j - \frac{1}{4} c_i \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

Forma lui  $\mathbf{W}$  sugerează că liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{W}$  ar putea fi drepte reparametrizate,  $x_i = a_i + b_i s$ , unde  $s = s(t)$ . Sistemul  $\frac{dx_i}{dt} = W_i(x)$  este satisfăcut pentru  $a_i = 0$ ,  $b_i = \beta c_i$ ,  $\frac{ds}{dt} = \frac{\beta}{4} s^2 \sum_{j=1}^n c_j^2$  și deci  $s =$

$= -\frac{4}{\beta t \sum c_j^2}$ , adică  $x_i = -\frac{4}{t} \frac{c_i}{\sum c_j^2}$ ,  $t \neq 0$ ,  $c_i = \text{const.}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sunt liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{W}$ . În concluzie, curentul local generat de  $\mathbf{W}$  constă din inversiuni,  $x = -\frac{4}{t} \frac{y}{\sum y_j^2}$ ,  $t \neq 0$ ,  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Deoarece mulțimea cîmpurilor vectoriale conforme este o algebră Lie, iar  $\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$  sunt liniar independente, curentul local generat de cîmpul vectorial conform  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{Z} + \mathbf{V} + \mathbf{W}$  pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , conține izometrii, omotetii și inversiuni.

Un difeomorfism local  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , se numește *transformare conformă* a spațiului euclidian  $\mathbb{R}^n$  dacă păstrează măsura unghiurilor.

În cazul  $n \geq 3$  domeniul de definiție al unei transformări conforme este de forma  $\mathbb{R}^n \setminus A$ , unde  $A = \emptyset$  sau  $A = \{x_0\}$  sau  $A$  este hiperplan sau hipersferă. Pentru  $n = 2$ , aceste tipuri de domenii sunt doar cazuri particolare.

Evident o izometrie este o transformare conformă. Curentul local generat de un cîmp vectorial conform pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , este o familie de transformări conforme.

**Teoremă.** Un cîmp vectorial  $\mathbf{X}$  de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , este un cîmp vectorial conform dacă și numai dacă curentul local generat de  $\mathbf{X}$  constă din transformări conforme.

*Demonstratie.* Fie  $T^t(x) = x + t\mathbf{X}(x) + o(t^2)$ ,  $t \in I$ , curentul local generat de  $\mathbf{X}$  pe  $D \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  doi vectori nenuli arbitrari legați în punctul  $x \in D$ . Condiția de conservare a măsurii unghiurilor cu vîrful în  $x$  este

$$\cos \theta(t) = \frac{(\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{u}, \mathbf{d}T^t(x)\mathbf{v})}{\|\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{u}\| \|\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{v}\|} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \text{const.}$$

Observăm că

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \frac{(\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{u}, \mathbf{d}T^t(x)\mathbf{v})}{\|\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{u}\| \|\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{v}\|} \right|_{t=0} = \\ & = \left. \frac{\frac{d}{dt} (\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{u}, \mathbf{d}T^t(x)\mathbf{v}) - (\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{u}, \mathbf{d}T^t(x)\mathbf{v}) \frac{d}{dt} \|\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{u}\| \|\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{d}T^t(x)\mathbf{v}\|^2} \right|_{t=0} = \\ & = \left. \frac{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sum_{j,k} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_k} + \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) (x) u_j v_k - (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \left( \sum_{j,k} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} (x) u_j u_k \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|} + \sum_{j,k} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} (x) v_j v_k \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|} \right)}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Notind  $\Omega_{jk} = \frac{\partial X_j}{\partial x_k} + \frac{\partial X_k}{\partial x_j}$  și presupunînd că  $\mathbf{u}$  și  $\mathbf{v}$  nu sunt ortogonali, condiția de conservare  $0 = \frac{d}{dt} \cos \theta(t)|_{t=0}$  (ce se întimplă pentru  $t = 0$ )

se întimplă și pentru  $t = t_0$ ) se traduce prin identitatea

$$\frac{\sum_{j,k} \Omega_{jk} u_j v_k}{\sum_{j,k} \delta_{jk} u_j v_k} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\Omega_{jk} u_j u_k}{\delta_{jk} u_j u_k} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\Omega_{jk} v_j v_k}{\delta_{jk} v_j v_k}$$

în  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . Această identitate are loc dacă și numai dacă

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_k} + \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \psi \delta_{jk}$$

pe  $\mathbb{R}^n$ . (Suficiența este evidentă. Necesitatea : se derivează identitatea în raport cu  $u_i$ , apoi rezultatul în raport cu  $v_l$  și se contractează  $i$  cu  $l$ .)

### 3.11. Curentul local generat de un cîmp vectorial proiectiv

Multimea cîmpurilor vectoriale proiective pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , este o algebră Lie (v. 2.8). De aceea curentul local generat pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , de cîmpul vectorial proiectiv  $\mathbf{X}(x) = (c, x)x + Ax + d$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , conține curentul global generat de cîmpul vectorial afin  $Ax + d$  (v. 3.9) și curentul local generat de cîmpul vectorial proiectiv  $\mathbf{Y}(x) = (c, x)x$ .

Expresia  $(c, x)x$  sugerează că liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{Y}(x) = (c, x)x$  sunt drepte reparametrizate  $x = a + bs$ ,  $s = s(t)$ . Sistemul  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Y}(x)$  este satisfăcut pentru  $a = 0$ ,  $b$  fiind arbitrar,  $\frac{ds}{dt} = (c, b)s^2$ . Rezultă  $s = -\frac{1}{(c, b)t + \alpha}$  și deci  $x = -\frac{b}{(c, b)t + \alpha}$ ,  $b$  este vector arbitrar,  $\alpha$  – număr arbitrar, iar  $c$  – vector fixat,  $(c, b)t + \alpha \neq 0$  sunt liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{Y} = (c, x)x$ . În concluzie, curentul local generat pe  $\mathbb{R}^n$  de  $\mathbf{Y}(x) = (c, x)x$  este  $x = -\frac{y}{(c, y)t + \alpha}$ ,  $(c, y)t + \alpha \neq 0$ .

Un difeomorfism local  $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se numește *transformare proiectivă* a spațiului euclidian  $\mathbb{R}^n$  dacă  $F \circ \gamma$  este o reparametrizare a unei drepte pentru fiecare dreaptă  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow D$  (v. 3.9).

Domeniul de definiție al unei transformări proiective este de forma  $\mathbb{R}^n \setminus A$ , unde  $A = \emptyset$  sau  $A$  este hiperplan.

Evident o transformare afină este proiectivă. Curentul local generat de un cîmp vectorial proiectiv este o familie de transformări proiective ale lui  $\mathbb{R}^n$ .

**Teoremă.** *Un cîmp vectorial  $\mathbf{X}$  de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , este cîmp vectorial proiectiv dacă și numai dacă curentul local generat de  $\mathbf{X}$  constă din transformări proiective.*

*Demonstrație.* Fie  $T^t(x) = x + t\mathbf{X}(x) + o(t^2)$ ,  $t \in I$ , curentul local definit de  $\mathbf{X}$  pe  $D$  și  $\gamma : I \rightarrow D$ ,  $\gamma(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s))$  o dreaptă. Presupunem că  $T^t \circ \gamma$  este o dreaptă reparametrizată prin  $s = s(u)$ . Atunci

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} (T^t \circ \gamma \circ s) &= dT^t \left( \frac{d\gamma}{ds} \right) \frac{ds}{du}, \\ \frac{d^2}{du^2} (T^t \circ \gamma \circ s) &= d^2 T^t \left( \frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds} \right) \left( \frac{ds}{du} \right)^2 + dT^t \left( \frac{d\gamma}{ds} \right) \frac{d^2 s}{du^2} = \\ &= d^2 T^t \left( (dT^t)^{-1} \frac{d}{du} (T^t \circ \gamma \circ s), (dT^t)^{-1} \frac{d}{du} (T^t \circ \gamma \circ s) \right) + \\ &\quad + \left( \frac{d^2 s}{du^2} / \frac{ds}{du} \right) \frac{d}{du} (T^t \circ \gamma \circ s) \end{aligned}$$

și condiția de conservare a calității de dreaptă reparametrizată,  $0 = \frac{d}{dt} \frac{d^2}{du^2} (T^t \circ \gamma \circ s)|_{t=0}$  (ce se întimplă pentru  $t = 0$  se întimplă și pentru  $t = t_0$ ), se transcrie

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 X_i}{\partial x'_j \partial x'_k} \frac{dx'_j}{du} \frac{dx'_k}{du} + \varphi \left( \frac{dx'}{du} \right) \frac{dx'_i}{du} = 0.$$

Această relație tensorială trebuie să aibă loc oricare ar fi  $dx'/du$  și de aceea ea este echivalentă cu

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = c_k \delta_{ij} + c_j \delta_{ik}, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

### 3.12. Cimpuri vectoriale atașate grupurilor locale de difeomorfisme

Fie  $D$  o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ . O familie de funcții  $\{T^t, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$  definite pe  $D$  cu valori în  $\mathbb{R}^n$  se numește *curent local pe D sau grup local cu un parametru de difeomorfisme pe D* dacă satisfac condițiile următoare :

- 1) funcția  $T : (-\varepsilon, \varepsilon) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto T^t(x)$  este de clasă  $C^\infty$ ;
- 2)  $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , funcția  $T^t : D \rightarrow T^t(D)$  este difeomorfism;
- 3)  $\forall t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  astfel încât  $t + s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  și  $T^s(x) \in D$  avem  $T^{t+s}(x) = T^t(T^s(x))$ , pentru orice  $x \in D$ .

Atributul „local“ se referă la  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ . Dacă  $-(\varepsilon, \varepsilon) = \mathbb{R}$ , atunci acest atribut se înlocuiește cu „global“. De asemenea, din 3) rezultă că  $T^0(x) = x$  pe  $D$ .

Fie căruia grup local de difeomorfisme  $\{T^t\}$  i se atașează viteza  $\mathbf{X} = \frac{dT^t}{dt}(0)$  care este un cimp vectorial pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Să explicităm cimpurile

vectoriale atașate unor grupuri locale de difeomorfisme care prezintă o importantă mai deosebită.

Fie *grupul rototranslațiilor*  $x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + a_i$ ,  $\sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$ ,  $\det[a_{ij}] = 1$ ,

pe  $\mathbb{R}^n$ . Presupunem  $a_{ij} = a_{ij}(t)$ ,  $a_i = a_i(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  și  $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$ ,  $a_i(0) = 0$ . Rezultă  $\sum_{i=1}^n a_{ij}(t)a_{ik}(t) = \delta_{jk}$  și deci  $0 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{da_{ij}}{dt}(0)a_{ik}(0) + a_{ij}(0)\frac{da_{ik}}{dt}(0) \right] = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{da_{ij}}{dt}(0)\delta_{ik} + \delta_{ij}\frac{da_{ik}}{dt}(0) \right] = A_{kj} + A_{jk}$ ,

unde  $A_{ij} = \frac{da_{ij}}{dt}(0)$ . De aceea  $x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + a_i(t)$  implică  $\frac{dx'_i}{dt}(0) = \sum_{j=1}^n \frac{da_{ij}}{dt}(0)x_j + \frac{da_i}{dt}(0)$ , aceasta din urmă reprezentând cîmpul vectorial

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j + A_i$ ,  $[A_{ij}]$  fiind matrice antisimetrică.

Evident,  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial Killing.

Considerăm acum grupul afin  $x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + a_i$ ,  $\det[a_{ij}] \neq 0$  pe  $\mathbb{R}^n$ .

Presupunem  $a_{ij} = a_{ij}(t)$ ,  $a_i = a_i(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  și  $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$ ,  $a_i(0) = 0$ .

Rezultă  $\frac{dx_i}{dt}(0) = \sum_{j=1}^n \frac{da_{ij}}{dt}(0)x_j + \frac{da_i}{dt}(0)$  și deci  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j + A_i$ , unde  $A_{ij} = \frac{da_{ij}}{dt}(0)$ ,  $A_i = \frac{da_i}{dt}(0)$  (cîmp vectorial afin).

*Grupul Lorentz* este definit prin  $x'_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij}x_j$ ,  $\det[a_{ij}] \neq 0$ ,  $\sum_{i,k=1}^4 a_{ij}s_{ik}a_{kl} = s_{jl}$ ,  $s_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ . Presupunem  $a_{ij} = a_{ij}(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  și  $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$ . Din  $\sum_{i,k=1}^4 a_{ij}(t)s_{ik}a_{kl}(t) = s_{jl}$  găsim

$$0 = \sum_{i,k=1}^4 \left( \frac{da_{ij}}{dt}(0)s_{ik}a_{kl}(0) + a_{ij}(0)s_{ik}\frac{da_{kl}}{dt}(0) \right) = \sum_{i,k=1}^4 (A_{ij}s_{il} + s_{ji}A_{kl}), (*)$$

notățiile finale fiind evidente. Deoarece  $\frac{dx'_i}{dt}(0) = \sum_{j=1}^4 \frac{da_{ij}}{dt}(0)x_j$ , rezultă

cîmpul vectorial atașat  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ ,  $X_i = \sum_{j=1}^4 A_{ij}x_j$ , unde  $[A_{ij}]$  este o matrice pătrată de ordinul patru ale cărei elemente satisfac relația (\*).

Fie transformarea proiectivă

$$x'_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + a_i}{\sum_{j=1}^n b_jx_j + b}, \det [a_{ij}] \neq 0,$$

definită pe regiunea  $D : \sum_{j=1}^n b_jx_j + b \neq 0$  din  $\mathbb{R}^n$ .

Compusa a două transformări proiective, transformarea identică și inversă (locală) a unei transformări proiective sunt transformări proiective, pe domeniile respective de definiție. Cu toate acestea mulțimea tuturor transformărilor proiective ale  $\mathbb{R}^n$  nu este un grup de transformări, deoarece intersecția domeniilor lor de definiție este mulțimea vidă.

Presupunem  $a_{ij} = a_{ij}(t)$ ,  $a_i = a_i(t)$ ,  $b_j = b_j(t)$ ,  $b = b(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  și

$$a_{ij}(0) = \delta_{ij}, a_i(0) = 0, b_j(0) = 0, b(0) = 1. \text{ Deoarece } \frac{dx'_i}{dt}(0) =$$

$$= \frac{\left[ \sum_{j=1}^n \frac{da_{ij}}{dt}(0)x_j + \frac{da_i}{dt}(0) \right] \left[ \sum_{j=1}^n b_j(0)x_j + b(0) \right]}{\left[ \sum_{j=1}^n b_j(0)x_j + b(0) \right]^2} -$$

$$- \frac{\left[ \sum_{j=1}^n a_{ij}(0)x_j + a_i(0) \right] \left[ \sum_{j=1}^n \frac{db_j}{dt}(0)x_j + \frac{db}{dt}(0) \right]}{\left[ \sum_{j=1}^n b_j(0)x_j + b(0) \right]^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{da_{ij}}{dt}(0)x_j + \frac{da_i}{dt}(0) - x_i \left[ \sum_{j=1}^n \frac{db_j}{dt}(0)x_j + \frac{db}{dt}(0) \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j + A_i + x_i \left( \sum_{j=1}^n B_jx_j + B \right), \text{ notațiile finale fiind evidente, rezultă cîmpul vectorial proiectiv}$$

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n), X_i = \sum_{j=1}^n (A_{ij} + B\delta_{ij})x_j + x_i \sum_{j=1}^n B_jx_j + A_i.$$

Fie matricea  $\begin{pmatrix} a_{ij} & | & a_{in+1} & a_{i0} \\ \hline a_{n+1j} & | & a_{n+1n+1} & a_{n+10} \\ a_{0j} & | & a_{0n+1} & a_{00} \end{pmatrix}$  și transformarea conformă

$$x'_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + a_{in+1} \sum_{j=1}^n x_j^2 + a_{i0}}{\sum_{j=1}^n a_{0j}x_j + a_{0n+1} \sum_{j=1}^n x_j^2 + a_{00}}, \det[a_{ij}] \neq 0,$$

$$2 \sum_{i=1}^n a_{ij}a_{ia} - a_{0j}a_{n+1a} - a_{0a}a_{n+1,j} = 0, \alpha = 0, 1, \dots, n+1; j = 1, \dots, n;$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 - a_{0j}a_{n+1j} = p, j = 1, \dots, n; 2 \sum_{i=1}^n a_{i0}a_{in+1} - a_{00}a_{n+1n+1} - a_{0n+1}a_{n+10} = -p,$$

$$\sum_{i=1}^n a_{i0}^2 - a_{00}a_{n+10} = 0, \sum_{i=1}^n a_{in+1}^2 - a_{0n+1}a_{n+1n+1} = 0.$$

$$\text{definită pe regiunea } D : \sum_{j=1}^n a_{0j}x_j + a_{0,n+1} \sum_{j=1}^n x_j^2 + a_{00} \neq 0 \text{ din } \mathbb{R}^n.$$

Compusa a două transformări conforme, transformarea identică și inversă (locală) a unei transformări conforme sunt transformări conforme, pe domeniile respective de definiție. În ciuda acestui fapt mulțimea tuturor transformărilor conforme ale lui  $\mathbb{R}^n$  nu este un grup de transformări, deoarece fiecare transformare conformă este definită pe o parte a lui  $\mathbb{R}^n$  și intersecția acestor părți este mulțimea vidă.

Presupunem  $a_{ij} = a_{ij}(t)$ ,  $a_{i,n+1} = a_{i,n+1}(t)$ ,  $a_{i0} = a_{i0}(t)$ ,  $a_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1}(t)$ ,  $a_{0j} = a_{0j}(t)$ ,  $a_{0,n+1} = a_{0,n+1}(t)$ ,  $a_{00} = a_{00}(t)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  și  $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$ ,  $a_{in+1}(0) = 0$ ,  $a_{i0}(0) = 0$ ,  $a_{n+1,n+1}(0) = 1$ ,  $a_{0j}(0) = 0$ ,  $a_{0,n+1}(0) = 0$ ,  $a_{00}(0) = 1$ . Înînd seama de relațiile  $\sum_{i=1}^n a_{in+1}^2 - a_{0,n+1}a_{n+1,n+1} = 0$ ,

găsim  $\frac{da_{0n+1}}{dt}(0) = 0$ . Cu acestea rezultă cîmpul vectorial conform  $\mathbf{X} =$

$$= (X_1, \dots, X_n), X_i = \frac{dx'_i}{dt}(0) = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j + A_{i,n+1} \sum_{j=1}^n x_j^2 + A_{i0} + \\ + x_i \left( \sum_{j=1}^n A_{0j}x_j + A_{00} \right), \text{ notațiile devenind evidente prin explicitarea derivatei.}$$

### 3.13. Probleme propuse

**1.** Să se determine un difeomorfism local care îndreaptă cîmpul vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ ,  $X_1 = x - y + z$ ,  $X_2 = 2y - z$ ,  $X_3 = z$  și să se controleze rezultatul găsit prin calcul direct.

$$\text{R. } x' = \frac{x+y}{z}, y' = \frac{y-z}{z^2}, z' = \ln|z|, z \neq 0.$$

**2.** Pentru fiecare din cîmpurile vectoriale următoare să se determine liniile de cîmp prin metoda integralelor prime și să se fixeze un difeomorfism local de îndreptare.

- 1)  $\mathbf{V} = xz\mathbf{i} + z(2x - y)\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}, \quad 4) \mathbf{V} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k},$
- 2)  $\mathbf{V} = x^2(y + z)\mathbf{i} - y^2(z + x)\mathbf{j} + z^2(y - x)\mathbf{k}, \quad 5) \mathbf{V} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k},$
- 3)  $\mathbf{V} = y^2z^2\mathbf{i} + xyz^2\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}, \quad 6) \mathbf{V} = x(y - z)\mathbf{i} - y(x - z)\mathbf{j} + z(x - y)\mathbf{k}.$

**I n d i c a t i e.** 1)  $x^2 + z^2 = c_1, x(x - y) = c_2; 2) xyz = c_1, yz + xz - xy = c_2xyz;$   
 3)  $y^2 - z^2 = c_1, x^2 - y^2 = c_2; 4) x = c_1y, x^3 + y^2 + z^2 = c_2; 5) x^2 + y^2 + z^2 = c_1,$   
 $x + y + z = c_2; 6) xyz = c_1, x + y + z = c_2.$

**3.** (Continuare). Aceeași problemă pentru cîmpurile vectoriale :

- 1)  $\mathbf{V} = (x^2 - y^2 - z^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k},$
- 2)  $\mathbf{V} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\mathbf{k},$
- 3)  $\mathbf{V} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + z\mathbf{k},$
- 4)  $\mathbf{V} = y(x + y)\mathbf{i} - x(x + y)\mathbf{j} + (x - y)(2x + 2y + z)\mathbf{k},$
- 5)  $\mathbf{V} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - x^2 - y^2)\mathbf{k},$
- 6)  $\mathbf{V} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2xy\sqrt{x^2 - z^2}\mathbf{k},$
- 7)  $\mathbf{V} = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k},$
- 8)  $\mathbf{V} = (xy - 2z^2)\mathbf{i} + (4xz - y^2)\mathbf{j} + (yz - 2x^2)\mathbf{k}.$

**I n d i c a t i e.** 1)  $y = c_1z, x^2 + y^2 + z^2 = 2c_2z; 2) y = c_1x, z = c_2 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$

$$3) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}; \quad 4) x^2 + y^2 = c_1, (x + y)(x + y + z) = c_2;$$

$$5) y = c_1x, z + x^2 + y^2 = c_2x; \quad 6) x^2 - y^2 = c_1, \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \arcsin \frac{z}{a} + c_2;$$

$$7) x - y = c_1(y - z), xy + yz + zx = c_2; \quad 8) z^2 + xy = c_1, x^2 + yz = c_2.$$

**4.** Să se determine cîmpurile vectoriale ale căror orbite sunt respectiv :

- 1)  $x^2 - yz = c_1, \quad 2) x^2 + \frac{1}{y^2} = c_1, \quad 3) x + \arcsin \frac{y}{z} = c_1,$   
 $y^2 - zx = c_2; \quad 4) y^2 + \frac{1}{z^2} = c_2; \quad 5) y + \arcsin \frac{x}{z} = c_2.$

**I n d i c a t i e**  $\mathbf{X} = h\text{grad } f \times \text{grad } g.$

**5.** Să se rezolve sistemele diferențiale liniare  $x' = Ax$  în fiecare din cazurile următoare :

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad 4) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad 5) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix};$$

$$3) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad 6) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

**6.** Să se aproximeze soluția, prin metoda Runge-Kutta, în fiecare din cazurile :

$$\frac{dx}{dt} = xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = x^2y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad t \in [0, 1], \quad h = 0,1;$$

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - 2y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -y(1 + 2x^2), \quad \frac{dz}{dt} = 2z(x^2 + y^2),$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = 1, \quad t \in [0, 10], \quad h = 0,2.$$

Apoi să se verifice rezultatul găsit cu ajutorul integralelor prime.

**7.** Să se cerceteze completitudinea cîmpurilor vectoriale din problemele 2 și 3.

**8.** Se consideră hamiltonianul  $H(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 y_k^2 + V(x)$ . În fiecare din cazurile următoare să se determine curentul generat de cîmpul vectorial hamiltonian asociat lui  $H$ :

$$V(x) = x_1 x_2 x_3, \quad V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad V(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3.$$

Care dintre acestea este curent global?

**9.** Să se determine mișcarea unui electron într-un cîmp electromagnetice static uniform, în care cîmpurile vectoriale  $\mathbf{E}$  și  $\mathbf{B}$  sunt coliniare, presupunînd că viteza initială  $v_0$  a electronului este perpendiculară pe direcția comună a celor două cîmpuri.

Indicație.  $m\ddot{\mathbf{r}} = -q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , unde  $m$  este masa electronului și  $q > 0$  este sarcina sa. Rezultă  $x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ ,  $y = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$ ,  $z = -\frac{qE}{2m} t^2$ ,  $\omega = \frac{\epsilon B}{m}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; deci traiectoria este o elice cu pas variabil.

**10.** În fiecare din cazurile următoare să se determine curentul generat de cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  și să se arate că el conservă volumul :

$$\mathbf{X} = (xz, z(2x - y), -x^2),$$

$$\mathbf{X} = (yz, zx, xy),$$

$$\mathbf{X} = (x^2(y + z), -y^2(z + x), z^2(y - x)),$$

$$\mathbf{X} = \left( y, x, 4 \frac{y^2}{x^2} \right),$$

$$\mathbf{X} = (x(y - z), -y(x - z), z(x - y)),$$

$$\mathbf{X} = ((z - y)^2, z, y).$$

I n d i c a ț i e. Pentru determinarea curentului se pot folosi integralele prime.

**11.** În fiecare dintre cazurile următoare să se determine curentul generat de cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  și să se arate că el mărește volumul :

$$\mathbf{X} = (x + y - z, x - y + z, -x + y + z), \mathbf{X} = (xy^2, x^2y, z(x^2 + y^2)),$$

$$\mathbf{X} = (x(y^2 - z^2), -y(x^2 + z^2), z(x^2 + y^2)), \mathbf{X} = (x(1 - 2y^2), y(1 + 2x^2), 2z(x^2 + y^2)).$$

I n d i c a ț i e. Pentru determinarea curentului se pot folosi integralele prime.

**12.** În fiecare dintre cazurile următoare să se determine curentul generat de cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  și să se arate că el mărește volumul :

$$\mathbf{X} = (x(y^2 - x^2), y(x^2 - y^2), -2z(x^2 + y^2)),$$

$$\mathbf{X} = (-x(x^2 + 3y^2), -2y^3, -2y^2z), \mathbf{X} = (3xy^2 - x^3, -2y^3, -2y^2z).$$

I n d i c a ț i e. Pentru determinarea curentului se pot folosi integralele prime.

**13.** Să se scrie transformările infinitezimale asociate cîmpurilor vectoriale din problemele 10, 11, 12 și pentru fiecare caz să se calculeze jacobianul transformării.

**14.** Să se găsească curbura și torsiunea unei linii de cîmp a lui  $\mathbf{X} = (yz, zx, xy)$ .

## 4. STABILITATEA PUNCTELOR DE ECHILIBRU

Fie un sistem fizic ale cărui stări  $x$  sunt descrise de un sistem de evoluție  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x)$ . Punctele fixe ale curentului lui  $\mathbf{X}$ , adică zerourile lui  $\mathbf{X}$ , sunt punctele de echilibru ale sistemului fizic. Dacă sistemul fizic rămîne într-o vecinătate a punctului de echilibru  $x_0$  cind evoluția începe dintr-o vecinătate a lui  $x_0$ , atunci punctul  $x_0$  se numește stabil; dacă nu, se numește instabil.

Oscilațiile mici ale unui pendul plan și mișcarea unui solid rigid sunt analizate în 4.1 din punctul de vedere al definiției matematice a stabilității punctelor de echilibru. În 4.2 se prezintă stabilitatea punctelor de echilibru generate de zerourile cimpurilor vectoriale liniare cu o aplicație în teoria circuitelor electrice, iar în 4.3 se arată că punctele de echilibru din plan pot fi: puncte de rotație, atractori, puncte să etc.

Uneori problema stabilității punctelor de echilibru se poate rezolva prin metode indirekte. Dintre acestea, cele mai cunoscute sunt metoda aproximării liniare pe care o vom aplica la sisteme diferențiale ce descriu procese biochimice sau circuite electrice (v. 4.4) și metoda funcțiilor Leapunov care este potrivită în special pentru sistemele hamiltoniene (v. 4.5).

În 4.6 se propun cîteva probleme privind stabilitatea și clasificarea punctelor de echilibru.

### 4.1. Problema stabilității

Să considerăm un sistem fizic a cărui comportare în timp este descrisă de sistemul autonom (nu conține explicit variabila independentă):

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  fiind un cîmp vectorial de clasă convenabilă pe o mulțime deschisă și conexă  $D$ . Cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  descrie local evoluția sistemului [ $\mathbf{X}(x)$  dă viteza de variație].

Dacă  $a$  este un punct din  $D$  pentru care  $\mathbf{X}(a) = 0$ , atunci  $x(t) = a$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , este o soluție a sistemului (1) care verifică condițiile inițiale  $x(t_0) = a$ . O astfel de soluție se numește *punct de echilibru*. Din punct de vedere intuitiv spunem că punctul de echilibru  $a$  este stabil dacă orice soluție a lui (1) ce pleacă la  $t = t_0$  dintr-un punct suficient de apropiat de  $a$  rămîne pentru  $t > t_0$  într-o vecinătate a lui  $a$ . Presupunem că  $\mathbf{X}$  este de clasă  $C^1$  pe  $D$  pentru a asigura existența și unicitatea soluțiilor problemelor Cauchy și notăm cu  $t \rightarrow x(t, x_0)$  soluția lui (1) care verifică condițiile inițiale  $x(t_0, x_0) = x_0$ .

Punctul de echilibru  $a$  al sistemului (1) se numește (fig. 4.1):

1) *stabil*, dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $a$  astfel încât  $x_0 \in V$  să implice existența soluției  $t \rightarrow x(t, x_0)$ ,  $t \in [t_0, \infty)$  și dacă  $\lim_{x_0 \rightarrow a} x(t, x_0) = a$ , uniform în raport cu  $t \in [t_0, \infty)$ ;

2) *asimptotic stabil*, dacă este stabil și dacă există o vecinătate  $U \subset V$  a lui  $a$  astfel încât  $x_0 \in U$  să implice  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = a$ ;

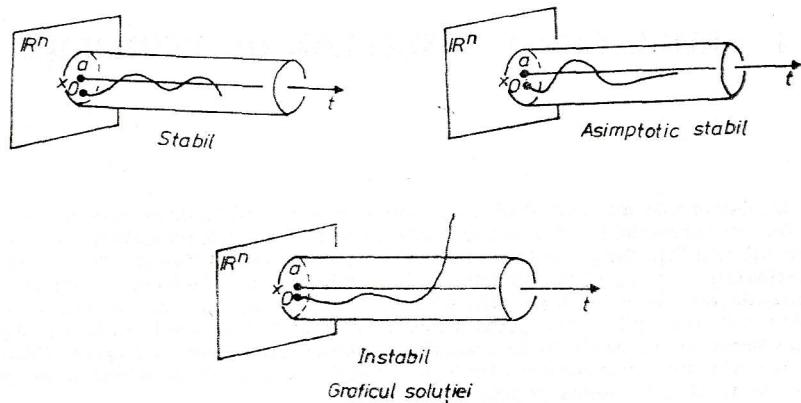


Fig. 4.1

3) *instabil*, dacă nu este stabil.

Observăm că un punct de echilibru neizolat  $a$  poate fi stabil, dar nu poate fi asimptotic stabil. Într-adevăr, dacă  $x_0$  este un punct de echilibru diferit de  $a$ , atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = x_0 \neq a$ .

**Teorema.** Fie  $X$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$  și  $\alpha : [t_0, \infty) \rightarrow D$  o linie de cîmp a lui  $X$ . Dacă există  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = x_1 \in D$ , atunci  $x_1$  este un zero al lui  $X$  [punct de echilibru al sistemului diferențial (1)].

**Demonstrație.** Din ipoteză și din  $\alpha(t) = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^t X(\alpha(s))ds$  rezultă  $x_1 = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} X(\alpha(s))ds$ . Convergența integralei și  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(\alpha(t)) = X(x_1)$  implică  $X(x_1) = 0$ .

**Aplicații 4.1.** Oscilațiile mici ale unui pendul plan (fig. 4.2). Sistemul autonom  $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x$

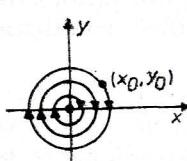


Fig. 4.2

:  $\frac{dy}{dt} = -x$  admet punctul de echilibru  $(0, 0)$ . Derivând prima ecuație în raport cu  $t$  și ținind seama de ecuația a două, obținem  $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$  (ecuația oscilațiilor mici ale pendulului în vecinătatea poziției inferioare de echilibru) cu soluția generală  $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, t \in \mathbb{R}$ . Rezultă  $y(t) = c_2 \cos t - c_1 \sin t, t \in \mathbb{R}$ .

Fie condițiile inițiale  $t = 0$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Linia de cimp care le satisfac este  $x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t$ ,  $y(t) = y_0 \cos t - x_0 \sin t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Punctul de echilibru  $(0, 0)$  este stabil, deoarece

$$\lim_{\substack{x_0 \rightarrow 0 \\ y_0 \rightarrow 0}} x(t) = 0 = \lim_{\substack{x_0 \rightarrow 0 \\ y_0 \rightarrow 0}} y(t), \quad \forall t \in [0, \infty).$$

El nu este asimptotic stabil întrucât  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  nu există.

**4.2.** Mișcarea unui solid rigid în jurul unui punct fix  $O$  (rotație oarecare!) este caracterizată prin ecuațiile Euler

$$I_1 \frac{dx_1}{dt} = (I_2 - I_3)x_2x_3, \quad I_2 \frac{dx_2}{dt} = (I_3 - I_1)x_3x_1, \quad I_3 \frac{dx_3}{dt} =$$

$\Leftrightarrow (I_1 - I_2)x_1x_2$ , unde  $(x_1, x_2, x_3)$  sunt componentele vitezei unghiulară, iar  $I_1, I_2, I_3$  sunt momentele principale de inerție în raport cu punctul  $O$ . Axele carteziene  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  coincid cu axele principale de inerție în raport cu  $O$ . Ele constau din puncte de echilibru ale sistemului precedent.

Sistemul admite integralele prime globale  $I_1x_1^2 + I_2x_2^2 + I_3x_3^2$  (energia),  $I_1^2x_1^2 + I_2^2x_2^2 + I_3^2x_3^2$  (momentul unghiular) și în consecință soluția generală  $I_1x_1^2 + I_2x_2^2 + I_3x_3^2 = c_1$ ,  $I_1^2x_1^2 + I_2^2x_2^2 + I_3^2x_3^2 = c_2$  (definită în raport cu timpul  $t$  pe toată axa reală). Pentru a vizualiza orbitele folosim difeomorfismul  $y_1 = I_1x_1, y_2 = I_2x_2, y_3 = I_3x_3$  care transferă familiile precedente de elipsoizi într-o familie de elipsoizi  $\frac{y_1^2}{I_1} + \frac{y_2^2}{I_2} + \frac{y_3^2}{I_3} = c_1 = 2E$  și o familie de sfere  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = c_2 = \|y\|^2$ , unde  $y = (y_1, y_2, y_3)$  este vectorul momentului cinetic al solidului relativ la  $O$ . Presupunem  $I_3 < I_2 < I_1$  și cămă pe  $E > 0$  și facem să varieze raza  $\|y\|$  a sferei (fig. 4.3). Semi-axele elipsoidului sunt  $\sqrt{2EI_3} < \sqrt{2EI_2} < \sqrt{2EI_1}$ . Dacă  $\|y\| < \sqrt{2EI_3}$  sau  $\|y\| > \sqrt{2EI_1}$ , atunci intersecția este vidă și deci nu există mișcări cu astfel de valori ale lui  $E$  și  $\|y\|$ . Dacă  $\|y\| = \sqrt{2EI_3}$ , atunci intersecția se reduce la două puncte (puncte de echilibru); cu creșterea razei,  $\sqrt{2EI_3} < \|y\| < \sqrt{2EI_2}$ , se obțin două curbe închise în jurul extremităților axei minime. Dacă  $\|y\| = \sqrt{2EI_1}$ , se obține capetele axei maxime (puncte de echilibru), iar pentru  $\sqrt{2EI_1} < \|y\| < \sqrt{2EI_2}$  se găsesc două curbe închise în vecinătatea acestor capete. Pentru  $\|y\| = \sqrt{2EI_2}$  intersecția este formată din două cercuri care trece prin capetele axei mijlocii (puncte de echilibru).

Punctele de echilibru  $(a, 0, 0)$  sau  $(0, 0, c)$  sunt stabile, deoarece pentru o abatere mică a condițiilor inițiale de la punctul  $(a, 0, 0)$  sau  $(0, 0, c)$  traiectoria va fi o curbă închisă situată într-o vecinătate mică a poziției de echilibru. Punctul de echilibru  $(0, b, 0)$ ,  $b \neq 0$ , este instabil, deoarece o abatere mică de la acest punct determină orbită închisă care nu rămîn în întregime într-o vecinătate mică a punctului de echilibru (v. fig. 4.3 care redă orbitele ecuațiilor Euler pe o suprafață de nivel constant a energiei).

## 4.2. Stabilitatea zerourilor cîmpurilor vectoriale liniare

Fie sistemul liniar omogen cu coeficienți constanti

$$dx/dt = Ax, \quad (2)$$

unde  $A$  este o matrice de tipul  $n \times n$  cu elemente reale, iar  $x$  este un vector coloană. Punctele de echilibru ale acestui sistem sunt generate de soluțiile sistemului algebric  $Ax = 0$  (sistem liniar omogen de  $n$  ecuații cu  $n$  necunoscute). Evident, printre acestea se găsește și punctul  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , de a cărui stabilitate ne vom ocupa în continuare. Studiul stabilității oricărui alt punct de echilibru se poate reduce la cel al lui  $x = 0$  printr-o translație. Punctul de echilibru  $x = 0$  este izolat dacă și numai dacă  $\det A \neq 0$ .

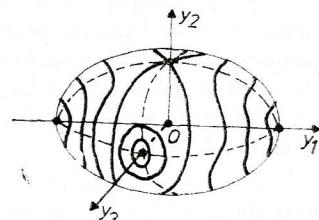


Fig. 4.3

**Teoremă.** Fie punctul de echilibru  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

1) Dacă toate valorile proprii ale matricei  $A$  au partea reală strict negativă, atunci punctul de echilibru este stabil și asimptotic stabil.

2) Presupunem că toate valorile proprii ale matricei  $A$  au partea reală negativă, iar valorile proprii pur imaginare (dacă există) au fiecare în parte proprietatea că dimensiunea subspațiului propriu atașat este egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii. Dacă printre valorile proprii ale lui  $A$  se află una pur imaginată, atunci punctul de echilibru este stabil dar nu asimptotic stabil.

3) Dacă o valoare proprie a matricei  $A$  are partea reală strict pozitivă sau dacă există o valoare proprie pur imaginată astfel încât dimensiunea subspațiului propriu atașat să fie mai mică decât ordinul de multiplicitate al valorii proprii, atunci punctul de echilibru nu este stabil.

*Demonstrație.* Soluția generală a unui sistem liniar omogen cu coefi-cienți constanti se poate scrie în forma (v. 3.4)

$$x(t) = \varphi(t; c_1, \dots, c_n) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = w(t)c,$$

$t \in \mathbb{R}$ , unde  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  sunt soluții liniar independente,  $w(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$  este matricea Wronski și  $c = [c_1, \dots, c_n]$ . Din aceasta se obține soluția care satisfacă condiția inițială  $x(t_0) = x_0$  și deci  $w(t_0)c = x_0$ . Deoarece  $w(t_0) \neq 0$  (soluțiile particulare sunt liniar independente) matricea  $x_0$  tinde la matricea zero dacă și numai dacă matricea  $c$  tinde la matricea zero.

Elementele matricei coloană  $x(t)$  sunt evasipolinoame.

1) Fiecare termen al soluției generale conține factori de tipul  $e^{\alpha t}$ ,  $\alpha < 0$ . Relația  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} = 0$  implică

$$(*) \lim_{c \rightarrow 0} \varphi(t; c) = 0 \text{ (matricea zero), } \forall t \in [t_0, \infty),$$

$$(**) \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; c) = 0 \text{ (matricea zero).}$$

(Limita unei matrice este matricea limitelor !) Astfel punctul de echilibru este stabil și asimptotic stabil.

2) Presupunem că matricea  $A$  are și valori proprii pur imaginare. și în acest caz are loc relația (\*). Dar  $\varphi(t; c)$  conține și termeni de tipul  $c_j \sin \beta t$ , iar  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin \beta t$  nu există. De aceea relația (\*\*) nu are loc. Cu alte cuvinte, punctul de echilibru este stabil, dar nu asimptotic stabil.

3) Există factori de tipul  $e^{\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$ , și  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} = \infty$  sau factori nemărginiți de tipul  $t \sin t$  și  $\lim_{t \rightarrow \infty} (t \sin t)$  nu există. De aceea relația (\*) nu poate avea loc (fiind vorba de limite uniforme în raport cu  $t$ ).

**Comentariu.** Studiul stabilității punctului de echilibru  $x = 0$  se poate face plecind de la faptul că soluția problemei Cauchy  $\frac{dx}{dt} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$  este  $x(t) = e^{tA} x_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Dar atunci sunt necesare teoremele de explicitare a matricei exponentiale și leme de tipul următor.

**Lemă.** Dacă toate valorile proprii în  $C$  ale matricei pătrate reale  $A$  au părțile reale strict negative, atunci există constantele  $M > 0$  și  $a > 0$  astfel încât  $\|e^{tA}\| \leq M e^{-at}$ ,  $t \in [0, \infty)$ .

*Demonstrație.* Fiecare element al matricei  $e^{tA}$  este un evasipolinom, adică o combinație liniară finită de funcții de forma  $P(t) e^{\lambda t}$ , unde  $P(t) = \sum_{k=0}^m c_k t^k$ , iar  $\lambda$  este o valoare proprie a matricei  $A$ .

Fie  $\alpha > 0$ . Din  $e^{\alpha t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$ ,  $t \in [0, \infty]$  deducem  $t^k < \frac{k!}{\alpha^k} e^{\alpha t}$ ,  $t \in [0, \infty]$ . Impunând  $0 < \alpha < -\operatorname{Re}\lambda$  și notind  $\gamma = -\operatorname{Re}\lambda - \alpha > 0$ , obținem  $t^k e^{t\operatorname{Re}\lambda} < \frac{k!}{\alpha^k} e^{-t\gamma}$ ,  $t \in [0, \infty]$ . În concluzie, pentru  $t \in [0, \infty]$  obținem

$$|P(t)e^{\lambda t}| \leq e^{t\operatorname{Re}\lambda} \sum_{k=0}^m |c_k| t^k \leq e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^m |c_k| \frac{k!}{\alpha^k}$$

și astfel lema devine evidentă.

Valorile proprii ale unei matrice reale antisimetrice  $A$  sunt pur imaginare și fiecare valoare proprie pur imaginată are proprietatea că dimensiunea subspațiului propriu asociat este egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii. De aceea zerourile cimpurilor vectoriale Killing  $Ax$  sunt stabile, dar nu asimptotice stabile.

Pentru a fi mai operativi în aplicarea teoremei precedente avem nevoie să stabilim dacă rădăcinile polinomului caracteristic al matricei  $A$  au partea reală strict negativă fără a calcula efectiv aceste rădăcini. În acest sens putem face apel la observația că un polinom cu coeficienți reali ale cărui rădăcini în  $\mathbb{C}$  au părțile reale strict negative trebuie să aibă coeficienți strict pozitivi fie la

**Criteriul Hurwitz. Rădăcinile polinomului**

$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 > 0$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , au partea reală strict negativă dacă și numai dacă  $a_i > 0$  și matricea

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix},$$

unde  $a_s = 0$  pentru  $s > n$ , are toți minorii principali strict pozitivi.

**Exemplu.** Presupunem  $a_0 = 1$ . În cazul  $n = 2$ , adică  $f(z) = z^2 + a_1 z + a_2$ , condițiile Hurwitz  $a_1 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$  sunt echivalente cu  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ . De aceea regiunea de stabilitate a soluției banale a sistemului diferențial (respectiv ecuației diferențiale), pentru care  $z^2 + a_1 z + a_2$  este polinom caracteristic, coincide cu primul cadran (deschis) din planul  $a_1 O a_2$ .

În cazul  $n = 3$ , adică  $f(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ , condițiile Hurwitz, sunt  $a_1 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$ ,  $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} > 0$ . Tinind seama

că  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ , acestea se reduc la  $a_3 < a_1 a_2$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ , adică regiunea de stabilitate este porțiunea din primul octant al reperului cartezian  $O a_1 a_2 a_3$  cuprinsă între planul  $a_3 = 0$  și saua  $a_3 = a_1 a_2$  (fig. 4.4).

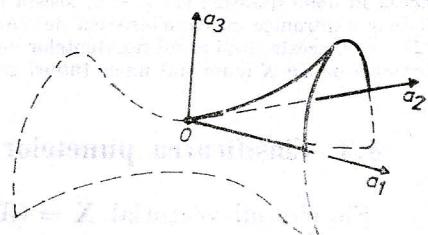


Fig. 4.4

**Aplicații 4.3.** Să se cerceteze stabilitatea punctelor de echilibru ale sistemelor diferențiale liniare

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dx}{dt} = -2x + y \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = -x + z \\ \frac{dy}{dt} = -2y - z \\ \frac{dz}{dt} = y - z \end{array} \right\}.$$

*Rezolvare.* 1) Matricea  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  are valorile proprii  $2 \pm i$ . Acestea au partea reală strict pozitivă. De aceea punctul de echilibru  $x = 0, y = 0$  nu este stabil.

2) Matricea  $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  are valorile proprii  $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$ , care sunt strict negative. De aceea punctul de echilibru  $(0,0)$  este asimptotic stabil.

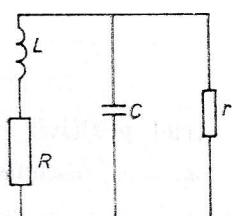
3) Matricea  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  are valorile proprii  $-1, -\frac{3 \pm 3i}{2}$ , care au părțile reale strict negative. Deci  $(0, 0, 0)$  este asimptotic stabil.

**4.4. Stabilitatea unui circuit electric cu rezistență negativă [10].** Să analizăm stabilitatea unui circuit format dintr-o rezistență  $R$  în serie cu o inductivitate  $L$ , avind în derivație o rezistență  $r$  și o capacitate  $C$  (fig. 4.5). Mărimile  $L, C, R, r$  se interpretează ca parametri reali, iar stările sistemului fizic sunt caracterizate prin sistemul diferențial liniar

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}i_L + \frac{1}{CL}q, \quad \frac{dq}{dt} = i_L - \frac{1}{Cr}q.$$

Matricea  $A = \begin{bmatrix} -R/L & 1/(CL) \\ -1 & -1/(Cr) \end{bmatrix}$  are ecuația caracteristică

$$\lambda^2 + \left( \frac{R}{L} + \frac{1}{Cr} \right) \lambda + \frac{1}{LC} \left( \frac{R}{r} + 1 \right) = 0.$$



Punctul  $(0, 0)$  este asimptotic stabil dacă și numai dacă

$$\frac{R}{L} + \frac{1}{Cr} > 0, \quad \frac{1}{DC} \left( \frac{R}{r} + 1 \right) > 0.$$

Presupunind  $L > 0, C > 0$ , condițiile de stabilitate asimptotică

se reduc la  $R + \frac{L}{Cr} > 0, 1 + \frac{R}{r} > 0$ . Acestea din urmă se examinează în două ipoteze: (1)  $R < 0$ , acesta fiind cazul rezistențelor negative datorite dispozitivelor electronice cu caracteristică de tipul  $S$  (cum sunt tuburile de descărcare în gaz); (2)  $r < 0$ , acesta fiind cazul rezistențelor negative datorite dispozitivelor electronice cu caracteristică de tip  $N$  (cum sunt unele tuburi grilă-ecran).

#### 4.3. Clasificarea punctelor de echilibru în plan

Fie cîmpul vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  de clasă  $C^1$  pe  $\mathbb{R}^2$  și sistemul

$$dx/dt = \mathbf{X}(x), \quad x = (x_1, x_2),$$

care dă liniile de cîmp. Presupunem că  $x = 0$  este un zero izolat al cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  și că soluția sistemului care verifică condițiile  $x(0) = 0$  este punctul de echilibru  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . (Aceasta înseamnă că nici o soluție  $x(t) \neq 0$  nu tinde la zero în timp finit.)

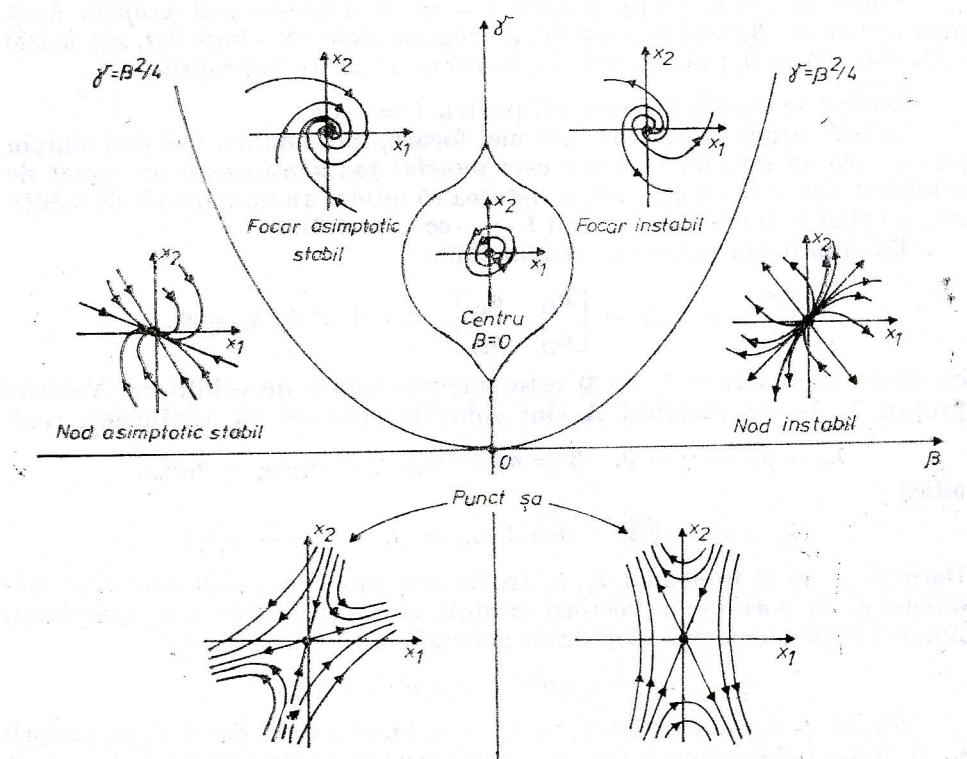


Fig. 4.6

Dacă orice vecinătate a lui  $x = 0$  conține orbite închise în jurul lui  $x = 0$ , atunci punctul de echilibru  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , se numește *punct de rotație*. Un punct de rotație  $x = 0$  cu proprietatea că toate orbitele dintr-o vecinătate a lui  $x = 0$ , diferite de  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , sunt închise se numește *centru* (fig. 4.6).

Punctul de echilibru  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , se numește *atractor* pentru  $t = \infty$  (sau  $t = -\infty$ ) dacă toate soluțiile  $x(t, x_0)$  ale problemelor  $\dot{x}' = \mathbf{X}(x)$ ,  $x(0) = x_0$  cu  $\|x\| < \varepsilon$  există și pentru  $t \in [0, \infty)$  (respectiv  $t \in (-\infty, 0]$ ) și  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0$  (respectiv  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, x_0) = 0$ ).

Fie linia de cîmp  $x(t, x_0) = (x_1(t, x_0), x_2(t, x_0))$  și  $\theta(t)$  o determinare continuă a unghiului polar  $\text{Arctg} \frac{x_2(t, x_0)}{x_1(t, x_0)}$ . Atractorul  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , pentru  $t = \infty$  se numește (fig. 4.6) :

1) *focar*, dacă fiecare linie de cîmp  $x(t, x_0) \neq 0$  este o spirală în jurul originii, adică o curbă cu proprietatea  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \pm \infty$ ;

2) nod, dacă pentru fiecare linie de cîmp  $x(t, x_0) \neq 0$  se satisfacă  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_0$  (finit); panta limită  $\tan \theta_0$  împreună cu punctul asimptotic  $x = 0$  al liniei de cîmp determină o dreaptă ce este limita tangenței la linia de cîmp.

Nodul  $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ , pentru  $t = \infty$  se numește *nod propriu* dacă pentru fiecare  $\theta_0 (\text{mod } 2\pi)$  există o singură linie de cîmp  $x(t, x_0)$  astfel încât  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_0$ ; în caz contrar nodul se numește *impropriu*.

Analog se clasifică atractorii pentru  $t = -\infty$ .

Există atractori care nu sunt nici focare, nici noduri. Cel mai simplu punct care nu este un atrator este *punctul să*; acesta este un punct de echilibru  $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ , cu proprietatea că numai un număr finit de soluții  $x(t, x_0)$  tind la 0 cînd  $t \rightarrow \infty$  sau  $t \rightarrow -\infty$  (fig. 4.6).

Exemplificăm printr-un sistem liniar

$$\frac{dx}{dt} = Ax, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \det A \neq 0, a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Se observă că  $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$  este singurul punct de echilibru. Valorile proprii  $\lambda_1, \lambda_2$  ale matricei  $A$  sunt soluțiile ecuației cu coeficienți reali

$$\lambda_2 - \beta\lambda + \gamma = 0, \quad \beta = a_{11} + a_{22}, \quad \gamma = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

adică

$$\lambda_1 = (\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma})/2, \quad \lambda_2 = (\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma})/2.$$

Dacă  $\beta^2 - 4\gamma \neq 0$ , atunci  $\lambda_1, \lambda_2$  (reale sau complex conjugate) sunt disdinețe și le corespund vectorii proprii respectiv (reali sau complecsi) liniar independenți  $u_1, u_2$ . Soluția generală a sistemului este

$$x(t) = c_1 u_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 u_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Fie  $\beta^2 - 4\gamma = 0$ , adică  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Dacă există doi vectori proprii  $u_1, u_2$  liniar independenți (fapt care are loc dacă și numai dacă  $a_{11} = a_{22} \neq 0, a_{12} = a_{21} = 0$ ), atunci soluția generală a sistemului se scrie

$$x(t) = (c_1 u_1 + c_2 u_2) e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dacă există un singur vector propriu  $u$  și un vector principal  $v$ , atunci soluția generală a sistemului se scrie

$$x(t) = [(c_1 + c_2 t)u + c_2 v] e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că sunt adevărate următoarele afirmații (fig. 4.6):

1)  $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ , este un centru dacă și numai dacă  $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$ ;

2)  $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ , este un atrator pentru  $t \rightarrow \infty$  (sau  $t \rightarrow -\infty$ ) dacă și numai dacă  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$  (sau  $> 0$ ),  $k = 1, 2$ ;

— atratorul  $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ , este un focar dacă și numai dacă  $\lambda_1, \lambda_2$  sunt complex conjugate dar nu reale sau pur imaginare;

— atratorul  $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ , este un nod propriu dacă  $\lambda_1 = \lambda_2$  și există doi vectori proprii;

— atratorul  $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ , este un nod impropriu dacă  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  sau  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  și  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  sau  $\lambda_1 = \lambda_2$  cu un singur vector propriu;

3)  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , este un punct să dacă  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ . Clasificarea din punctul de vedere al stabilității (în raport cu  $\lambda_1, \lambda_2$ ; v. 4.2) este evidentă. Traducerea ei în planul  $\beta O\gamma$  este deosebit de interesantă (fig. 4.6):

1) dacă  $\beta = 0$ ,  $\gamma > 0$ , atunci originea este un centru (punct neutru stabil);

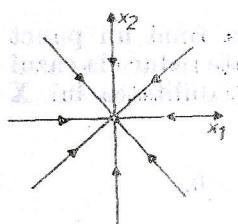


Fig. 4.7

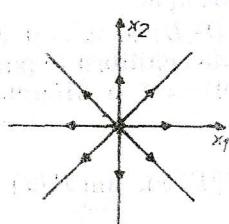


Fig. 4.8

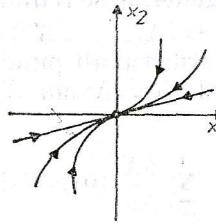


Fig. 4.9

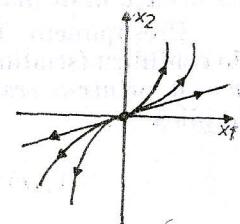


Fig. 4.10

2) dacă  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\gamma > \beta^2/4$ , atunci originea este un focar instabil;

3) dacă  $\beta < 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\gamma > \beta^2/4$ , atunci originea este un focar (stabil și) asimptotic stabil;

4) dacă  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\gamma < \beta^2/4$ , atunci originea este un nod instabil;

5) dacă  $\beta < 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\gamma < \beta^2/4$ , atunci originea este un nod (stabil și) asimptotic stabil;

6) dacă  $\gamma < 0$ ,  $\gamma \neq \beta^2/4$ , atunci originea este un punct să; orice punct să este instabil.

Dacă  $\beta^2 - 4\gamma = 0$  și există doi vectori proprii, atunci: (1) pentru  $\lambda = \beta/2 < 0$  originea este un nod propriu (stabil și) asimptotic stabil (fig. 4.7); (2) pentru  $\lambda = \beta/2 > 0$  originea este un nod propriu instabil (fig. 4.8).

Dacă  $\beta^2 - 4\gamma = 0$  și există un singur vector propriu, atunci: (1) pentru  $\lambda = \beta/2 < 0$  originea este un nod impropriu (stabil și) asimptotic stabil (fig. 4.9); (2) pentru  $\lambda = \beta/2 > 0$ , originea este un nod impropriu instabil (fig. 4.10).

**Aplicația 4.5.** Vibrațiile mecanice cu un grad de libertate [48] și comportările circuitelor electrice autonome [10] sunt descrise de ecuații diferențiale de tipul  $\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(x, \frac{dx}{dt})$ . No-

tind viteza  $\frac{dx}{dt}$  cu  $y$ , ajungem la sistemul  $\frac{dx}{dt} = y$ ,  $\frac{dy}{dt} = \varphi(x, y)$ . Punctele de echilibru ale acestui sistem satisfac,  $y = 0$ ,  $\varphi(x, 0) = 0$ , adică sunt puncte de pe axa  $Ox$  din planul  $xOy$ . Clasificarea acestor puncte de echilibru în maniera de mai sus dă informații topologice despre stările vibrațiilor și, respectiv, stările circuitelor.

#### 4.4. Stabilitate prin aproximarea liniară

Considerăm sistemul autonom

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Din punct de vedere fizic un asemenea sistem se interpretează ca fiind legea locală de evoluție a unui proces. Punctele în care se anulează  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  generează punctele de echilibru ale sistemului. Stabilitatea acestor puncte ne interesează în multe probleme concrete.

Cazul sistemelor liniare omogene cu coeficienți constanți a fost deja discutat în 4.2. Acest caz este important prin sine însuși, dar și prin faptul că situații mult mai generale se reduc tot la el.

Presupunem  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in C^2(D)$  și  $x = 0$  ca fiind un punct de echilibru (studiu oricărui alt punct de echilibru se poate reduce la cazul  $x = 0$  printr-o translație). Avem  $X_i(0) = 0$  și diferențialitatea lui  $\mathbf{X}$  implică

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(0)x_j + \|x\|F_i(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} F_i(x) = 0.$$

Presupunem că  $A = \left[ \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(0) \right]$  nu este matricea zero și utilizăm notațiile matriceale. Sistemului

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \|x\|F(x) \quad (3)$$

i se atașează sistemul liniar omogen cu coeficienți constanți  $\frac{dx}{dt} = Ax$ , numit *aproximarea liniară* a lui (3).

Teorema care urmează arată că perturbația  $\|x\|F(x)$  nu distrugă stabilitatea asimptotică a punctului de echilibru al aproximării liniare.

**Teoremă.** 1) Dacă toate valorile proprii ale matricei  $A$  au părțile reale strict negative, atunci punctul de echilibru  $x = 0$  al sistemului (3) este asimptotic stabil (și deci stabil).

2) Dacă matricea  $A$  are o valoare proprie cu partea reală strict pozitivă, atunci punctul de echilibru  $x = 0$  al sistemului (3) este instabil.

Pentru demonstrația teoremei utilizăm lema următoare.

**Lema Gronwall.** Fie  $a > 0$ . Dacă  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă care satisface  $f(t) \leq k + \int_0^t h(s)f(s)ds$ ,  $t \in [0, a]$  cu  $k \in \mathbb{R}$ ,  $h \in C^0[0, a]$ ,  $h(t) \geq 0$ , atunci  $f(t) \leq k \exp \left( \int_0^t h(s)ds \right)$ .

*Demonstrăție.* Considerăm funcția

$$\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \left( k + \int_0^t h(s)f(s)ds \right) \exp \left( - \int_0^t h(s)ds \right).$$

Deoarece

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left( f(t) - k - \int_0^t h(s)f(s)ds \right) h(t)\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right) \leq 0,$$

funcția  $\varphi$  este descerescătoare. Deci  $\varphi(t) \leq \varphi(0) = k$ , adică  $k + \int_0^t h(s)f(s)ds \leq k \exp\int_0^t h(s)ds$ , ceea ce implica relația din lema.

*Demonstrarea teoremei.* Deoarece  $\mathbf{X}$  este de clasă  $C^2$ , soluția  $x(t, x_0)$  a sistemului (3) este de clasă  $C^1$  în raport cu  $x_0 = x(t_0, x_0)$ .

1) Pentru simplificarea expunerii presupunem  $t_0 = 0$  și în loc de  $x(t, x_0)$  scriem  $x(t)$ . Soluția sistemului (3) verifică ecuația integrală

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} \|x(s)\| F(x(s)) ds.$$

Deoarece toate valorile proprii în  $\mathbb{C}$  ale matricei  $A$  au partea reală strict negativă, în baza lemei din 4.2, vor exista  $K > 0$ ,  $\alpha > 0$ , astfel încât

$$\|e^{tA}x_0\| \leq K \|x_0\| e^{-\alpha t}, \quad \|e^{(t-s)A}\| \leq K e^{-\alpha(t-s)}.$$

Pe de altă parte, faptul  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \mathbf{0}$  este echivalent cu  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , astfel încât  $\|x\| < \delta$  să implice  $\|F(x)\| < \varepsilon$ . Aceste observații implică

$$\|x(t)\| \leq K e^{-\alpha t} \|x_0\| + K \varepsilon \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|x(s)\| ds.$$

Fixăm  $\varepsilon = \alpha/(2k)$ , înmulțim cu  $e^{\alpha t}$  și notăm  $f(t) = e^{\alpha t} \|x(t)\|$ ,  $k = K \|x_0\|$ ,  $h(t) = K \varepsilon$ . Atunci sistem în condițiile lemei Gronwall și deci  $e^{\alpha t} \|x(t)\| \leq K \|x_0\| e^{\frac{\alpha t}{2}}$ . Pentru  $\|x_0\|$  suficient de mic, rezultă  $\|x(t)\| \leq K \|x_0\| e^{-\frac{\alpha t}{2}}$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ , relație care implica stabilitatea și stabilitatea asimptotică.

2) Omitem demonstrația [1], [5], [25] fiind prea complicată.

**O b s e r v a t i o n i .** 1) Fie  $x = \mathbf{0}$  un punct de echilibru al sistemului diferențial (1). Dacă  $\det \left[ \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(0) \right] \neq 0$ , atunci  $x = \mathbf{0}$  este un punct de echilibru izolat. Reciproca nu este adevărată decât dacă cimpul vectorial  $\mathbf{X}$  este liniar.

2) Determinarea punctelor de echilibru se reduce la aflarea soluțiilor unui sistem algebric de forma

$$X_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, X_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (4)$$

sau mai scurt  $\mathbf{X}(x) = \mathbf{0}$ , unde  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  este un cimp vectorial de clasă  $C^1$ . Construim

energia  $f(x) = \frac{1}{2} \|X(x)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2(x)$  (v. și cap. 9). Evident  $X(x) = 0$ , dacă și numai dacă  $f(x) = 0$  iar  $\min_x f(x) = 0$ . De asemenea observăm că punctele critice ale energiei  $f$  sunt date de sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = X_1(x) \frac{\partial X_1}{\partial x_1}(x) + \dots + X_n(x) \frac{\partial X_n}{\partial x_1}(x) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = X_1(x) \frac{\partial X_1}{\partial x_n}(x) + \dots + X_n(x) \frac{\partial X_n}{\partial x_n}(x) = 0.$$

Presupunem că  $\det \left[ \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) \right] \neq 0$ , în afara unui număr finit de puncte  $x$  pe care le eliminăm din raționamente. Cu alte cuvinte, presupunem că funcțiile  $X_i$  sunt funcțional independente. Această ipoteză implică faptul că soluțiile sistemului (4) sunt izolate (dacă există!), iar mulțimea acestor soluții coincide cu mulțimea punctelor de minim ale funcției  $f$ . De aceea aflarea soluțiilor (izolate) ale sistemului (4) se reduce la găsirea punctelor de minim ale energiei  $f$ . O metodă potrivită pentru acest lucru este metoda gradientului.

**Exemplu.** Să se determine zerourile cimpului vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ ,  $X_1(x, y) = x^3 + y^3 - 2$ ,  $X_2(x, y) = x - y$ , utilizând metoda gradientului.

*Rezolvare.* Se observă direct că  $\mathbf{X}(1, 1) = (0, 0)$ .

$$D(X_1, X_2)$$

Deoarece  $\frac{D(X_1, X_2)}{D(x, y)} = -3(x^2 + y^2) = 0$  dacă și numai dacă  $x = y = 0$ , originea se exclude din raționamente.

Construim funcția  $2f(x, y) = (x - y)^2 + (x^3 + y^3 - 2)^2$  și grad  $f(x, y) = [(x - y) + 3x^2(x^3 + y^3 - 2)]\mathbf{i} + [-(x - y) + 3y^2(x^3 + y^3 - 2)]\mathbf{j}$ .

Alegem punctul inițial  $x_1 = 1/2, y_1 = 1/2$ . Deoarece  $\text{grad } f(1/2, 1/2) = -\frac{21}{16}\mathbf{i} - \frac{21}{16}\mathbf{j} \neq 0$  putem pune

$$x_2 = x_1 - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) = \frac{1}{2} + \frac{21}{16} \alpha_1,$$

$$y_2 = y_1 - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) = \frac{1}{2} + \frac{21}{16} \alpha_1.$$

Formăm funcția  $\varphi(\alpha_1) = f(x_2, y_2) = 2 \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{21}{16} \alpha_1 \right)^3 - 1 \right]^2$ . Se observă că  $\alpha_1 = 8/21$  este un punct de minim pentru  $\varphi$ . Rezultă  $x_2 = 1, y_2 = 1$ . Deoarece  $\text{grad } f(1, 1) = 0$ , punctul găsit este un punct critic al lui  $f$ . Mai mult, acesta este un punct de minim al lui  $f$  și deci o soluție a sistemului  $x^3 + y^3 - 2 = 0, x - y = 0$ .

**Aplicații. 4.6.** Unele procese biochimice cu feedback negativ pot fi modelate prin sistemul Goodwin [47]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+z^n} - ax, \quad \frac{dy}{dt} = x - by, \quad \frac{dz}{dt} = y - cz,$$

unde  $a, b, c$  sunt parametri reali strict pozitivi,  $n$  este un număr natural fixat, iar  $x, y, z$  sunt funcții concentrare.

Mai întâi să arătăm că soluțiile semnificative din punct de vedere biologic au imaginile într-o regiune închisă și măginită a spațiului pozitiv de concentrare  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ . În particular, vom pune în evidență o mulțime invariantă față de curentul atașat sistemului (v. 3.8).

Deoarece  $x, y, z$  sunt funcții concentrare, se potrivesc condițiile initiale  $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0, z(0) \geq 0$ . Aceste condiții initiale împreună cu faptul că derivatele  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  sunt pozitive

pentru  $x = y = z = 0$  arată că  $x(t) \geq 0, y(t) \geq 0, z(t) \geq 0, \forall t > 0$ . Inegalitatea  $z \geq 0$  implică  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+z^n} - ax \leq 1 - ax$ , iar de aici citim că: (1) dacă  $x(0) \leq 1/a$ , atunci  $x(t) \leq 1/a$ ,  $\forall t > 0$ ; (2) dacă  $x(0) > 1/a$ , atunci derivata  $dx/dt$  este negativă atât timp cât  $x(t) > 1/a$  și deci  $x(t)$  va descrește devenind după un timp cel mult  $1/a$ . În concluzie,  $0 \leq x(t) \leq \max\{x(0), 1/a\}$ ,  $\forall t > 0$ . Faptul că după un timp suficient de mare avem  $x(t) < 1/a$ , determină inegalitatea  $\frac{dy}{dt} = x - by \leq \frac{1}{a} - by$  și argumente similare cu cele precedente arată că  $0 \leq y(t) \leq \max\{y(0), 1/(ab)\}$ ,  $\forall t > 0$ . Analog  $0 \leq z(t) \leq \max\{z(0), 1/(abc)\}$ ,  $\forall t > 0$ .

Implicit am arătat că paralelipipedul

$$\bar{D} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1/a, 0 \leq y \leq 1/(ab), 0 \leq z \leq 1/(abc)\} \subset \mathbb{R}_+^3$$

are proprietatea că orbitele determinate de puncte inițiale din  $\bar{D}$  sunt incluse în  $\bar{D}$  (multime invariantă). Acest lucru este confirmat și de observația că divergența cîmpului vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ ,  $X_1(x, y, z) = \frac{1}{1+z^n} - ax$ ,  $X_2(x, y, z) = x - by$ ,  $X_3(x, y, z) = y - cz$  este strict negativă,  $\text{div } \mathbf{X} = -a - b - c$ , și deci currentul generat de  $\mathbf{X}$  măsoarează volumele.

Să arătăm acum că sistemul precedent admite un singur punct de echilibru și că acesta aparține paralelipipedului  $\bar{D}$ . Pentru aceasta considerăm sistemul algebric

$$\frac{1}{1+z^n} - ax = 0, \quad x - by = 0, \quad y - cz = 0, \quad x, y, z \geq 0,$$

ale cărui soluții generează punctele de echilibru.

Eliminând pe  $x$  și  $y$ , obținem ecuația  $\frac{1}{1+z^n} = abc z$ , care are o singură rădăcină strict pozitivă  $z_0$  (fig. 4.11). Astfel există un singur punct de echilibru  $(x_0 = bz_0, y_0 = cz_0, z_0)$ . Deoarece

$\psi(z) = 1 - abc z (1 + z^n)$  satisfacă  $\psi(0) = 1 > 0$ ,

$$\psi\left(\frac{1}{abc}\right) < 0, \text{ rezultă } 0 < z_0 < \frac{1}{abc} \text{ și } 0 < y_0 < \frac{1}{ab}, 0 < x_0 < \frac{1}{a}.$$

Cercetăm stabilitatea punctului de echilibru  $(x_0, y_0, z_0)$  utilizând aproximarea liniară. Din  $X_1(x, y, z) = \frac{1}{1+z^n} - ax$ ,  $X_2(x, y, z) = x - by$ ,  $X_3(x, y, z) = y - cz$  determinăm matricea

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial X_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), & \frac{\partial X_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), & \frac{\partial X_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \hline -a & 0 & -nz_0^{n-1}/(1+z_0^n) \\ 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & -c \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} -a & 0 & -nz_0^{n-1}/(1+z_0^n) \\ 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & -c \end{array} \right].$$

Ecuația caracteristică a matricei  $A$  este

$$(\lambda + a)(\lambda + b)(\lambda + c) + \frac{nz_0^{n-1}}{1+z_0^n} = 0.$$

Aceasta are sigur o rădăcină reală (ca ecuație de gradul trei)  $\lambda_1$  și în mod necesar  $\lambda_1 < 0$  (deoarece toți coeficienții sunt strict pozitivi). Deoarece ecuația precedentă se transcrie

$$\lambda^3 + (a+b+c)\lambda^2 + (ab+ac+bc)\lambda + abc + \frac{nz_0^{n-1}}{1+z_0^n} = 0,$$

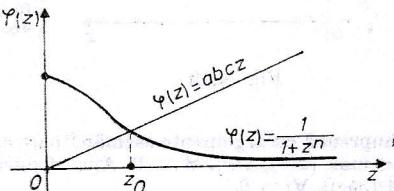


Fig. 4.11

criteriul Hurwitz arată că ea are toate rădăcinile cu partea reală strict negativă dacă și numărădacă

$$(a + b + c)(ab + ac + bc) - abc = \frac{n z_0^{n-1}}{1+z_0^n} > 0.$$

În această ipoteză punctul de echilibru  $(x_0, y_0, z_0)$  este asimptotic stabil (și deci stabil).

**4.7.** Prin analogie cu aplicația precedentă există procese biochimice cu feedback pozitiv care sunt descrise matematic prin sistemul diferențial [47]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+z^n}{k+z^n} - ax, \quad \frac{dy}{dt} = x - by, \quad \frac{dz}{dt} = y - cz;$$

unde  $a, b, c$  sunt parametri reali strict pozitivi,  $k$  este un parametru real supraunitar,  $n$  este un număr natural fixat, iar  $x, y, z$  sunt funcții concentrare.

Funcția  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(z) = (1+z^n)/(k+z^n)$  admite derivata  $\varphi'(z) = \frac{n z^{n-1}(k-1)}{(k+z^n)^2} > 0$  și deci este strict crescătoare. Deoarece  $\varphi(0) = 1/k$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = 1$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi'(z) = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi'(z) = 0$ , graficul funcției  $\varphi$  are alura din fig. 4.12.

Inegalitatea

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+z^n}{k+z^n} - ax \leq 1 - ax, \quad z \geq 0, \quad x \geq 0,$$

împreună cu argumente asemănătoare cu cele folosite în aplicația precedentă conduce la  $0 \leq x(t) \leq \max\{x(0), 1/a\}$ ,  $\forall t > 0$ . Apoi deducem  $0 \leq y(t) \leq \max\{y(0), 1/(ab)\}$ ,  $0 \leq z(t) \leq \max\{z(0), 1/(abc)\}$ ,  $\forall t > 0$ .

Reținem de aici faptul că paralelipipedul

$$\bar{D} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1/a, 0 \leq y \leq 1/(ab), 0 \leq z \leq 1/(abc)\}$$

este o mulțime invariantă în sensul că orbitele determinate de puncte initiale din  $\bar{D}$  sunt incluse în  $\bar{D}$ . Confirmăm această observație și prin aceea că divergența cimpului vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ ,

$$X_1(x, y, z) = \frac{1+z^n}{k+z^n} - ax, \quad X_2(x, y, z) = x - by, \quad X_3(x, y, z) = y - cz$$

este strict negativă,  $\text{div } \mathbf{X} = -a - b - c$ ; deci curentul generat de  $\mathbf{X}$  măsoarează volumele.

Sistemul diferențial considerat posedă cel puțin un punct de echilibru în  $\bar{D}$ . Într-adevăr, din

$$\frac{1+z^n}{k+z^n} - ax = 0, \quad x - by = 0, \quad y - cz = 0$$

deducem ecuația

$$\frac{1+z^n}{k+z^n} = abc$$

care are cel puțin o soluție pozitivă  $z_0$ . Rezultă punctul de echilibru  $(x_0 = bcz_0, y = cz_0, z_0)$  care se dovedește a fi din  $\bar{D}$ . Matricea corespunzătoare aproximării liniare este

$$A = \begin{bmatrix} -a & 0 & \varphi'(z_0) \\ 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & -c \end{bmatrix}$$

și are ecuația caracteristică

$$\lambda^3 + (a + b + c)\lambda^2 + (ab + ac + bc)\lambda + abc - \varphi'(z_0) = 0.$$

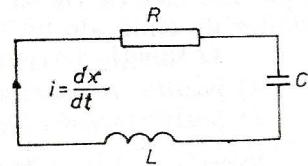
Criteriul Hurwitz arată că această ecuație are toate rădăcinile cu partea reală strict negativă dacă și numai dacă

$$(a + b + c)(ab + ac + bc) - abc + \varphi'(z_0) > 0, abc - \varphi'(z_0) > 0.$$

În aceste condiții punctul de echilibru  $(x_0, y_0, z_0)$  este asimptotic stabil (și deci stabil).

**4.8. Stabilitatea unui circuit electric** [10] (fig. 4.13). Notăm cu  $x$  sarcina electrică a condensatorului, cu  $dx/dt$  curentul în circuit și cu  $f(x, dx/dt)$ ,  $f(0,0) = 0$ , termenul nelinier de grad superior lui 2. Atunci

$$L \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + \frac{1}{C} x + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0,$$



unde  $L$ ,  $R$ ,  $C$  sunt parametri reali strict pozitivi. Această ecuație diferențială de ordinul doi este echivalentă cu sistemul diferențial nelinier

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{LC} x - \frac{R}{L} y - \frac{1}{L} g(x, y),$$

pentru care  $(0, 0)$  este un punct de echilibru. Matricea aproximării liniare

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{LC} x - \frac{R}{L} y$$

are ecuația caracteristică  $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$ . Dacă  $R^2 \neq \frac{4L}{C}$ , atunci punctul de echilibru

$(0, 0)$  este asimptotic stabil. Această concluzie degurge și din considerente fizice: dacă rezistența ohmică este pozitivă, atunci curentul sfîrșește inevitabil prin disparația în timp.

#### 4.5. Stabilitate prin funcții Leapunov

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$  astfel încît  $x = 0$  să fie un zero al lui  $\mathbf{X}$ . În notații vectoriale, sistemul care dă liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  se scrie

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x). \quad (5)$$

A doua metodă Leapunov de cercetare a stabilității punctului de echilibru  $x(t) = 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , se bazează pe utilizarea funcțiilor Leapunov.

Pentru a explica tehnica propusă de Leapunov notăm cu  $x(t, x_0)$  soluția sistemului (5) determinată de condițiile initiale  $(t_0, x_0)$ , în ipoteza că  $x_0$  aparține unei vecinătăți  $V$  a originii. Un cîmp scalar  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow f(x)$ , care este de clasă  $C^0$  și satisfacă  $f(0) = 0$ , se numește *funcție Leapunov* pe  $V$  asociată cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$ . Dacă  $f$  este o funcție Leapunov de clasă  $C^1$  pe  $V$ , atunci derivata lui  $f$  în raport cu cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$ , adică  $D_{\mathbf{X}}f(x) = (\mathbf{X}(x), \text{grad } f(x))$ , este o funcție Leapunov pe  $V$ . Se

observă că pentru orice soluție  $x(t)$ ,  $t \in I$ , a lui (5) avem

$$\begin{aligned} D_x f(x(t)) &= (\mathbf{X}(x(t)), \text{grad } f(x(t))) = \sum_{i=1}^n X_i(x(t)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \frac{dx_i}{dt}(t) = \frac{d}{dt} f(x(t)), \end{aligned}$$

fapt care face ca  $D_x$  să fie privit ca un operator de derivare de-a lungul liniilor de cimp ale lui (1).

O funcție Leapunov  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  se numește :

- 1) pozitiv (negativ) definită, dacă  $f(x) > 0$  ( $< 0$ ),  $\forall x \in V \setminus \{0\}$ ;
- 2) pozitiv (negativ) semidefinită, dacă  $f(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ),  $\forall x \in V$ .

**Exemplu.** În ipoteza  $\mathbf{X}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , energia cimpului vectorial  $\mathbf{X}$ , adică funcția  $f = \|\mathbf{X}\|^2/2$  este o funcție Leapunov pozitiv definită.

Fie  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție Leapunov pozitiv (negativ) definită. Deoarece  $f$  este continuă și  $f(0) = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ , rezultă că  $x \rightarrow 0$ , și  $f(x) \rightarrow 0$  sunt echivalente. De asemenea, se poate dovedi că mulțimile de nivel constant  $M_c : f(x) = c$ , pentru  $c$  suficient de mic, sunt închise în sensul că sunt deformări continue ale sferei (se întorc de unde au plecat) și conțin originea în interior. În particular,  $M_0 = \{0\}$ .

**Teoremă.** Dacă există o funcție Leapunov pozitiv definită  $f$  de clasă  $C^1$  pe  $V$  și funcția  $D_x f$  este negativ semidefinită pe  $V$ , atunci punctul de echilibru  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , al sistemului (5) este stabil.

**Demonstrație.** Fie  $\varepsilon > 0$  așa de mic încât sfera  $\|x\| = \varepsilon$  să fie inclusă în  $V$ . Definim  $m = \min_{\|x\|=\varepsilon} f(x)$ . Deoarece  $f$  este pozitiv definită rezultă că  $m > 0$ . De asemenea există  $\delta < \varepsilon$  astfel încât  $\|x\| < \delta$  să implice  $f(x) < m$ .

Considerăm o soluție  $x(t, x_0)$  a sistemului (5) cu  $\|x_0\| < \delta$ . Vom arăta că  $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$  pentru  $t \geq t_0$ , în ipoteza că soluția  $x(t, x_0)$  se prelungeste în viitor nemărginit. Dacă nu este așa, atunci există  $T > 0$  astfel încât  $\|x(T, x_0)\| = \varepsilon$ , dar  $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$  pentru  $t \in [t_0, T)$ . Pe de altă parte, relația  $\frac{d}{dt} f(x(t, x_0)) = D_x f(x(t, x_0)) \leq 0$  arată că  $f(x(t, x_0))$  este o funcție descrescătoare de  $t$  pentru  $t \in [t_0, T)$ . Deoarece  $f(x_0) < m$  prin definiția lui  $\delta$ , rezultă că  $f(x(T, x_0)) \leq f(x_0) < m$ , iar aceasta contrazice definițiile lui  $T$  și  $m$ . Astfel, sub rezerva că soluția  $x(t, x_0)$  se prelungeste, am demonstrat că  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  astfel încât  $\|x_0\| < \delta$  implica  $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$ ,  $\forall t \geq t_0$ , adică originea este un punct de echilibru stabil (fig. 4.1).

Să arătăm că soluția  $x(t, x_0)$  se prelungeste în viitor nemărginit. Pentru aceasta considerăm cilindrul (mulțime compactă!)  $A = \{(x, t) | 0 \leq f(x) \leq m, t \in [t_0, T]\}$  în  $\mathbb{R}^{n+1}$  și  $x(t, x_0)$  o soluție pentru care  $f(x_0) \leq m$ . Conform teoremei de prelungire (v. 3.1) soluția  $x(t, x_0)$  poate fi prelungită în viitor pînă la frontiera  $\partial A$ . Dar apartenența  $(t, x(t, x_0)) \in A$  implică  $D_x f(x(t, x_0)) \leq 0$ . Din acest motiv soluția nu poate ajunge la suprafața laterală a cilindrului  $A$ ,

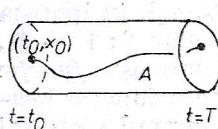


Fig. 4.14

unde  $f(x) = m$ , și deci se prelungește pînă la capacul  $t = T$  (fig. 4.14). Deoarece  $T$  este arbitrar (și nu depinde de  $m$ ), soluția  $x(t, x_0)$  se prelungește în viitor nemărginit și  $f(x(t, x_0)) < m, \forall t \in [t_0, \infty)$ .

**O b s e r v a t i i.** 1) Teorema precedentă poate fi formulată și în felul următor: dacă există o funcție Leapunov negativ definită  $f$  de clasă  $C^1$  pe  $V$  și funcția Leapunov  $D_X f$  este pozitiv semidefinită, atunci originea este un punct de echilibru stabil pentru sistemul (5). Totul revine la schimbarea lui  $f$  în  $-f$ .

2) Nu există metode generale pentru găsirea funcțiilor Leapunov astfel încât  $f$  și  $D_X f$  să satisfacă condițiile impuse în teoremă. Dar este natural ca începutul căutării să fie sau energia lui  $\mathbf{X}$  sau integralele prime ale sistemului (5). Într-adevăr, dacă  $f$  este o integrală primă a lui (5) într-o vecinătate a originii, atunci, fără a micsora generalitatea, putem presupune  $f(0) = 0$  și deci  $f$  este o funcție Leapunov. Prin definiția integralelor prime, funcția Leapunov  $D_X f$  se anulează identic și deci este semidefinită (pozitiv sau negativ, după cum convine problemei). Astfel, dacă  $f$  este definită (pozitiv sau negativ), atunci soluția  $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , este stabilă.

Sistemele hamiltoniene

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

constituie exemple la care observația noastră funcționează perfect. Într-adevăr, în acest caz  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  este o integrală primă globală.

3) Teorema precedentă conține faptul geometric că o linie de cimp care începe în interiorul hipersuprafeței închise  $M_c : f(x) = c$  nu mai poate ieși de acolo (fig. 4.15):  $D_X f(x(t)) =$

$$= \left( \nabla f(x(t)), \frac{dx}{dt} \right) \leqslant 0 \text{ dacă și numai dacă } \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

**Teoremă.** Presupunem că există o funcție Leapunov pozitiv definită  $f$  de clasă  $C^1$  pe  $V$  astfel încât funcția Leapunov  $D_X f$  să fie negativ semidefinită pe  $V$ . Dacă  $M_0 = \{x | x \in V, D_X f(x) = 0\}$  nu conține în întregime nici o orbită a sistemului (5) diferită de punctul de echilibru  $x = 0$ , atunci punctul de echilibru este asymptotic stabil (fig. 4.1.).

**Demonstrație.** Teorema precedentă arată că punctul de echilibru  $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ , este stabil, adică există  $\delta > 0$ , astfel încât  $\|x_0\| < \delta$  să implice existența soluției  $t \mapsto x(t, x_0), t \in [t_0, \infty)$  și  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0, \forall t \in [t_0, \infty)$ . De aceea este suficient să demonstrăm că există  $\delta_1 \in (0, \delta)$  astfel încât  $\|x_0\| < \delta_1$  să implice  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0$ .

Prin ipoteza  $D_X f(x) \leqslant 0, \forall x \in V$ , funcția  $t \mapsto f(x(t, x_0))$  este descrescătoare. Pe de altă parte, pozitivitatea lui  $f$  arată că dacă am avea  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) \neq 0$ , atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t, x_0)) = l > 0$ , iar aceasta înseamnă că  $0 < \lambda < \|x(t, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geqslant t_0$ .

Presupunem  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t, x_0)) = l > 0$ . Fie  $x_*$  un punct limită al liniei de cimp  $t \mapsto x(t, x_0)$ . Evident,  $x_* \neq 0$ . Deoarece  $f(x_*) = l > 0$  și orbita  $x(t, x_*)$  nu este inclusă în  $M_0$ , rezultă că există  $T$  astfel încât  $f(x(T, x_*)) < l$ . Continuitatea funcției  $x_0 \mapsto x(t, x_0)$  și faptul că sistemul (1) este autonom implică existența unui  $t_*$  pentru care  $f(x(t_*, x_0)) < l$ ,

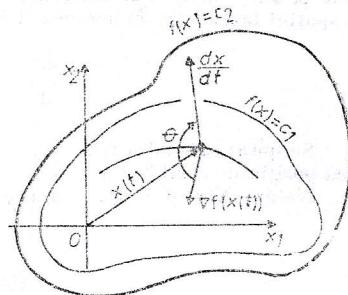


Fig. 4.15

iar proprietatea de descreștere a lui  $t \rightarrow f(x(t, x_0))$  implica  $f(x(t, x_0)) < l$ ,  $\forall t \geq t_*$ , fapt ce contrazice  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t, x_0)) = l > 0$ . Rămâne că  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t, x_0)) = 0$  și deci  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0$ .

**Aplicația 4.9.** Fie ecuația diferențială liniară de ordinul doi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi(x) \frac{dx}{dt} + \psi(x) = 0, \quad (6)$$

unde  $\varphi, \psi : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$  sint funcții de clasă  $C^1$  și  $\psi(0) = 0$ ,  $\varphi(x) > 0$ ,  $x \psi(x) > 0$ ,  $\forall x \neq 0$ . În spațiul fazelor  $(x, \dot{x})$  acesteia îi corespunde sistemul

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\varphi(x)y - \psi(x). \quad (7)$$

Se spune că soluția  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , a ecuației (6) este *stabilă, asymptotic stabilă sau instabilă* dacă poziția de echilibru  $x = 0$ ,  $y = 0$  a sistemului (7) are o asemenea calitate.

Notăm  $\mathbf{X}(x, y) = (y, -\varphi(x)y - \psi(x))$ . Funcția Leapunov definită prin

$$f(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \int_0^x \psi(x) dx$$

este pozitiv definită, iar funcția Leapunov  $D_{\mathbf{X}} f = -\varphi(x)y^2$  este negativ definită pe o vecinătate a originii :  $M_0$  este intervalul  $(-a, a)$ , iar ecuația  $\dot{x} = y$  arată că orbitele netriviale tăie acest interval. Conform teoremei, punctul de echilibru  $x = 0$ ,  $y = 0$  al sistemului (7) este asimptotic stabil și deci soluția  $x = 0$  a ecuației (6) este asimptotic stabilă.

Să ne ocupăm acum de instabilitate. Dacă  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție Leapunov de clasă  $C^1$ , notăm prin  $V^+$  orice mulțime deschisă și conexă, inclusă în mulțimea deschisă

$$\{x \mid f(x) > 0, \|x\| < \delta\},$$

a cărei frontieră  $\partial V^+$  conține originea.

**Teoremă.** Dacă există o mulțime nevidă  $V^+$  pe care  $D_{\mathbf{X}} f > 0$ , atunci punctul de echilibru  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , al sistemului (5) este instabil (fig. 4.1).

**Demonstrație.** Fie  $0 < \delta_1 < \delta$  și soluția  $x(t, x_0)$  cu punctul inițial  $x_0 \in V^+$ ,  $\|x_0\| < \delta_1$ . Deoarece  $0 \in \partial V^+$ , este suficient să arătăm că pentru orice astfel de soluție există un moment  $T$  astfel încât  $\|x(T, x_0)\| = \delta_1$ .

Presupunem contrariul :  $\exists x(t, x_*), x_* \in V^+$ ,  $\|x_*\| < \delta_1$  astfel încât  $\|x(t, x_*)\| < \delta_1$ ,  $\forall t \geq t_0$ . Deoarece  $D_{\mathbf{X}} f > 0$  pe  $V^+$ , funcția  $t \rightarrow f(x(t, x_*))$  este strict crescătoare și  $x(t, x_*) \in V^+$ . De aceea,  $f(x(t, x_*)) > f(x_*) > 0$ ,  $\forall t > t_0$ . Aceasta, împreună cu faptul că  $f(x)$ ,  $\|x\| < \delta_1$ , se anulează numai în  $0 \in \partial V^+$ , implică  $D_{\mathbf{X}} f(x(t, x_*)) \geq l > 0$ ,  $\forall t > t_0$ . Integrind această inegalitate pe  $[t_0, t]$ , obținem

$$f(x(t, x_*)) \geq f(x_*) + l(t - t_0)$$

și deci  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t, x_*)) = \infty$ . Acest rezultat contrazice mărginirea funcției  $x \rightarrow f(x)$ ,  $\|x\| < \delta_1$ .

**Aplicația 4.10.** Considerăm un sistem conservativ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \text{grad } F(x) = 0, \quad (8)$$

unde  $x \in \mathbb{R}^n$ , iar  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este un cimp scalar analitic într-o vecinătate a originii. Fără a seădea generalitatea punem presupune  $F(0) = 0$ . Acestui sistem de ordinul doi î se atașează, în spațiul fazelor  $(x, dx/dt) \in \mathbb{R}^{2n}$ , un sistem hamiltonian

$$\frac{dx_k}{dt} = -y_k, \quad \frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (9)$$

cu hamiltonianul

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2 + F(x).$$

Notăm  $\mathbf{X}(x, y) = (-y_k, \partial F / \partial x_k)$  și observăm că  $H(0, 0) = 0$ , adică  $H$  este o funcție Leapunov, iar  $D_{\mathbf{X}} H = 0$ , adică  $H$  este o integrală primă a sistemului (9).

Presupunem că  $x = 0$  este un punct de minim al lui  $F$ . Atunci  $x = 0, y = 0$  este un punct de minim al lui  $H$  și deci  $H(x, y) > 0$  pentru  $(x, y) \neq (0, 0)$  dintr-o vecinătate a lui  $(0, 0)$ . Prima teoremă arată că punctul de echilibru  $(0, 0)$  al sistemului (9) este stabil și deci punctul de echilibru  $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ , al sistemului (8) este stabil. Acest rezultat este cunoscut în mecanica analitică ca *teorema Lagrange*.

Să presupunem că  $x = 0$  este un punct de maxim pentru  $F$ . Rezultă  $\text{grad } F(x) = 0$  și reprezentând pe  $F$  în forma

$$F(x) = \sum_{j=m}^{\infty} F^{(j)}(x), \quad m \geq 2,$$

unde  $F^{(j)}$  este o formă omogenă de ordinul  $j$ , în mod necesar  $F^{(m)}$  trebuie să fie negativ definită.

Pe de altă parte, să observăm că funcția Leapunov, definită prin  $g(x, y) = - \sum_{k=1}^n x_k y_k$ , satisface

$$D_{\mathbf{X}} g = - \sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial g}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^n y_k^2 - \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^n y_k^2 - m F^{(m)} + \dots,$$

unde termenii nescrisi sunt polinoame omogene în  $(x_1, \dots, x_n)$  de grad mai mare decit  $m$ . Astfel  $D_{\mathbf{X}} g$  este pozitiv definită pe o vecinătate a originii. În particular, ea este pozitiv definită și pe componenta conexă  $V^+$  care conține punctul  $(a, \dots, a)$ ,  $a > 0$ , a mulțimii de puncte pe care  $g$  este strict pozitivă. Conform ultimei teoreme, punctul de echilibru  $(0, 0)$  al sistemului (9) este instabil și deci punctul de maxim  $x = 0$  al lui  $F$  generează un punct de echilibru instabil al sistemului (8).

## 4.6. Probleme propuse

1. Să se cerceteze stabilitatea punctelor de echilibru ale sistemelor :

$$1) \frac{dx}{dt} = -x + \alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = \beta x - y + \alpha z, \quad \frac{dz}{dt} = \beta y - z,$$

$$2) \frac{dx}{dt} = -x + \alpha y + \beta z, \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha x - y + \alpha z, \quad \frac{dz}{dt} = -\beta x - \alpha y - z,$$

unde  $\alpha$  și  $\beta$  sunt parametri reali.

**2.** Să se clasifice punctele de echilibru ale următoarelor sisteme :

$$1) \frac{dx}{dt} = -ax + (a-1)y, \frac{dy}{dt} = x;$$

$$2) \frac{dx}{dt} = -x + ay, \frac{dy}{dt} = bx - y;$$

$$3) \frac{dx}{dt} = -a^2x + ay, \frac{dy}{dt} = x - y;$$

$$4) \frac{dx}{dt} = y + ax(x^2 + y^2), \frac{dy}{dt} = -x + ay(x^2 + y^2),$$

unde  $a$  și  $b$  sunt parametri reali.

**3.** Utilizând aproximarea liniară, să se testeze stabilitatea punctelor de echilibru ale următoarelor sisteme diferențiale :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \ln(e + ax) - e^y \\ \frac{dy}{dt} = bx + \operatorname{tgy} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay} \\ \frac{dy}{dt} = \ln(1 + 9x + ay) \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y \end{array} \right\}.$$

**4.** Să se cerceteze stabilitatea punctelor de echilibru ale sistemelor diferențiale următoare, fixind drept funcții Leapunov polinoame omogene convenabile :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y^3 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -y - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{y^3}{4} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2y^3 - x^5 \\ \frac{dy}{dt} = -x - y^3 + y^5 \end{array} \right\}.$$

**Indicație.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , instabil;  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , asymptotic stabil; stabil.

**5.** Să se cerceteze stabilitatea punctului de echilibru  $(0, 0)$  al sistemului diferențial

$$\frac{dx}{dt} = y - ax(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x - ay(x^2 + y^2).$$

**Indicație**  $f(x, y) = x^2 + y^2$  este o funcție Leapunov.

**6.** Aceeași problemă pentru sistemele

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = xe^{-x^2} - ye^{-y^2}x^2e^{-2x^2} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x^2 - y^2 \\ \frac{dy}{dt} = -2xy \end{array} \right\}.$$

Indicație.  $f(x, y) = -x^3 + 3xy^2$  poate fi folosită ca funcție Leapunov.

7. Se consideră sistemul

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

1) Să se construiască o funcție Leapunov  $f$  pentru care  $D_{Ax}f = -\|x\|^2$  și să se arate că punctul de echilibru  $x = 0$  este instabil.

2) Să se arate că dacă  $j'(x_0) < 0$ , atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = \infty$ .

3) Ipoteza  $j'(x_0) > 0$  implică  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = \infty$ ?

8. Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $\mathbb{R}^n$  cu proprietatea  $\langle x, \mathbf{X}(x) \rangle \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Să se arate că  $\mathbf{X}(0) = 0$ , punctul de echilibru  $x = 0$  al sistemului  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x)$  este stabil și liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  sunt mărginite.

Indicație.  $f(x) = \|x\|^2$  este funcție Leapunov.

9. Un sistem mecanic cu un grad de libertate, cu masa  $m$ , acționat de o forță perturbatoare armonică are caracteristica elastică

$$f(x) = \begin{cases} k_1 x, & \text{dacă } -a \leq x \leq a, \\ k_2 x + (k_1 - k_2) a, & \text{deacă } x \geq a, \\ k_2 x - (k_1 - k_2) a, & \text{dacă } x \leq -a. \end{cases}$$

Să se studieze stabilitatea mișcării sistemului.

Indicație.  $m\ddot{x} + f(x) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$ . Notind  $y = b \sin(\omega t + \varphi)$ , găsim  $\ddot{x} = -\frac{1}{m} f(x) + \frac{F_0}{b\omega} \dot{y}$ ,  $\ddot{y} = -\omega^2 y$ . Punem  $x = x_1$ ,  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $y = x_3$ ,  $\dot{y} = x_4$ .

10. Să se demonstreze că pentru un sistem hamiltonian nu pot exista, în spațiul fazelor, puncte de echilibru asymptotic stabile sau cicluri limite asymptotic stabile.

Indicație. Se folosește aproximarea liniară.

11. Rostogolirea unui disc circular pe un plan orizontal este dată de sistemul diferențial [70]

$$\frac{d\theta}{dt} = p, \quad (\gamma + 1) \frac{dr}{dt} = pq,$$

$$(\alpha + 1) \frac{dp}{dt} = -qr(\gamma + 1) + \alpha q \operatorname{ctg} \theta - \frac{g}{a} \cos \theta,$$

$$\alpha \frac{dq}{dt} = -p(\alpha q \operatorname{ctg} \theta - \gamma r),$$

unde  $g$  este accelerarea gravitațională, iar  $\alpha, \gamma, a$  sint parametri reali. Să se cerceteze stabilitatea punctelor de echilibru.

## 5. SISTEME POTENȚIALE ȘI TEORIA CATASTROFELOR

Liniile de gradient ale unui cimp scalar  $f$  nu pot fi curbe închise decât în cazul în care se reduc la puncte de echilibru. Acestea sunt traectorii ortogonale hipersuprafețelor de nivel constant ale cîmpului scalar  $f$  și de-a lungul lor  $f$  crește cel mai repede. Dacă potențialul  $f$  este o funcție subarmonică, adică  $\Delta f \geq 0$ , atunci curentul generat de grad  $f$  mărește volumul (v. 5.1).

Clasificarea potențialelor cu cel mult patru parametri implică o clasificare a sistemelor diferențiale potențiale corespunzătoare, iar noțiunile din teoria catastrofelor elementare dezvoltă noii posibilități privind studiul liniilor de gradient (v. 5.2).

Liniile de gradient ale faldului (v. 5.3), întoarcerii (v. 5.4), rindunicii (v. 5.5) și fluturelui (v. 5.6) sunt soluții ale unor ecuații diferențiale cu variabile separate  $\frac{dx}{dt} = P(x)$ , unde  $P(x)$  este respectiv un polinom de gradul doi, trei, patru și cinci. Dacă  $x_0$  nu este un punct de

echilibru, atunci soluția determinată de condițiile inițiale  $(t_0, x_0)$  este  $t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{du}{P(u)}$ .

Dacă  $x_0$  este astfel încit  $[x_0, \infty)$  nu conține zerouri ale lui  $P$ , atunci integrala  $\int_{x_0}^{\infty} \frac{du}{P(u)}$  este convergentă. În probleme de mișcare acest fapt pune în evidență că particula se mișcă la infinit într-un timp finit (în viitor) sau vine de la infinit într-un timp finit (în trecut).

Dacă pe intervalul  $[x_0, b]$  există un zero al lui  $P$ , atunci  $\int_{x_0}^b \frac{du}{P(u)}$  este o integrală improprie

de a doua specă, divergentă; în problemele concrete această integrală se poate folosi ca atare sau prin valoarea sa principală.

Punctele de echilibru ale gradientului ombilicului eliptic (v. 5.7), ombilicului hiperbolic (v. 5.8) și ombilicului parabolic (v. 5.9) pot fi atrători, noduri proprii, noduri improprii și puncte să, fie asymptotic stabile, fie instabile.

Problemele propuse în 5.10 se referă la fixarea direcției celei mai rapide creșteri, determinarea curenților generați de cimpuri vectoriale potențiale și cercetarea stabilității punetelor de echilibru ale sistemelor potențiale.

Concepțele matematice prezentate în acest capitol și în capitolul 7 au aplicații în cosmologie, colapsul gravitațional al stelelor, termodinamică, teoria structurilor elastice [23], rezonanță neliniară a sistemelor mecanice, instabilitatea rețelelor electrice, instabilitatea sistemelor hidrodinamice, cristalografie, navigație, biologie, psihologie, formarea cicloanelor, crizele economice, căderea burselor, creșterea haotică a orașelor, schimbările de opinie publică etc.

## 5.1. Puncte critice și linii de gradient

Fie  $D$  o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  un cîmp scalar de clasă  $C^1$ . Zerourile gradientului lui  $f$ , adică soluțiile sistemului

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ \dots &\dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\}, (x_1, \dots, x_n) = x \in D, \quad (1)$$

se numesc *puncte critice* ale funcției  $f$ . Dacă  $x_0$  este un punct critic al lui  $f$ , atunci numărul  $f(x_0)$  se numește *valoarea critică* a lui  $f$ . Pentru a avea o imagine asupra punctelor critice ale lui  $f$  utilizăm fie forma graficului lui  $f$  într-o vecinătate a unui asemenea punct, fie forma mulțimilor de nivel constant ale lui  $f$ . Hiperplanul tangent la graficul lui  $f$  în punctul  $(x_0, f(x_0))$ ,  $x_0$  fiind punct critic, este un hiperplan orizontal.

**Teorema Fermat.** Dacă  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  este un cîmp scalar de clasă  $C^1$  și  $x_0 \in D$  este un punct de extrem local, atunci  $\nabla f(x_0) = 0$ , adică  $x_0$  este un punct critic al lui  $f$ .

**Demonstrație.** Fie  $v$  un vector oarecare legat în punctul  $x_0$ . Fixăm  $r > 0$  astfel încît  $f(x) - f(x_0)$  să aibă semn constant pe bila  $B_r(x_0)$ . Funcția  $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(t) = f(x_0 + tv)$  este de clasă  $C^1$  și diferența  $g(t) - g(0)$  are semn constant pe  $(-r, r)$ . Astfel  $t = 0$  este un punct de extrem local al lui  $g$  și în consecință (teorema Fermat de la funcțiile reale de o variabilă reală)  $0 = g'(0) = (\nabla f(x_0), v)$ . Deoarece  $v$  este arbitrar rămîne că  $\nabla f(x_0) = 0$ .

**Consecință.** Un cîmp scalar de clasă  $C^1$  pe o mulțime compactă își atinge marginile sau într-un punct critic sau într-un punct de pe frontieră.

Teorema următoare dă o condiție suficientă pentru existența punctelor de extrem global.

**Teoremă.** Fie  $D$  o mulțime deschisă și convexă din  $\mathbb{R}^n$ , iar  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  un cîmp scalar convex (concav) de clasă  $C^1$  pe  $D$ . Dacă  $x_0$  este un punct critic, atunci  $x_0$  este un punct de minim (maxim) global.

**Demonstrație.** Ipotezele  $D$  convexă,  $f$  convexă și diferențiabilă în  $x_0 \in D$  implică

$$f(x_0) + (\nabla f(x_0), x - x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in D.$$

Dacă  $x_0$  este un punct critic, adică  $\nabla f(x_0) = 0$ , atunci  $f(x_0) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in D$  și deci  $x_0$  este un punct de minim global pe  $D$ .

**Teoremă.** Fie  $D$  o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  un cîmp scalar de clasă  $C^p$ ,  $p \geq 2$ .

1) Dacă  $x_0 \in D$  este un punct de extrem local, atunci  $d^2f(x_0)(dx)$  este (pozitiv sau negativ) semidejiniță.

2) Fie  $x_0$  un punct critic. Dacă  $d^2f(x_0)(dx)$  este pozitiv (negativ) dejiniță, atunci  $x_0$  este un punct de minim (maxim) local.

*Demonstrație.* Pentru ambele părți ale teoremei utilizăm formula Taylor  $f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + (1/2)d^2f(x_0 + \tau(x - x_0))(x - x_0)$ , unde  $\tau \in (0, 1)$ .

1) Presupunem că  $x_0$  este un punct de extrem local, adică  $f(x) \geq (\leq) f(x_0)$ , pentru orice  $x$  dintr-o vecinătate a lui  $x_0$ . În baza teoremei Fermat  $x_0$  este un punct critic, adică  $df(x_0) = 0$ . Din formula Taylor și din continuitatea diferențialei de ordinul doi rezultă că  $d^2f(x_0)(dx)$  este pozitiv sau negativ semidefinită. O consecință imediată a acestei părți a teoremei este faptul că dacă  $d^2f(x_0)(dx)$  nu are semn constant, atunci  $x_0$  nu poate fi punct de extrem local.

2) În baza continuătății,  $d^2f$  va fi pozitiv (negativ) definită într-o vecinătate a lui  $x_0$ . De aceea formula Taylor dă  $f(x) > (<) f(x_0)$  pentru orice  $x \neq x_0$  dintr-o vecinătate a lui  $x_0$ , adică  $x_0$  este unicul punct de extrem local.

Fie  $j : D \rightarrow \mathbb{R}$  un cîmp scalar de clasă  $C^2$  și  $x_0 \in D$  un punct critic al lui  $f$ . Dacă forma pătratică (hessiană)  $d^2f(x_0)$  este nedegenerată, adică  $\det \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_0) \right] \neq 0$ , atunci  $x_0$  se numește *punct critic nedegenerat*.

În caz contrar  $x_0$  se numește *punct critic degenerat*. Punctele critice nedegenerate sunt izolate, iar difeomorfismele de clasă  $C^2$  păstrează calitatea de punct critic degenerat sau nedegenerat.

**Exemplu.** În cazul  $n = 2$ , originea este punct critic pentru fiecare dintre cîmpurile scalare de clasă  $C^\infty$  definite respectiv prin

$$x^2 + y^2, -x^2 - y^2, x^2 - y^2, x^3 - 3xy^2, x^2, x^2y^2.$$

Denumirile uzuale pentru aceste tipuri de puncte critice sunt respectiv *punct de minim* (fig.1.1), *punct de maxim* (fig. 1.1), *punct să* (fig. 1.2), *punct să maimuță* (fig. 1.3), *punct albie* (fig. 1.4), și *punct încrucișare de albi* (fig. 1.5). Punctele critice ale funcțiilor  $x^2 + y^2$ ,  $-x^2 - y^2$ ,  $x^2 - y^2$ ,  $x^3 - 3xy^2$  sunt respectiv puncte critice izolate, în timp ce punctele critice ale funcțiilor  $x^2$ ,  $x^2y^2$  sunt respectiv neizolate. De asemenea, punctele de minim, de maxim și să sunt puncte critice nedegenerate, iar punctele să maimuță, albie și încrucișare de albi sunt puncte critice degenerate.

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$ , căruia îi atașăm sistemul diferențial

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x), \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n(x). \quad (2)$$

Dacă  $\mathbf{X}$  este un cîmp potențial pe  $D$ , atunci sistemul diferențial (2) se numește *sistem potențial*. Potențialul  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  al lui  $\mathbf{X}$  se numește *potențialul sistemului diferențial* (2). Deoarece  $\mathbf{X} = \text{grad } f$ , sistemul potențial se scrie în forma

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x). \quad (3)$$

Soluțiile unui sistem potențial (3) se mai numesc și *linii de gradient ale lui  $f$* . Teorema care urmează arată că liniile de gradient diferite de punctele de echilibru nu pot fi curbe închise.

Mulțimea punctelor de echilibru ale sistemului diferențial (3) coincide cu mulțimea punctelor critice ale potențialului,  $f$ , fiind descrisă de sistemul algebric (1).

Fie  $\alpha : I \rightarrow D$  o linie de gradient și  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h = f \circ \alpha$ . Găsim

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha(t)) \frac{dx_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha(t)) \frac{dx_n}{dt}(t) = \\ &= \|\text{grad } f(\alpha(t))\|^2 \geq 0, \forall t \in I. \end{aligned}$$

Astfel  $h$  este o funcție monoton crescătoare, adică valorile lui  $f$  cresc de-a lungul oricărei linii de gradient (și evident descerse pe linia opusă). În plus, rezultatele din 1.4 arată că, curbele de-a lungul căror  $f$  crește cel mai repede sunt liniile de gradient ale lui  $f$ . Într-adevăr, dacă  $\alpha : (a, b) \rightarrow D$  este o linie de gradient a lui  $f$  și  $\beta : (c, d) \rightarrow D$  este o curbă oarecare de clasă  $C^1$  astfel încât  $\beta(s_0) = \alpha(t_0)$ ,  $s_0 \in (c, d)$ ,  $t_0 \in (a, b)$  și  $\|\beta'(s_0)\| = \|\alpha'(t_0)\|$  (aceeași viteză), atunci

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(f \circ \beta)(s_0) &= (\nabla f(\beta(s_0)), \beta'(s_0)) \leq \|\nabla f(\beta(s_0))\|^2 = \\ &= (\nabla f(\alpha(t_0)), \alpha'(t_0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t_0) \end{aligned}$$

(viteza de creștere a lui  $f$  pe curba  $\beta$  nu depășește viteza de creștere pe curba  $\alpha$ ).

**Teoremă.** Fie  $\alpha : I \rightarrow D$  o linie de gradient a lui  $f$ . 1) Orbita  $\alpha(I)$  este ortogonală hipercurbelor de nivel constant ale lui  $f$ . 2) Dacă  $I = [t_0, \infty)$  și există  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = x_1 \in D$ , atunci  $x_1$  este un punct critic al lui  $f$  [punct de echilibru al sistemului diferențial (3)].

3)  $\alpha$  nu poate fi o curbă închisă decât în cazul în care este un punct de echilibru.

**Demonstrație.** 2) Această afirmație poate fi privită ca o consecință a teoremei din 4.1. Preferăm însă demonstrația directă. Fie  $h = f \circ \alpha$ . Evident  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = f(x_1)$ . Atunci

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(\alpha(t_0)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (h(t) - h(t_0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t h'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \|\text{grad } f(\alpha(t))\|^2 dt = \\ &= \int_{t_0}^{\infty} \|\text{grad } f(\alpha(t))\|^2 dt. \end{aligned}$$

Convergența integralei și  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\text{grad } f(\alpha(t))\|^2 = \|\text{grad } f(x_1)\|^2$  implică  $\|\text{grad } f(x_1)\| = 0$  și deci  $\text{grad } f(x_1) = 0$ , adică  $x_1$  este un punct critic al lui  $f$ .

3) Fie  $I = [a, b]$  și  $\alpha : [a, b] \rightarrow D$  o linie de gradient închisă, adică  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , care nu este un punct de echilibru. Utilizând funcția  $h = f \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , găsim contradicția

$$0 = h(a) - h(b) = \int_a^b h'(t) dt = \int_a^b \|\text{grad } f(\alpha(t))\|^2 dt > 0.$$

**O b s e r v a t i e.** Există cimpuri vectoriale irotaționale care au linii de cimp închise. De exemplu, liniile de cimp ale cimpului vectorial irotațional  $\mathbf{X} = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  sunt cercuri cu centrul în origine. Aceasta pune în evidență că  $\mathbf{X}$  nu este global echivalent cu un cimp potențial.

**Teoremă.** Dacă potențialul  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție convexă de clasă  $C^2$ , atunci curentul atașat sistemului (3) mărește volumul.

**Demonstrație.** Prin ipoteză  $d^2f(x)$  este pozitiv semidefinită pentru fiecare  $x \in D$ . Rezultă  $\text{div}(\text{grad } f) = \text{urma } d^2f \geq 0$  (v. 1.6).

Fie  $x_0$  un punct de echilibru al sistemului diferențial (3). Diferențialitatea lui  $\partial f / \partial x_i$  implică

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_j - x_{j0}) + \|x - x_0\|F_i(x), \lim_{x \rightarrow x_0} F_i(x) = 0.$$

Astfel sistemului diferențial neliniar (3) î se atașează sistemul diferențial liniar

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_j - x_{j0}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3')$$

Matricea  $\left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right]$  are valorile proprii reale, fiind simetrică. Aceste valori proprii sunt strict negative dacă și numai dacă  $d^2f(x_0)$  este negativ definită (rezultă că  $x_0$  este un punct de maxim local strict al lui  $f$ ). În concluzie, dacă  $d^2f(x_0)$  este negativ definită, atunci punctul de echilibru  $x_0$  este asymptotic stabil și deci stabil. Atunci orice linie de gradient ce pornește dintr-un punct suficient de apropiat de  $x_0$  tinde către  $x_0$ . Aceste rezultate pot fi demonstreate independent de teoria stabilității.

**Teoremă.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^2$  și  $x_0 \in D$  un punct critic al lui  $f$  pentru care  $d^2f(x_0)$  este negativ definită. Dacă  $r > 0$  este suficient de mic și  $x_1$  aparține bilerii  $B_r(x_0)$ , atunci linia de gradient  $\alpha$  a lui  $f$  ce pleacă la  $t_1$  din  $x_1$  este definită pe  $[t_1, \infty)$  și  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = x_0$ .

**Demonstrație.** Fie  $h(t) = \|\alpha(t) - x_0\|^2/2$ ,  $t \in [t_1, \infty)$ . Rezultă  $h'(t) = (\alpha'(t)) \cdot (\alpha(t) - x_0) = (\text{grad } f(\alpha(t))) \cdot (\alpha(t) - x_0) = (df(\alpha(t)) - df(x_0))(\alpha(t) - x_0) = d^2f(x_1)(\alpha(t) - x_0)$ ,  $\alpha(t) - x_0 \leq -c \|\alpha(t) - x_0\|^2$ ,  $c > 0$ .

Altfel scris  $h'(t) \leq -ch(t)$  sau  $\ln h(t) - \ln h(t_1) \leq -c(t - t_1)$ . Relațiile  $0 \leq h(t) \leq h(t_1)e^{-c(t-t_1)}$ ,  $t \in [t_1, \infty)$ , implică  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ , adică  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = x_0$ .

A rămas să arătăm că soluția  $x(t, x_1)$ ,  $x_1 \in B_r(x_0)$  se prelungeste în viitor nemărginit. Pentru aceasta considerăm mulțimea compactă (cilindru)  $A = B_r(x_0) \times [t_1, T] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Conform teoremei de prelungire (v. 3.1),  $x(t, x_1)$  se poate prelungi în viitor pînă la frontiera  $\partial A$ . Soluția nu poate ajunge la  $\partial B_r(x_0)$  deoarece  $h: [t_1, T] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție descrescătoare; rămîne că  $x(t, x_1)$  se poate prelungi pînă la capacul  $t = T$  care este arbitrar și independent de  $B_r(x_0)$ .

**Exemple.** În cazul  $n = 2$ , tipurile punctelor de echilibru ale sistemelor potențiale pot fi : receptor (fig. 5.1), punct de minim al potențialului), sursă (fig. 5.2, punct de maxim al potențialului), să simplă (fig. 5.3), să mainuță (fig. 5.4), dipol (fig. 5.5). Pozițiile de echilibru ale sistemelor potențiale nu pot fi puncte de rotație.

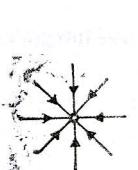


Fig. 5.1

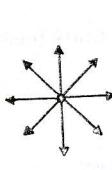


Fig. 5.2

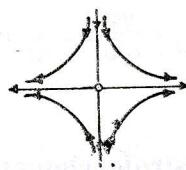


Fig. 5.3

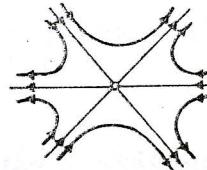


Fig. 5.4

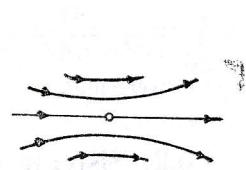


Fig. 5.5

**Comentariu.** 1) Presupunem  $n = 1$ . Sistemul potențial (3) se reduce la ecuația diferențială cu variabile separabile  $\frac{dx}{dt} = f'(x)$ . Liniile de gradient ale lui  $f'$  privite ca orbite sunt intervalele orientate de creștere ale funcției  $f$  sau zerourile ale lui  $f'$ ; privite ca funcții sunt parametrizări speciale ale acestor intervale de creștere sau poziții de echilibru. Dacă  $x_0$  nu este un punct de echilibru, atunci soluția fixată de condițiile  $(t_0, x_0)$  a ecuației diferențiale precedente

este  $t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{du}{f'(u)}$ . De aici rezultă o metodă pentru stabilirea intervalor de monotonie ale unei funcții  $f$  cel puțin de clasă  $C^1$ : zerourile lui  $f'$  se află printre extremitățile finite, iar sensul de creștere sau descreștere pe fiecare interval se fixează prin cel puțin două valori ale primitivei (obținute prin metode numerice sau exacte). Dacă  $x_0$  este un punct de echilibru al ecuației diferențiale  $\frac{dx}{dt} = f'(x)$ , atunci ecuația diferențială liniară asociată este  $\frac{dx}{dt} = (x - x_0)f''(x_0)$ .

2) Explicațiile se referă la liniile de cimp ale lui grad  $f$ . Din acestea sau direct rezultă proprietăți analoage pentru liniile de cimp ale lui  $-$ grad  $f$ .

3) Aspectele teoretice prezentate stau la baza metodelor numerice de tip gradient pentru determinarea punctelor critice (și deci și a punctelor de extrem) ale cimpurilor scalare [61].

**Aplicația 5.1.** Presupunem că mișcarea unei particule în  $\mathbb{R}^3$  este descrisă de sistemul potențial

$$\frac{dx}{dt} = yz, \quad \frac{dy}{dt} = zx, \quad \frac{dz}{dt} = xy.$$

Să se arate că :

- 1) dacă două dintre numerele  $x(0)$ ,  $y(0)$ ,  $z(0)$  sunt nule, atunci particula nu se mișcă;
- 2) dacă  $x(0) = y(0) = 1$ ,  $z(0) = -1$ , atunci traекторia mișcării are ecuațiile parametrice

$$x = \sec t, \quad y = \sec t, \quad z = \operatorname{tg} t, \quad t \neq (2k + 1)\pi/2, \quad k \in \mathbb{Z};$$

- 3) dacă  $x(0) = y(0) = 1$ ,  $z(0) = -1$ , atunci traекторia mișcării are ecuațiile parametrice

$$x = \frac{1}{1+t}, \quad y = \frac{1}{1+t}, \quad z = -\frac{1}{1+t}, \quad t \neq -1;$$

- 4) dacă cel puțin două dintre valorile  $x(0)$ ,  $y(0)$ ,  $z(0)$  sunt diferite de zero, atunci sau particula se mișcă la infinit într-un timp finit (în viitor) sau vine de la infinit într-un timp finit (în trecut).

**Rezolvare.** Se observă că  $(yz, zx, xy)$  admite potențialul  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = xyz$ . Hipersuprafețele de nivel constant diferit de zero atașate lui  $f$  sunt hipersuprafețe Tițeica.

- 1) Axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sunt alcătuite din puncte de echilibru.

2; 3) Din  $\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}$  găsim ecuațiile carteziene implicate ale familiei de traectorii,  $x^2 - y^2 = k_1$ ,  $x^2 - z^2 = k_2$ . Din condițiile inițiale se determină constantele  $k_1$ ,  $k_2$  și apoi se verifică parametrizările propuse.

4) Din  $xx' = yy' = zz'$  rezultă  $x^2 - c_1 = y^2 - c_2 = z^2 - c_3$ . Presupunem  $c_1 \geq c_2 \geq c_3 = 0$ . Deci  $z^2 \leq y^2 \leq x^2$  și  $z^2 = x^2 - c_1 = y^2 - c_2$ ;  $c_1, c_2 \geq 0$ ;  $\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{(z^2 + c_1)(z^2 + c_2)}$ . Pentru simplificare presupunem  $z(0) \geq 0$  și  $\frac{dz}{dt} = \sqrt{(z^2 + c_1)(z^2 + c_2)}$ . Rezultă  $t(z) = \int_{z(0)}^z \frac{du}{\sqrt{(u^2 + c_1)(u^2 + c_2)}}$  și  $\lim_{z \rightarrow \infty} t(z) = \int_{z(0)}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2 + c_1)(u^2 + c_2)}}$  este finită (deoarece integrala este convergentă).

## 5.2. Sisteme potențiale și catastrofe elementare

Fie  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, c) \mapsto f(x, c)$  o funcție diferențială.  $\mathbb{R}^n$  este numit *spațiul stărilor*, iar  $\mathbb{R}^m$  este numit *spațiul de control*.

Fie  $c$  un punct din  $\mathbb{R}^m$ . Restricția lui  $f$  la  $\mathbb{R}^n \times \{c\}$ , adică funcția parțială  $x \mapsto f_c(x)$  se notează cu  $f_c$  și se numește *potențial*. Astfel,  $f$  poate fi gîndită ca o familie de potențiale.

Potențialului  $f_c$  îi se atașează sistemul diferențial

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f_c}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f_c}{\partial x_n}(x). \quad (4)$$

Mulțimea  $M$  a punctelor de echilibru ale sistemului (4) coincide cu mulțimea punctelor critice ale familiei de potențiale  $f_c$  și ca submulțime a lui  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  este descrisă de ecuațiile

$$\frac{\partial f_c}{\partial x_1}(x) = 0, \dots, \frac{\partial f_c}{\partial x_n}(x) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}^m.$$

Această mulțime se numește *mulțimea catastrofă* asociată potențialelor  $f$ , sau *mulțimea de echilibru* a sistemului (2). Ea nu este o subvarietate de dimensiune  $m$  a lui  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  decât dacă  $f$  are anumite proprietăți care sunt îndeplinite în cazuri particulare (este suficient să funcționeze teorema funcțiilor implicate).

Fie  $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  proiecția naturală definită prin  $\pi(x, c) = c$ . Restricția lui  $\pi$  la  $M$  se notează cu  $\chi$  și se numește *aplicația catastrofă*.

Submulțimea  $S$  a lui  $M$  formată din punctele singulare (critice) ale aplicației catastrofă  $\chi: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ , adică din punctele în care rangul matricei jacobian  $J(\chi)$  este mai mic decât  $m$ , se numește *mulțimea singularităților*. Imaginea  $B = \chi(S) \subset \mathbb{R}^m$  este numită *mulțimea bifurcație*. Aceasta este observabilă direct aflindu-se în spațiul de control.

Explicitând jacobianul lui  $\chi$ , se constată că  $S$  este de fapt mulțimea punctelor  $(x, c) \in M$  care sunt puncte critice degenerate pentru funcția  $x \mapsto f_c(x)$ . Cu alte cuvinte,

$$S: \frac{\partial f_c}{\partial x_1}(x) = 0, \dots, \frac{\partial f_c}{\partial x_n}(x) = 0, \det \left[ \frac{\partial^2 f_c}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right] = 0.$$

Rezultă că  $B$  este mulțimea pe care numărul și natura punctelor critice ale lui  $x \mapsto f_c(x)$ , sau de echilibru pentru sistemul (4), se schimbă. Teoria

stabilității structurale a funcțiilor Morse arată că o asemenea schimbare pentru  $x \rightarrow f_c(x)$  poate să aibă loc numai dacă se trece printr-un punct critic degenerat. Punctelor critice degenerate ale funcției  $x \rightarrow f_c(x)$  le corespund puncte ale graficului acestei funcții în care curbura Gauss-Kronecker,

$$K = \det \left[ \frac{\partial^2 f_c}{\partial x_i \partial x_j} \right] / (1 + \|\nabla f_c\|^2)^{1+n/2},$$

este nulă.

Termenul de *catastrofă* este utilizat ca sinonim pentru „punct din  $S''$  cu scopul de a sugera că o variație netedă în spațiul de control determină o schimbare discontinuă (un salt) în spațiul stărilor. Saltul înseamnă trecerea de la un punct de minim la un punct de maxim (sau invers) ale funcției  $x \rightarrow f_c(x)$  sau trecerea de la o soluție a sistemului (4) la altă soluție care nu mai este topologic echivalentă cu prima. Precizăm că sistemele diferențiale potențiale nu oscilează niciodată și singurele salturi care pot să apară la un asemenea sistem sunt acelea asociate cu o schimbare a numărului de punete de echilibru.

Teoria generală arată că familiile de funcții pot fi clasificate astfel încât structura punctelor critice să nu fie afectată calitativ de schimbări potrivite de coordonate. În particular aproape toate familiile, cu  $m \leq 4$  parametri, de funcții reale diferențiabile definite pe  $\mathbb{R}^n$ , sunt structural stabile și sunt echivalente în vecinătatea oricărui punct ca una dintre următoarele forme [54];

1) *necritică*,  $x_1$ ,

*lăsa Morse*,  $x_1^2 + \dots + x_l^2 - x_{l+1}^2 - \dots - x_n^2$ ,  $0 \leq l \leq n$ .

(Acele două tipuri nu sunt forme catastrofă, întrucât nu au puncte critice degenerate și rămân neschimbate în raport cu variațiile din spațiul de control. Toate cele care urmează posedă puncte critice degenerate, depind de variaibilele de control și deci sunt forme catastrofă.)

2) *catastrofe cuspidale*

*faldul*,  $\frac{1}{3}x_1^3 + c_1x_1 + (M)$ ,

*întoarcere*,  $\pm \left( \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}c_1x_1^2 + c_2x_1 \right) + (M)$ ,

*rindunica*,  $\frac{1}{5}x_1^5 + \frac{c_1}{3}x_1^3 + \frac{c_2}{2}x_1^2 + c_3x_1 + (M)$ ,

*fluturele*  $\pm \left( \frac{1}{6}x_1^6 + \frac{c_1}{4}x_1^4 + \frac{c_2}{3}x_1^3 + \frac{c_3}{2}x_1^2 + c_4x_1 \right) + (M)$ ;

3) *catastrofe ombilicale*

*ombilicul eliptic*,  $x_1^3 - 3x_1x_2^2 + c_1(x_1^2 + x_2^2) + c_2x_1 + c_3x_2 + (N)$ ,

*ombilicul hiperbolic*,  $x_1^3 + x_2^3 + c_1x_1x_2 + c_2x_1 + c_3x_2 + (N)$ ,

*ombilicul parabolic*,  $\pm (x_1^2x_2 + x_2^4 + c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_1 + c_4x_2) + (N)$ ,

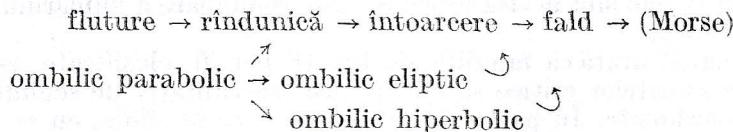
unde  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq 4$ ,  $(M)$  indică o funcție (Morse) de forma

$$x_2^2 + \dots + x_l^2 - x_{l+1}^2 - \dots - x_n^2, \quad 1 \leq l \leq n,$$

iar  $(N)$  indică o funcție (Morse) de forma

$$x_3^2 + \dots + x_l^2 - x_{l+1}^2 - \dots - x_n^2, \quad 2 \leq l \leq n,$$

Denumirile respective au fost sugerate de geometriile caracteristice fiecărui tip în parte și se folosesc atât pentru familia de funcții, cât și pentru punctele critice degenerate corespunzătoare. Semnele  $\pm$  indică posibilități duale și se lasă de o parte întrucât geometria celor două situații este esențial aceeași. Lăsând de o parte și formula (1) și termenii  $(M)$ , respectiv  $(N)$ , obținem șapte tipuri de familii de funcții numite pe scurt *catastrofe elementare*. Acestea conțin subcatastrofe, diagrama de subordonare fiind următoarea :



### 5.3. Liniile de gradient ale faldului

Considerăm *potențialul fald*  $x \rightarrow f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$ , unde  $a$  este un parametru real. Liniile de gradient ale acestui potențial sunt date de ecuația diferențială cu variabile separabile

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + a. \quad (5)$$

Privite ca orbite, liniile de gradient ale lui  $f_a$  sunt intervalele orientate pe care  $f_a$  crește sau soluții ale ecuației  $x^2 + a = 0$ . Rezultă mulțimea de echilibru  $M : x^2 + a = 0$  (*parabolă*), care poate fi privită și ca imaginea hărții  $\alpha : x = t$ ,  $a = -t^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Deducem că expresia în coordonate a aplicației catastrofă este  $\chi \circ \alpha(t) = -t^2$ , cu un singur punct critic  $t = 0$ . De aceea  $\chi$  are punctul critic  $(0, 0)$  și deci  $S = \{(0, 0)\}$  este mulțimea singularităților, iar  $B = \chi(\{(0, 0)\}) = \{0\}$  este mulțimea bifurcației.

Fie  $a > 0$ . Atunci ecuația diferențială (5) nu admite puncte de echilibru, iar soluția generală este

$$x = \sqrt{a} \operatorname{tg} \sqrt{a}(t + C), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi/(2\sqrt{a}), k \in \mathbb{Z}\}.$$

Soluția fixată prin condițiile inițiale  $(t_0, x_0)$ , deci cu

$$C = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc tg} \frac{x_0}{\sqrt{a}} - t_0, \quad \text{are graficul din fig. 5.6.}$$

Fie  $a = 0$ . Atunci  $x = 0$  este singurul punct de echilibru și  $x = -1/(t+C)$ ,  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-C\}$ , este soluția generală. Evident punctul de echilibru nu poate fi o valoare inițială a soluțiilor provenite din soluția generală. Pentru fig. 5.7 constanta  $C$  s-a fixat prin condițiile inițiale  $(t_0, x_0)$  și deci  $C = -\frac{1}{x_0} - t_0$ . Notăm  $x(t, x_0) = -1/(t - t_0 - 1/x_0)$ ; punctul de echilibru

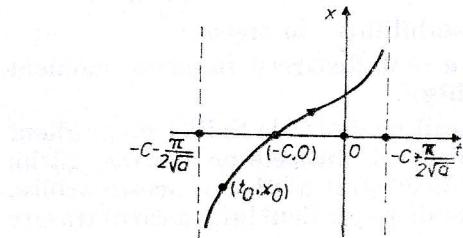


Fig. 5.6

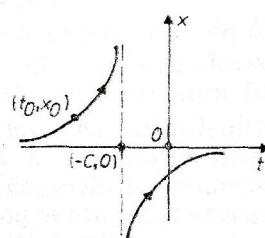


Fig. 5.7

$x_0 = 0$  este stabil și asimptotic stabil deoarece  $\lim_{x_0 \rightarrow 0} x(t, x_0) = 0$ ,  $\forall t \in [t_0, \infty)$  și  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0$ .

Fie  $a < 0$ . Atunci ecuația diferențială (5) admite două puncte de echilibru  $x = \pm \sqrt{-a}$ , iar soluția generală este

$x = -\sqrt{-a} \operatorname{cth} \sqrt{-a}(t + C_1)$  pentru  $x \in (-\infty, -\sqrt{-a}) \cup (\sqrt{-a}, \infty)$  și  $x = -\sqrt{-a} \operatorname{th} \sqrt{-a}(t + C_2)$  pentru  $x \in (-\sqrt{-a}, \sqrt{-a})$ . Dând condițiile inițiale  $(t_0, x_0)$  care determină soluția  $x(t)$  a ecuației diferențiale (5), ajungem la următoarele concluzii: dacă  $x_0$  este un punct de echilibru, atunci  $x(t) = x_0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ; dacă  $x_0 \in (-\infty, -\sqrt{-a}) \cup (\sqrt{-a}, \infty)$ , atunci soluția  $x(t)$  are comportarea cotangentei hiperbolice (fig. 5.8),  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arg \operatorname{cth} \frac{x_0}{-\sqrt{-a}} - t_0$ ; dacă  $x_0 \in (-\sqrt{-a}, \sqrt{-a})$ , atunci soluția  $x(t)$  are comportarea tangentei hiperbolice (fig. 5.9),  $C_2 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{argth} \frac{x_0}{-\sqrt{-a}} - t_0$ .

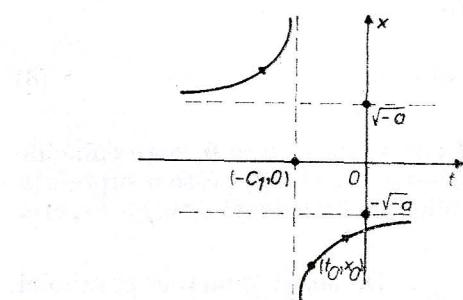


Fig. 5.8

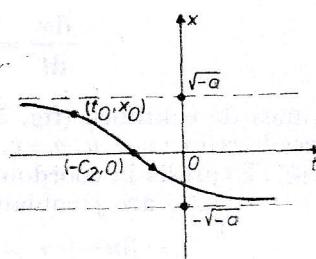


Fig. 5.9

Punctul de echilibru  $x = -\sqrt{-a}$ ,  $a \neq 0$ , este asimptotic stabil și deci stabil, deoarece (v. 5.1)

$$\frac{d^2f_a}{dx^2}(-\sqrt{-a}) = -2\sqrt{-a} < 0.$$

De asemenea, observăm că  $\lim_{x_0 \rightarrow \sqrt{-a}} x(t, x_0) = \sqrt{-a}$ ,  $\forall t \in (-\infty, t_0]$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, x_0) = \sqrt{-a}$  (fapt ce ar corespunde unei „stabilități” în trecut).

Catastrofa are loc la trecerea prin  $a = 0$ , deoarece în acest moment se schimbă numărul punctelor de echilibru.

Săgețile din fig. 5.6—5.9 indică sensul pe graficele liniilor de gradient și deci sensul de creștere a lui  $f_a$ . Proiectând graficele pe axa  $Ox$ , găsim orbitele (segmente de dreaptă) și sensul de creștere a lui  $f_a$  pe aceste orbite. Evident, aceste rezultate se pot citi direct de pe graficul lui  $f_a$  a cărui trasare nu ridică nici o problemă (fig. 5.10).

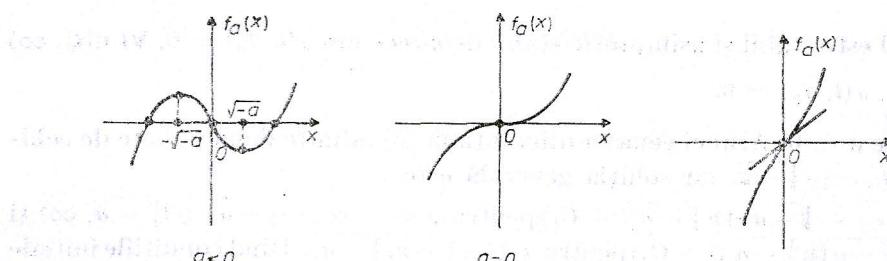


Fig. 5.10

#### 5.4. Liniile de gradient ale întoarcerii

Considerăm *potențialul* întoarcere  $x \rightarrow f_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}(ax^2) + bx$ ,

unde  $a, b$  sunt parametri reali. Ecuația de tipul (4) asociată cu acest potențial este o ecuație cu variabile separabile

$$\frac{dx}{dt} = x^3 + ax + b. \quad (6)$$

Mulțimea de echilibru (fig. 5.11)  $M : x^3 + ax + b = 0$ , care coincide cu imaginea hărții  $r : x = u$ ,  $a = v$ ,  $b = -u^3 - vu$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , este o suprafață riglată în  $\mathbb{R}^3$ . Expresia în coordonate a aplicației catastrofă este  $\chi \circ r(u, v) = (v, -u^3 - vu)$  și are jacobianul

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3u^2 - v & -u \end{vmatrix} = 3u^2 + v = \frac{d^2f_{ab}}{dx^2} \Big|_{x=u}. \quad \text{De aceea punctele parabolii } P : 3u^2 + v = 0 \text{ din planul } uOv \text{ sunt puncte singulare ale lui } \chi \circ r;$$

iar multimea singularităților  $S$  este caracterizată prin  $x = u$ ,  $a = v$ ,  $b = -u^3 - vu$ ,  $3u^2 + v = 0$ . Se observă că  $S$  este o cubică răsucită (curba fald) de ecuații parametrice  $x = u$ ,  $a = -3u^2$ ,  $b = 2u^3$ . Corespunzător, multimea bifurcație  $B$  are parametrizarea  $\chi(u, -3u^2, 2u^3) = (-3u^2, 2u^3)$ . Cu alte cuvinte,  $B$  este parabola semicubică de ecuație carteziană implicită  $4a^3 + 27b^2 = 0$  (fig. 5.11).

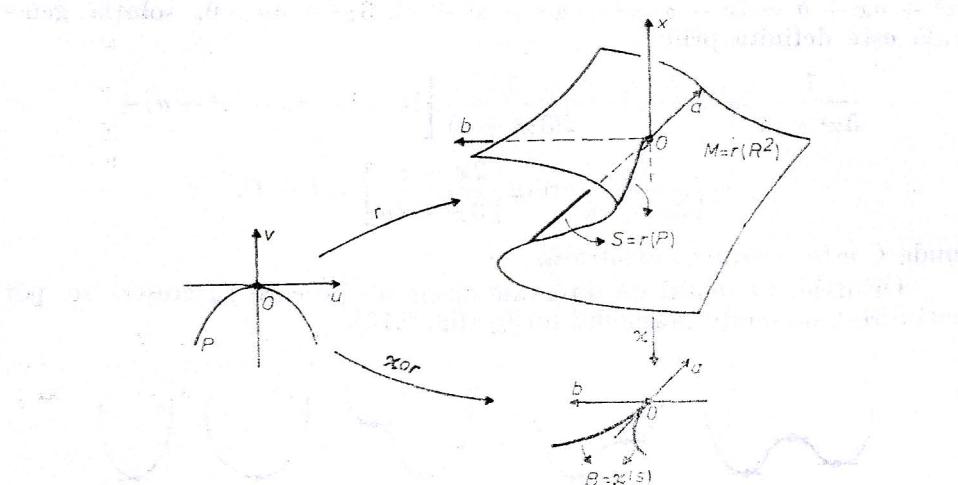


Fig. 5.11

Să analizăm numărul punctelor de echilibru și soluția generală a ecuației diferențiale (6) în funcție de parametrii  $a$  și  $b$ . În acest sens facem apel la faptul că ecuația  $x^3 + ax + b = 0$  are întotdeauna o soluție reală (ecuație de gradul trei în  $x$ ) și natura rădăcinilor sale este dată de semnul discriminantului  $D = 4a^3 + 27b^2$ . Va rezulta că numărul punctelor de echilibru se schimbă la trecerea prin multimea bifurcație.

Dacă  $D < 0$ , adică  $(a, b)$  aparține regiunii I din fig. 5.12, atunci ecuația diferențială (6) admite trei puncte de echilibru, fie acestea  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_3 = \gamma$ . Soluția generală este definită prin

$$|x - \alpha|^{\gamma - \beta} |x - \beta|^{\alpha - \gamma} |x - \gamma|^{\beta - \alpha} = \\ = C e^{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde  $C$  este constanta arbitrară.

Fie  $D = 0$  și  $a \neq 0$  sau  $b \neq 0$ , adică  $(a, b) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Ecuația în  $x$  are trei rădăcini reale, una fiind dublă; ecuația diferențială (6) admite două puncte de echilibru  $x_1 = x_3 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$ , iar soluția generală este definită prin

$$-\frac{1}{\alpha - \beta} \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \ln|x - \alpha| + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \ln|x - \beta| = t + C, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde  $C$  este constanta arbitrară.

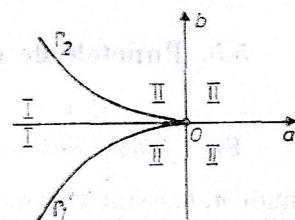


Fig. 5.12

Dacă  $D = 0$  și  $a = 0, b = 0$ , atunci  $x = 0$  este un punct de echilibru triplu, iar soluția generală a ecuației (6) este definită prin  $-\frac{1}{2x^2} = t + C$ ,  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-C\}$ , unde  $C$  este constanta arbitrară.

Pentru  $D > 0$ , adică pentru  $(a, b)$  aparținând regiunii II din fig. 5.12 ecuația diferențială (6) are un singur punct de echilibru  $x_1 = \alpha$ . Deoarece  $x^3 + ax + b = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2 + a)$ ,  $3\alpha^2 + 4a > 0$ , soluția generală este definită prin

$$\begin{aligned} \frac{1}{3\alpha^2 + a} \ln|x - \alpha| - \frac{1}{2(3\alpha^2 + a)} \left[ \ln(x^2 + \alpha x + \alpha^2 + a) + \right. \\ \left. + \frac{3\alpha}{\sqrt{3\alpha^2 + 4a}} \arctg \frac{2x + \alpha}{\sqrt{3\alpha^2 + 4a}} \right] = t + C, \end{aligned}$$

unde  $C$  este constanta arbitrară.

Orbitele (în sensul de intervale orientate pe care  $f_{ab}$  crește) se pot cize direct pe schița graficului lui  $f_{ab}$  (fig. 5.13).

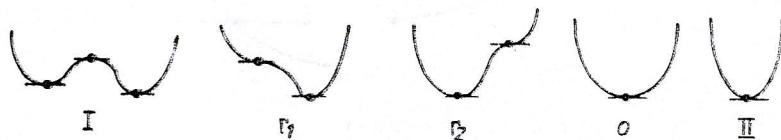


Fig. 5.13

Fie  $x_0$  un punct de echilibru. Rezultă  $\frac{d^2}{dx^2} f_{ab}(x) = 3x^2 + a$ . Astfel ipoteza  $3x_0^2 + a < 0$  implică stabilitatea asimptotică și deci stabilitatea punctului de echilibru  $x_0$  (cercetează 5.1 și fig. 5.11).

## 5.5. Punctele de echilibru ale gradientului rindunicii

Fie *potențialul rindunică*  $x \rightarrow f_{abc}(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$ ,

unde  $a, b, c$  sunt parametri reali. Liniile de gradient ale rindunicii sunt soluțiile ecuației diferențiale cu variabile separabile

$$\frac{dx}{dt} = x^4 + ax^2 + bx + c \quad (7)$$

Mulțimea de echilibru  $M : x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ , coincide cu imaginea hărții  $r : x = u, a = v, b = w, c = -u^4 - vu^2 - wu$ ,  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ , și este o hipersuprafață riglată în  $\mathbb{R}^4$ . Notând cu  $\chi$  aplicația catastrofă, funcția  $\chi \circ r$  este definită prin  $\chi \circ r(u, v, w) = (v, w, -u^4 - vu^2 - wu)$ . Jacobianul lui  $\chi \circ r$  este

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4u^3 - 3vu - w & -u^2 & -u \end{vmatrix} = -(4u^3 + 2vu + w) = -\frac{d^2 f_{abc}}{dx^2} \Big|_{\substack{x=u \\ a=v \\ b=w}}. \text{ Aceasta}$$

pune în evidență că punctele suprafetei riglate  $\Sigma : 4u^3 + 2vu + w = 0$  din spațiul  $Ouvw$  sunt puncte singulare ale lui  $\chi \circ r$ . Alura lui  $\Sigma$  este aceeași cu alura varietății catastrofă din fig. 5.11. Multimea singularităților  $S$  are ecuațiile  $x = u, a = v, b = w, c = -u^4 - vu^2 - wu, 4u^3 + 2vu + w = 0$ , adică  $S$  este o suprafață (varietate de dimensiune 2) riglată în  $\mathbb{R}^4$  de ecuații parametrice  $x = u, a = v, b = -4u^3 - 2vu, c = 3u^4 + vu^2$ . Multimea bifurcație  $B$  este imaginea aplicației  $a = v, b = -4u^3 - 2vu, c = 3u^4 + vu^2, (u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Deoarece rangul matricei jacobian atașate acestei aplicații este 1 dacă și numai dacă  $6u^2 + v = 0$ , în rest rangul fiind 2, rezultă că  $(-6u^2, 8u^3, -3u^4), u \in \mathbb{R}$ , sunt puncte singulare ale lui  $B$ , iar  $B \setminus \{(-6u^2, 8u^3, 3u^4), u \in \mathbb{R}\}$  este o suprafață în  $\mathbb{R}^3$  (această suprafață este și riglată).

Discutarea numărului de puncte de echilibru și explicitarea soluției generale în funcție de parametrii  $a, b, c$  sunt clare din punct de vedere teoretic, dar anevoieioase din punctul de vedere al calculelor analitice. De aceea le ocolim, punctând doar faptul că la trecerea prin  $B$  se schimbă numărul punctelor de echilibru.

Fie  $x_0$  un punct de echilibru și  $\frac{d^2 f_{abc}}{dx^2}(x_0) = 4x_0^3 + 2ax_0 + b$ . Dacă  $4x_0^3 + 2ax_0 + b < 0$ , atunci punctul de echilibru  $x_0$  este asimptotic stabil și deci stabil.

## 5.6. Punctele de echilibru ale gradientului fluturelui

Potențialul fluture este  $x \rightarrow f_{abcd}(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx$ ,

unde  $a, b, c, d$  sunt parametri reali și lui i se asociază ecuația diferențială cu variabile separabile

$$\frac{dx}{dt} = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (8)$$

Multimea de echilibru  $M : x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  este o hipersuprafață riglată în  $\mathbb{R}^5$ . Harta a cărei imagine acoperă pe  $M$  este  $(x, y, b, c) \rightarrow (x, y, b, c, -x^5 - ax^3 - bx^2 - cx)$ . Dacă  $\chi$  este aplicație catastrofă, atunci  $\chi \circ r(x, y, b, c) = (a, b, c, -x^5 - ax^3 - bx^2 - cx)$ . Funcția  $\chi \circ r$  are jacobianul

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5x^4 - 3ax^2 - 2bx - c & -x^3 & -x^2 & -x \end{vmatrix} = 5x^4 + 3ax^2 + 2bx + c = \frac{d^2}{dx^2} f_{abcd}(x)$$

Rezultă multimea singularităților  $S : x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, 5x^4 + 3ax^2 + 2bx + c = 0$  (varietate riglată de dimensiune 3 în  $\mathbb{R}^5$ )

și mulțimea bifurcație  $B : c = -5x^4 - 3ax^2 - 2bx, d = 4x^5 + 2ax^3 + bx^2$ . Dar, aplicației  $(x, y, b) \rightarrow (c, d)$  i se atașează matricea jacobiană

$$J = \begin{bmatrix} -20x^4 - 6ax^2 - 2b & -3x^2 & -2x \\ 20x^4 + 6ax^2 + 2bx & 2x^3 & x^2 \end{bmatrix},$$

având

$$\text{rang } J = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x = 0 \text{ și } b = 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \text{ și } b \neq 0 \\ 2 & \text{pentru } x \neq 0 \text{ și } b \text{ oarecare.} \end{cases}$$

De aceea elementele mulțimii  $\{(a, b, 0, 0) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  sunt puncte singulare ale lui  $B$ , iar  $B \setminus \{(a, b, 0, 0) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  este o hipersuprafață (riglată) în  $\mathbb{R}^4$ .

Deși teoretic evidente, discutarea numărului de puncte de echilibru și explicitarea soluției generale în funcție de parametrii  $a, b, c$  sînt greoai din punctul de vedere al calculelor. Catastrofa apare la trecerea prin  $B$ , deoarece în acest moment se schimbă numărul punctelor de echilibru.

Fie  $x_0$  un punct de echilibru și  $\frac{d^2f_{abcd}}{dx^2}(x_0) = 5x_0^4 + 3ax_0^2 + 2bx_0 + c < 0$ . Atunci punctul de echilibru  $x_0$  este asimptotic stabil și deci stabil.

## 5.7. Punctele de echilibru ale gradientului omobilicului eliptic

Potențialul omobilic eliptic este  $(x, y) \rightarrow f_{abc}(x, y) = x^3 - 3xy^2 + a(x^2 + y^2) + bx + cy$ , unde  $a, b, c$  sunt parametri reali. Acestuia i se atașează sistemul potențial

$$\frac{dx}{dt} = 3x^2 - 3y^2 + 2ax + b, \quad \frac{dy}{dt} = -6xy + 2ay + c \quad (9)$$

Mulțimea de echilibru  $M : 3x^2 - 3y^2 + 2ax + b = 0, -6xy + 2ay + c = 0$  este acoperită în întregime de imaginea hărții  $(x, y, a) \rightarrow (x, y, a, 3(y^2 - x^2) - 2ax, 6xy - 2ay)$ . Astfel  $M$  este o varietate riglată de dimensiunea 3 în  $\mathbb{R}^5$ .

Notăm prin  $\chi$  aplicația catastrofă. Atunci funcția  $\chi \circ r$  este definită prin  $\chi \circ r(x, y, a) = (a, 3(y^2 - x^2) - 2ax, 6xy - 2ay)$ . Acesteia i se atașează jacobianul

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6x - 2a & 6y & -2x \\ 6y & 6x - 2a & -2y \end{vmatrix} = 4[a^2 - 9(x^2 + y^2)].$$

Astfel punctele conului circular drept  $\Sigma : x^2 + y^2 = \frac{a^2}{9}$  (fig. 5.14) sunt punctele singulare ale lui  $\chi \circ r$ .

Mulțimea  $S$  a singularităților lui  $\chi$  are ecuațiile carteziene implite  $3(x^2 - y^2) + 2ax + b = 0$ ,  $-6xy + 2ay + c = 0$ ,  $x^2 + y^2 = a^2/9$ . Deoarece gradienții  $(6x + 2a, -6y, 2x, 1, 0)$ ,  $(-6y, -6x + 2a, 2y, 0, 1)$ ,  $(2x, 2y - 2a/9, 0, 0)$  sunt liniar independenți în fiecare punct al lui  $S$  în afară de  $(0, 0, 0, 0, 0)$ , rezultă că  $S \setminus \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$  este o varietate diferențială de dimensiune 2 în  $\mathbb{R}^5$ .

Să privim acum conul circular drept  $\Sigma$ :  $x^2 + y^2 = a^2/9$  ca fiind imaginea aplicației

$$(a, \theta) \rightarrow \left( \frac{a}{3} \cos \theta, \frac{a}{3} \sin \theta, a \right),$$

$(a, \theta) \in \mathbb{R}^2$ . Atunci mulțimea bifurcație  $B$  este caracterizată prin ecuațiile

$$b = -\frac{a^2}{3} (\cos 2\theta + 2 \cos \theta), \quad c = \frac{a^2}{3} (\sin 2\theta - 2 \sin \theta).$$

Jacobianul atașat aplicației  $(a, \theta) \rightarrow (b, c)$  are expresia  $\frac{4a^3}{9}(1 - \cos 3\theta)$ .

De aceea punctele pentru care  $a = 0$  (originea) sau  $\cos 3\theta = 1$ , adică  $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ , sunt puncte singulare ale lui  $B$ . Restul mulțimii  $B$  este o suprafață în  $\mathbb{R}^3$ .

Punctele de echilibru ale sistemului diferențial (9) sunt generate de intersecțiile a două familii de hiperbole  $\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - y^2 - \frac{a^2 - 3b}{9} = 0$ , respectiv  $-6xy + 2ay + c = 0$ . Dacă  $(x_0, y_0)$  este un punct de echilibru, atunci sistemul diferențial liniar asociat lui (9) este

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (6x_0 + 2a)(x - x_0) - 6y_0(y - y_0), \quad \frac{dy}{dt} = -6y_0(x - x_0) + \\ &\quad + (-6x_0 + 2a)(y - y_0). \end{aligned} \quad (9')$$

Matricea simetrică asociată acestui sisteme are ecuația caracteristică  $\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$ , unde  $\beta = 4a$ ,  $\gamma = 4a^2 - 36x_0^2 - 36y_0^2$ . Valorile proprii  $\lambda_1 = 2a + 6\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ,  $\lambda_2 = 2a - 6\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  ale acestei matrice sunt reale și li se asociază întotdeauna doi vectori proprii liniar independenți.

Punctul de echilibru  $(x_0, y_0)$  al sistemului diferențial (9') poate fi atrator, nod propriu, nod impropriu sau punct să. În ceea ce privește stabilitatea acestui punct de echilibru sunt adevărate următoarele propozitii :

- 1) dacă  $a > 0$ ,  $a^2 - 9(x_0^2 + y_0^2) > 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  este un nod instabil;
- 2) dacă  $a < 0$ ,  $a^2 - 9(x_0^2 + y_0^2) > 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  este un nod (stabil și) asimptotic stabil;

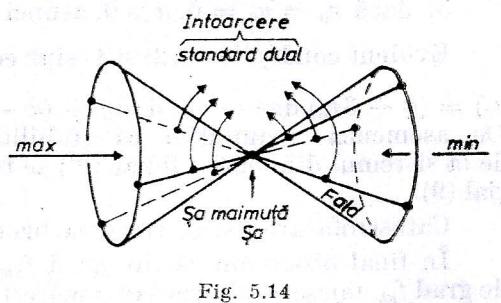


Fig. 5.14

3) dacă  $a^2 - 9(x_0^2 + y_0^2) < 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  este un punct să (instabil);

4) dacă  $x_0 = y_0 = 0, a < 0$ , atunci  $(0, 0)$  este un nod propriu (stabil și asimptotic stabil);

5) dacă  $x_0 = y_0 = 0, a > 0$ , atunci  $(0, 0)$  este un nod propriu instabil.

Evident condițiile din 2) și 4) sunt echivalente cu faptul că  $\frac{1}{2} d^2 f_{abc}(x_0, y_0) = (a + 3x_0) dx^2 - 6y_0 dxdy + (a - 3x_0) dy^2$  este negativ definită. De asemenea reamintim că stabilitatea asimptotică și instabilitatea de la sistemul diferențial liniar (9') se transferă la sistemul diferențial initial (9).

Catastrofa are loc la trecerea prin mulțimea bifurcație.

În final observăm că  $\text{div grad } f_{abc} = 4a$ . De aceea currentul generat de grad  $f_{abc}$  mărește aria sau o mărește după cum  $a < 0$ , respectiv  $a > 0$ . Currentul păstrează aria dacă  $a = 0$ .

## 5.8. Punctele de echilibru ale gradientului ombilicului hiperbolic

*Potențialul ombilic hiperbolic* este  $(x, y) \rightarrow f_{abc}(x, y) = x^3 + y^3 + axy + bx + cy$ , unde  $a, b, c$  sunt parametri reali. Acestuia îi corespunde sistemul potențial

$$\frac{dx}{dt} = 3x^2 + ay + b, \quad \frac{dy}{dt} = 3y^2 + ax + c. \quad (10)$$

Mulțimea de echilibru  $M : 3x^2 + ay + b = 0, 3y^2 + ax + c = 0$ , este o varietate riglată de dimensiune 3 în  $\mathbb{R}^5$ . Ea se confundă cu imaginea hărții  $(x, y, a) \rightarrow (x, y, a, -3x^2 - ay, -3y^2 - ax)$ .

Dacă  $\chi$  este aplicația catastrofă, atunci jacobianul lui  $\chi \circ r$  are expresia

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6x & -a & -y \\ -a & -6y & -x \end{vmatrix} = 36xy - a^2.$$

Aștfel mulțimea punctelor singulare ale lui  $\chi \circ r$  este conul  $\Sigma : 36xy = a^2$ .

Mulțimea singularităților lui  $\chi$  este  $S : 3x^2 + ay + b = 0, 3y^2 + ax + c = 0, 36xy = a^2$ . Deoarece gradienții  $(6x, a, y, 1, 0), (a, 6y, x, 0, 1), (36y, 36x, -2a, 0, 0)$  sunt liniar independenti în fiecare punct al lui  $S$  exceptând punctul  $(0, 0, 0, 0, 0)$ , rezultă că  $S \setminus \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$  este o varietate diferențială de dimensiune 2 în  $\mathbb{R}^5$ . Mulțimea bifurcație este  $B = \chi(S) = \{(a, b, c) | a = \pm 6\sqrt{xy}, b = -3x^2 \mp 6\sqrt{xy}, y, c = -3y^2 \mp \sqrt{xy}x\}$ . Exceptând punctele singulare (punctele în care  $a, b, c$  nu sunt diferențiable și punctele în care matricea jacobian asociată nu are rangul doi), restul din  $B$  este o suprafață în  $\mathbb{R}^3$ .

Punctele de echilibru ale sistemului (10) sunt generate de intersecțiile familiilor de parabole  $3x^2 + ay + b = 0$  (cu axa verticală) și  $3y^2 + ax + c = 0$  (cu axa orizontală). Notind cu  $(x_0, y_0)$  un punct de echilibru,

găsim sistemul diferențial liniar asociat

$$\frac{dx}{dt} = 6x_0(x - x_0) + a(y - y_0), \quad \frac{dy}{dt} = a(x - x_0) + 6y_0(y - y_0). \quad (10')$$

Matricea sistemului (10') este simetrică. De aceea ea admite valori proprii reale și este diagonalizabilă. Din ecuația caracteristică  $\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$ ,  $\beta = 6(x_0 + y_0)$ ,  $\gamma = 36x_0y_0 - a^2$ , găsim valorile proprii

$$\lambda_1 = 3(x_0 + y_0) + \sqrt{9(x_0 - y_0)^2 + a^2}, \quad \lambda_2 = 3(x_0 + y_0) - \sqrt{9(x_0 - y_0)^2 + a^2}.$$

Punctul de echilibru  $(x_0, y_0)$  al sistemului (10') poate fi atrator, nod propriu, nod impropriu sau punct să, având una din comportările următoare :

1) dacă  $x_0 + y_0 > 0$ ,  $36x_0y_0 - a^2 > 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  este nod instabil ;

2) dacă  $x_0 + y_0 < 0$ ,  $36x_0y_0 - a^2 > 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  este nod (stabil și) asymptotic stabil ;

3) dacă  $36x_0y_0 - a^2 < 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  este un punct să (instabil) ;

4) dacă  $x_0 = y_0 < 0$ ,  $a = 0$ , atunci  $(x_0, x_0)$  este un nod propriu (stabil și) asymptotic stabil ;

5) dacă  $x_0 = y_0 > 0$ ,  $a = 0$ , atunci  $(x_0, x_0)$  este un nod propriu instabil.

Condițiile din 2) și 4) sunt echivalente cu faptul că  $\frac{1}{2} d^2 f_{abc}(x_0, y_0) =$

$= 3x_0 dx^2 + adxdy + 3y_0 dy^2$  este negativ definită. Ele implică stabilitatea asymptotică a poziției de echilibru  $(x_0, y_0)$  a sistemului diferențial (10). Condițiile 1), 3), 5) respectiv implică instabilitate aceleiași poziții de echilibru.

Catastrofa are loc la trecerea prin mulțimea bifurcație.

Se observă că div grad  $f_{abc} = 6(x + y)$ . Cu alte cuvinte, curentul generat de grad  $f_{abc}$  măreștează aria în semiplanul  $x + y < 0$  și mărește aria în semiplanul  $x + y > 0$ .

## 5.9. Punctele de echilibru ale gradientului ombilicului parabolic

Considerăm potențialul ombilic parabolic  $(x, y) \rightarrow f_{abcd}(x, y) = x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy$ , unde  $a, b, c, d$  sunt parametri reali. Sistemul potențial corespunzător este

$$\frac{dx}{dt} = 2xy + 2ax + c, \quad \frac{dy}{dt} = 4y^3 + x^2 + 2by + d. \quad (11)$$

Mulțimea de echilibru  $M : 2xy + 2ax + c = 0, 4y^3 + x^2 + 2by + d = 0$  este o varietate riglată de dimensiune 4 în  $\mathbb{R}^6$ . Ea este acoperită de imaginea hărții  $(x, y, a, b) \rightarrow (x, y, a, b, -2xy - 2ax, -4y^3 - x^2 - 2by)$ .

Fie  $\chi$  aplicația catastrofă. Funcția  $\chi \circ r(x, y, a, b) = (a, b, -2xy - 2ax, -4y^3 - x^2 - 2by)$  are jacobianul  $6y^3 + 6ay^2 + by + ab - x^2$ . Rezultă că mulțimea punctelor singulare ale lui  $\chi \circ r$  este  $\Sigma : 6y^3 + 6ay^2 + by +$

$\dot{x} + ab - x^2 = 0$ , iar multimea singularităților lui  $\chi$  este  $S = M \cap \Sigma$ . Rezultă  $B = \chi(S)$ .

Fie  $(x_0, y_0)$  un punct de echilibru. Sistemul diferențial liniar corespunzător acestui punct de echilibru este

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2(y_0 + a)(x - x_0) + 2x_0(y - y_0), \quad \frac{dy}{dt} = 2x_0(x - x_0) + \\ &\quad + 2(6y_0^2 + b)(y - y_0). \end{aligned} \quad (11')$$

Ecuatia caracteristică a matricei sistemului (11'),  $\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$ , cu  $\beta = 2(6y_0^2 + y_0 + a + b)$ ,  $\gamma = 4(6y_0^3 + 6ay_0^2 + by_0 - x_0^2 + ab)$ , are soluțiile reale  $\lambda_{1,2} = 6y_0^2 + y_0 + a + b \pm \sqrt{4x_0^2 + (6y_0^2 - y_0 - a + b)^2}$ . Matricea sistemului (11') este diagonalizabilă, fiind o matrice simetrică.

Punctul de echilibru  $(x_0, y_0)$  al sistemului diferențial liniar (11') poate fi atrator, nod propriu, nod impropriu sau punct să :

1) dacă  $6y_0^2 + y_0 + a + b > 0$ ,  $6y_0^3 + 6ay_0^2 + by_0 - x_0^2 + ab > 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  este un nod instabil;

2) dacă  $6y_0^2 + y_0 + a + b < 0$ ,  $6y_0^3 + 6ay_0^2 + by_0 - x_0^2 + ab > 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  este un nod (stabil și) asimptotic stabil;

3) dacă  $6y_0^3 + 6ay_0^2 + by_0 - x_0^2 + ab < 0$ , atunci  $(x_0, y_0)$  este un punct să (instabil);

4) dacă  $x_0 = 0$ ,  $6y_0^2 - y_0 - a + b = 0$ ,  $6y_0^3 + y_0 + a + b < 0$ , atunci  $(0, y_0)$  este un nod propriu (stabil și) asimptotic stabil;

5) dacă  $x_0 = 0$ ,  $6y_0^2 - y_0 - a + b = 0$ ,  $6y_0^3 + y_0 + a + b > 0$ , atunci  $(0, y_0)$  este un nod propriu instabil.

Condițiile de stabilitate asimptotică sunt echivalente cu faptul că  $\frac{1}{2}d^2f_{abcd}(x_0, y_0) = (y_0 + a)dx^2 + 2x_0dxdy + (6y_0^2 + b)dy^2$  este negativ definită. Stabilitatea asimptotică (instabilitatea) pentru sistemul (11') implică stabilitatea asimptotică (instabilitatea) pentru sistemul (11).

Relația  $\text{div grad } f_{abcd} = 2(6y^2 + y + a + b)$  permite să facem comentarii despre curentul generat de grad  $f_{abcd}$ .

Fie  $a + b \leq 1/24$ . Pentru  $y \in \left(-\frac{-1 - \sqrt{1 - 24(a+b)}}{12}, \frac{-1 + \sqrt{1 - 24(a+b)}}{12}\right)$  curentul mărește aria, iar pentru  $y \in \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{1 - 24(a+b)}}{12}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - 24(a+b)}}{12}, \infty\right)$  curentul mărește aria. Dacă  $a + b > 1/4$ , atunci curentul mărește aria.

## 5.10. Probleme propuse

- Care este direcția creșterii celei mai rapide a funcției  $f(x, y, z) = x\sin z - y\cos z$  în  $(0, 0, 0)$ ?
- Să se găsească punctele în care gradientul cîmpului scalar  $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$  este egal cu  $\mathbf{i} - \frac{16}{9}\mathbf{j}$ .

**3. Fie cîmpurile scalare**

$$f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + 6y^2x + 5y^3, x > 0, y > 0,$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Să se determine curentul generat de grad  $f$  și să se arate că acesta mărește volumul.

**I n d i c a ț i e.** Cîmpuri scalare convexe.

**4.** Se dă cîmpul scalar  $f(x) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{-1}$ . Să se determine regiunile din  $\mathbb{R}^n$  pe care curentul generat de grad  $f$  micșorează sau mărește volumul.

**R.** Se calculează  $d^2f$ ;  $x < 0$ , dilatație;  $x > 0$ , contracție.

**5.** Se consideră sistemele diferențiale potențiale asociate următoarelor cîmpuri scalare:

$$f(x, y) = xy(a - x - y), f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy;$$

$$f(x, y) = (2ax - x^2)(2by - y^2), f(x, y) = (a + bx + cy)/\sqrt{1 + x^2 + y^2};$$

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y), 0 \leq x \leq \pi/4, 0 \leq y \leq \pi/4;$$

$$f(x, y) = x^3y^2(12 - x - y), x > 0, y > 0.$$

În fiecare caz, să se determine punctele de echilibru și să se cerceteze stabilitatea acestor puncte.

**6.** Se dau cîmpurile scalare  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x + y$  și  $g(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$ . Să se determine liniile de cea mai rapidă descreștere și apoi punctele de minim.

**7.** Se dau cîmpurile scalare  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ,  $g(x, y) = x^3 + y^3$ ,  $h(x, y) = x^2y + y^4$ . Să se determine liniile de gradient. Să se traseze curbele de nivel constant și liniile de gradient pentru fiecare caz în parte.

**8.** Să se traseze curbele de nivel constant și liniile de gradient pentru ombilicul eliptic, ombilicul hiperbolic și, respectiv, ombilicul parabolic.

**I n d i c a ț i e.** Fie  $(x_0, y_0)$  un punct de echilibru care aparține curbei de nivel constant  $f_{abc}(x, y) = \alpha$ . Se utilizează dezvoltarea Taylor a lui  $f_{abc}$  în vecinătatea lui  $(x_0, y_0)$ . Intersectând cu dreapta  $y - y_0 = t(x - x_0)$ , se obțin ecuații parametrice ale curbei de nivel constant.

**9.** Se consideră hamiltonianul  $H(p, q) = \frac{1}{2} \sum q_k^2 + V(p)$ . Să se cerceteze completitudinea cîmpului vectorial hamiltonian asociat lui  $H$  în cazurile în care  $V$  este faldul, întoarcerea, rîndunica, fluturele, ombilicul eliptic, ombilicul hiperbolic și, respectiv, ombilicul parabolic.

**I n d i c a ț i e.** Vezi teoremele din 3.6.3.7.

**10.** Fie  $V$  potențialul electrostatic într-un dielectric omogen de permisivitate  $\epsilon$ . Să se determine intensitatea cîmpului electric și distribuția sarcinii electrice în cazurile în care  $V$  este faldul, întoarcerea, rîndunica, fluturele, ombilicul eliptic, ombilicul hiperbolic și, respectiv, ombilicul parabolic.

**I n d i c a ț i e.**  $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ ,  $k\rho_v = \epsilon \text{ div } \mathbf{E}$ .

**11.** Să se arate că liniile de gradient ale unei funcții  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietatea  $\|\text{grad } f\| = 1$ , sint drepte.

## 6. HIPERSUPRAFETE DE CÎMP

Curentul determinat pe un domeniu de un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  conservă hipersuprafetele generate de liniile de cîmp. Aceste hipersuprafețe se numesc hipersuprafețe de cîmp (v. 6.1).

În termodinamică, în teoria spațiilor Finsler și în alte ramuri aplicate sau teoretice ale științei unele concepții sunt prezentate cu ajutorul funcțiilor omogene. Funcțiile omogene de clasă  $C^1$  sunt soluții ale ecuațiilor Euler. Funcțiile omogene de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$  sunt polinoame omogene (v. 6.2).

Curenții generați pe  $\mathbb{R}^n$  de cîmpurile vectoriale paralele lasă invariante hipersuprafețe cilindrice, iar curenții generați pe  $\mathbb{R}^n$  de cîmpurile vectoriale concurente lasă invariante hipersuprafețe conice (v. 6.3). Curenții atașați cîmpurilor vectoriale Killing lasă invariante hipersuprafețe de rotație (v. 6.4).

Orice cîmp vectorial  $\mathbf{X}$  poate fi privit ca un operator liniar (v. 1.5) și în acest context vorbim despre  $\text{Ker } \mathbf{X}$ ,  $\text{Im } \mathbf{X}$ , valori și vectori proprii ale lui  $\mathbf{X}$  etc. Proprietățile lui  $\mathbf{X}$  ce țin de faptul că este un operator liniar sunt strâns legate de proprietățile globale ale curentului generat de  $\mathbf{X}$  (v. 6.5).

În cazurile în care soluțiile problemelor Cauchy atașate ecuațiilor liniare cu derivate parțiale de ordinul întâi nu se pot explicita prin formule se poate face apel la o metodă numerică de calcul, cea mai cunoscută fiind metoda rețelei (v. 6.6).

Capitolul se încheie cu problemele propuse în 6.7, care concretizează unele dintre noțiunile teoretice, cerind soluții generale ale unor ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi, soluții ale unor probleme Cauchy, determinarea unor hipersuprafețe de cîmp, proprietăți ale funcțiilor omogene, valori și vectori proprii ale unor cîmpuri vectoriale și soluții aproximative ale unor probleme Cauchy.

### 6.1. Ecuații liniare cu derivate parțiale de ordinul întâi

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Fie  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  un cîmp scalar de clasă  $C^1$  și  $M : f(x) = c$  o hipersuprafață de nivel constant  $c$ , atașată lui  $f$ . Dacă restricția lui  $\mathbf{X}$  la  $M$  este un cîmp vectorial tangent la  $M$  (fig. 6.1), adică  $(\mathbf{X}, \text{grad } f) = 0$  sau  $D_x f = 0$ , atunci  $M$  se numește *hipersuprafață de cîmp a lui  $\mathbf{X}$* .

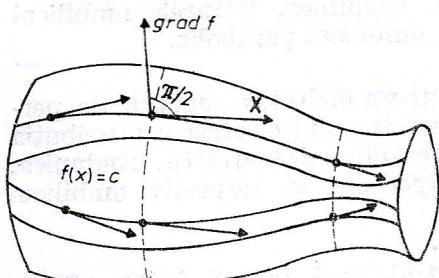


Fig. 6.1

Hipersuprafețele de cîmp asociate cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  sunt caracterizate prin ecuația liniară omogenă

cu derivate parțiale de ordinul întâi,

$$X_1(x) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + X_n(x) \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0, \quad (1)$$

în sensul că acestea se identifică cu mulțimi de nivel constant atașate soluțiilor  $f$  ale acestei ecuații.

Evident, două cîmpuri vectoriale coliniare au aceleasi hipersuprafețe de cîmp, dacă lăsăm de o parte hipersuprafața de nivel constant zero atașată factorului de coliniaritate.

O hipersuprafață de cîmp mai poate fi privită și ca o hipersuprafață generată de linii de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$ . Se știe însă că liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  sunt soluții ale sistemului simetric

$$\frac{dx_1}{X_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x)}, \quad (2)$$

numit *sistemul caracteristic* atașat ecuației (1).

Parafrâzind definiția și proprietățile integralelor prime, rezultă :

— Orice integrală primă a sistemului (2) este o soluție a ecuației (1) și, reciproc, orice soluție a ecuației (1) este o integrală primă a sistemului (2).

— Fie  $f_1, \dots, f_{n-1}$  cele  $n-1$  integrale prime funcțional independente definite de sistemul (2) într-o vecinătate  $U$  a unui punct  $x_0 \in D$  în care  $X(x_0) \neq 0$ . O funcție  $f$  de clasă  $C^1$  este o soluție a ecuației (1) pe  $U \subset D$  dacă și numai dacă ea este de tipul  $f = \Phi(f_1, \dots, f_{n-1})$ . Cu alte cuvinte soluția generală a ecuației (1) este o funcție arbitrară de clasă  $C^1$  de cele  $n-1$  integrale prime funcțional independente ale sistemului (2).

Aceste considerații împreună cu faptul că dacă  $f_1, \dots, f_{n-1}$  sunt integrale prime funcțional independente ale sistemului (2), atunci soluția generală a sistemului se poate scrie în forma

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = c_{n-1},$$

conduc la următoarele concluzii :

— pentru găsirea soluției generale a ecuației (1) este suficient să determinăm soluția generală a sistemului (2);

— pentru obținerea soluției generale a sistemului (2) este suficient să găsim  $n-1$  soluții funcțional independente ale ecuației (1).

Integralele prime sunt funcții invariante față de curentul generat de cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$ . De aceea hipersuprafețele de cîmp ale cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  sunt hipersuprafețe invariante față de curentul generat de  $\mathbf{X}$ .

**Aplicația 6.1.** Să găsim soluția generală a ecuației

$$yz \frac{\partial f}{\partial x} + zx \frac{\partial f}{\partial y} + xy \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Atășăm sistemul  $\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}$ . Mai întii observăm că axele de coordonate

$Ox, Oy, Oz$  sunt constituite numai din zerouri ale cîmpului vectorial  $\mathbf{X}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$  și deci punctele reuniunii  $Ox \cup Oy \cup Oz$  sunt puncte de echilibru. Apoi găsim combinațiile integrabile  $adx - ydy = 0$ ,  $xdx - zdz = 0$  și deci soluția generală a sistemului simetric asociat este

$x^2 - y^2 = C_1$ ,  $x^2 - z^2 = C_2$ . Rezultă că soluția generală a ecuației este definită prin

$$f(x, y, z) = \Phi(x^2 - y^2, x^2 - z^2),$$

unde  $\Phi$  este o funcție arbitrară de clasă  $C^1$ , iar suprafețele de cimp ale lui  $\mathbf{X}$  au ecuațiile carteziene implicate  $\Phi(x^2 - y^2, x^2 - z^2) = \text{const.}$

**O b s e r v a t i i.** 1) Fie  $M_c : f(x) = c$  familia hipersuprafețelor de cimp ale cimpului vectorial  $\mathbf{X}$ . Dacă  $\mathbf{X}$  este un cimp potential, adică  $\mathbf{X} = \text{grad } \varphi$ , atunci hipersuprafețele de cimp  $M_c$  sunt ortogonale hipersuprafețelor echipotențiale  $N_c : \varphi(x) = c$ . Mai general, dacă  $\mathbf{X}$  este un cimp vectorial biscalar, adică  $\mathbf{X} = \Psi \text{grad } \varphi$ , atunci hipersuprafețele de cimp  $M_c$  diferite de  $M : \Psi(x) = 0$  sunt ortogonale hipersuprafețelor  $N_c : \varphi(x) = c$ . Aceste afirmații rezultă din faptul că relația  $(\mathbf{X}, \text{grad } f) = 0$  se reduce la  $(\text{grad } \varphi, \text{grad } f) = 0$ .

2) Presupunem că  $\mathbf{X}$  este un cimp vectorial torsional, adică  $D_Z \mathbf{X} = aZ + (\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\mathbf{X}$ ,  $\forall Z$ . În particular,  $D_X \mathbf{X} = b\mathbf{X}$ , unde  $b = a + (\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ . Cimpul torsional  $\mathbf{X}$  îi atașăm ecuația  $D_X f = (\mathbf{X}, \text{grad } f) = 0$ . Derivind în ambele părți în raport cu cimpul torsional  $\mathbf{X}$ , găsim  $(D_X \mathbf{X}, \text{grad } f) + (\mathbf{X}, D_X \text{grad } f) = 0$  și deci  $\text{Hess } f(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$ . Dacă  $\mathbf{X}$  nu este identic nul, atunci ultima relație arată că  $\text{Hess } f$  nu poate fi definită (pozitiv sau negativ).

Hipersuprafețele de cimp ale unui cimp vectorial torsional sunt hipersuprafețe riglate (v. 6.3). Această afirmație rezultă din faptul că liniile de cimp ale unui cimp vectorial torsional sunt porțiuni de drepte.

Fie  $f = \Phi(f_1, \dots, f_{n-1})$  soluția generală a ecuației (1) și  $M_c : \Phi(f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)) = c$  familia hipersuprafețelor de cimp.

**Problema Cauchy** pentru o ecuație de tipul (1) constă în determinarea hipersuprafeței de cimp care să conțină o subvarietație cu  $n-2$  dimensiuni  $\Gamma : g(x_1, \dots, x_n) = 0$ ,  $h(x_1, \dots, x_n) = 0$ . În anumite condiții problema Cauchy admite soluția unică [36]. Pentru cazurile particulare se observă că hipersuprafața căutată poate fi privită ca fiind generată de liniile de cimp determinate de sistemul (2),  $f_1(x) = c_1, \dots, f_{n-1}(x) = c_{n-1}$ , care întilnesc pe  $\Gamma$ . Ecuațiile  $f_1(x) = c_1, \dots, f_{n-1}(x) = c_{n-1}$ ,  $g(x) = 0$ ,  $h(x) = 0$  formează un sistem algebric de  $n+1$  ecuații cu  $n$  necunoscute  $x_1, \dots, x_n$ . Eliminând pe  $x_1, \dots, x_n$ , obținem condiția de compatibilitate  $\Phi(c_1, \dots, c_{n-1}) = 0$  și apoi, eliminând parametrii  $c_1, \dots, c_n$ , găsim hipersuprafața de cimp  $M : \Phi(f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)) = 0$ .

**Aplicația 6.2.** Se dă ecuația

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial x} + 2xy \frac{\partial f}{\partial y} + xz \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Să se determine suprafața de cimp care se sprijină pe cercul  $\Gamma : x = a$ ,  $y^2 + z^2 = a^2$ .

**Rezolvare.** Asociem sistemul simetric

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{xz}$$

și observăm că axa  $Oz$  este constituită din puncte de echilibru. Lăsând la o parte cazurile în care se anulează cel mult doi numitori, rezultă

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dz}{z}, \quad \frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{d(x-y)}{(x-y)^2},$$

de unde găsim familia liniilor de cimp

$$\frac{z^2}{y} = c_1, \quad \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{2}{c_2},$$

(domeniile de definiție ale integralelor prime nu sunt conexe). Integralele prime  $f_1 : \mathbb{R}^3 \setminus xOz \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x, y, z) = \frac{z^2}{y}$ ,  $f_2 : \mathbb{R}^3 \setminus (P \cup Q) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2(x, y, z) = \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}$ , unde  $P : x-y=0$ ,  $Q : x+y=0$ , sunt funcțional independente, deoarece matricea jacobiană

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{z^2}{y^2} & \frac{2z}{y} \\ -\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} & \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

are rang  $J = \begin{cases} 2 & \text{pentru } z \neq 0, \\ 1 & \text{pentru } z = 0. \end{cases}$

Condiția de compatibilitate a sistemului algebric

$$x = a, \quad y^2 + z^2 = a^2, \quad \frac{z^2}{y} = c_1, \quad \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{2}{c_2}$$

este  $c_1 = c_2$ . Deci  $M : y^2 + z^2 - x^2 = 0$  (un con cu virful în origine (fig. 6.2)).

*Ecuatiile liniare neomogene cu derive pariale de ordinul întâi* au forma

$$X_1(x, f) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n(x, f) \frac{\partial f}{\partial x_n} = F(x, f), \quad (3)$$

unde  $f$  este funcția necunoscută. În acest caz  $f$  se caută sub formă implicită  $\Phi(x, f(x)) = 0$ , ecuația (3) reducindu-se la o ecuație de tipul (1), căreia îi corespunde sistemul simetric

$$\frac{dx_1}{X_1(x, f)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x, f)} = \frac{df}{F(x, f)} \quad (4)$$

Se află soluția generală a acestui sistem, apoi soluția generală  $\Phi$  a ecuației liniare omogene corespunzătoare și din  $\Phi(x, f(x)) = 0$  rezultă  $f$ .

**O b s e r v a t i e.** Fie cimpul vectorial  $(X_1, \dots, X_n)$  și difeomorfismul  $x_{i'} = x_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Noile componente ale cimpului vectorial sint  $(X_1, \dots, X_{n'})$ ,

unde  $X_{i'} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_i} X_i$ . De aceea difeomorfismul de

îndreptare este fixat prin ecuațiile cu derive pariale

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_i} X_i = 0, \quad i' = 1', \dots, n'-1 \quad (\text{omogen})$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_{n'}}{\partial x_i} X_i = 1 \quad (\text{neomogen}).$$

Sistemul simetric atașat ecuației neomogene

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = -\frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx_{n'}}{1}$$

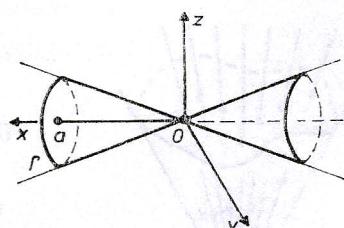


Fig. 6.2

arată că  $x_1, \dots, x_{n'-1}$  trebuie să fie integrale prime ale sistemului care determină liniile de cimp, iar  $x_n$  se poate determina și după procedeul din 3.2.

**Aplicația 6.3.** Considerăm ecuația

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = q(x), \quad (5)$$

unde  $q$  este o formă pătratică pozitiv (negativ) definită pe  $\mathbb{R}^n$ , iar  $A = [a_{ij}]$  este o matrice ale cărei valori proprii în  $\mathbb{C}$  au părțile reale strict negative. Vom arăta că această ecuație are o soluție unică  $x \rightarrow f(x)$  care este o formă pătratică negativ (pozitiv) definită pe  $\mathbb{R}^n$ .

Sistemul simetric asociat ecuației (5) este

$$\frac{dx_1}{\sum_j a_{1j}x_j} = \dots = \frac{dx_n}{\sum_j a_{nj}x_j} = \frac{df(x)(dx)}{q(x)} \quad (6)$$

și forma lui arată că ecuația (5) are soluție (v. 3.4 și observația 2) din 3.2). Înlocuind în (6) pe  $x$  cu  $tx$  și ținând seama de invarianta diferențială, găsim

$$\frac{df(tx)(dx)}{q(tx)} = \frac{dx_1}{\sum_j a_{1j}x_j} = \dots = \frac{dx_n}{\sum_j a_{nj}x_j} = \frac{d(tx_1)}{\sum_j a_{1j}(tx_j)} = \dots = \frac{d(tx_n)}{\sum_j a_{nj}(tx_j)} = \frac{df(tx)(dx)}{q(tx)}$$

iar egalitatea acestor rapoarte împreună cu  $g(tx) = t^2q(x)$  dau

$$df(tx)(dx) = tdf(x)(dx).$$

Aceasta înseamnă că  $x \rightarrow df(x)$  este o formă liniară în  $x$  și deci  $x \rightarrow f(x)$  este o formă pătratică.

Să cercetăm acum semnul lui  $f$ . Pentru aceasta notăm  $A = [a_{ij}]$ ,  $x = [x_1, \dots, x_n]$  și să considerăm sistemul diferențial liniar omogen

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (7)$$

Dacă  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  este o soluție a acestui sistem, atunci

$$\frac{d}{dt} f \circ \alpha = D_A \alpha' \circ \alpha = \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \circ \alpha.$$

Presupunem că  $q$  este pozitiv definită. Dacă  $f$  nu este negativ definită, atunci există un domeniu nevid  $V^+$  și prinț-ro teorema din 4.5 poziția de echilibru  $x = 0$  a sistemului diferențial liniar omogen (7) este instabilă. Acest rezultat contrazice ipoteza asupra valorilor proprii ale matricei  $A$ ; rămîne că  $f$  este negativ definită.

Unicitatea formei pătratice care satisfacă ecuația (5) se dovedește prin reducere la absurd.

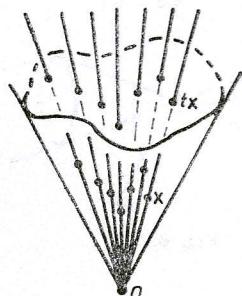


Fig. 6.3

## 6.2. Funcții omogene și ecuația Euler

O mulțime nevidă  $S$  de puncte din  $\mathbb{R}^n$  se numește *con cu vîrful în origine* dacă o dată cu punctul  $x$  conține și punctul  $tx$ , oricare ar fi  $t > 0$ . Cu alte cuvinte, mulțimea nevidă  $S$  este un con cu vîrful în origine (fig. 6.3) dacă și numai dacă o dată cu  $x$  conține întreaga semidreaptă care unește originea cu punctul  $x$ , cu excepția, eventual, a vîrfului (originii).

Fie  $S$  un con din  $\mathbb{R}^n$  cu virful în origine și  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție reală. Dacă există un număr real  $p$  astfel încât

$$f(tx) = t^p f(x), \quad \forall x \in S, \quad t > 0,$$

atunci  $f$  se numește *funcție omogenă*, iar  $p$  se numește *grad de omogenitate*.

Presupunem că originea aparține conului  $S$  și că funcția omogenă  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă în origine. Dacă  $p < 0$ , atunci  $f(x) = \lim_{t \searrow 0} t^{-p} f(tx) = 0$ ,

$\forall x \in S$ , adică  $f$  se reduce la constanta zero pe  $S$ ; dacă  $p = 0$ , atunci  $f(x) = \lim_{t \searrow 0} f(tx) = f(0)$ ,  $\forall x \in S$ , adică  $f$  este o constantă pe  $S$ ; dacă  $p > 0$ ,

atunci  $\lim_{t \searrow 0} f(tx) = \lim_{t \searrow 0} t^p f(x)$  implică  $f(0) = 0$ .

Observații. 1) Dacă  $p \in \mathbb{N}$  ( $p \in \mathbb{Z}$ , respectiv  $p \in (0, \infty)$ ), atunci definiția funcției omogene se extinde la  $t \in \mathbb{R}$  ( $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , respectiv  $t \in [0, \infty)$ ). Evident, domeniul de definiție trebuie să aibă proprietatea că o dată cu punctul  $x$  conține și punctul  $tx$ .

2) Dacă conul  $S$  cu virful în origine este o mulțime deschisă care nu conține toate punctele unei sfere cu centru în origine, atunci originea nu face parte din  $S$  (ci din frontieră  $\partial S$ ).

**Teoremă.** Presupunem că conul  $S$  cu virful în origine este o mulțime deschisă, iar funcția  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  este de clasă  $C^1$ . Funcția  $f$  este omogenă, având gradul de omogenitate  $p$ , dacă și numai dacă verifică ecuația Euler

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = p f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in S.$$

*Demonstrație.* Cazul  $p = 0$  il lăsăm pentru cititor. Presupunem că  $f$  este omogenă,  $f(tx) = t^p f(x)$   $t > 0$ , având gradul de omogenitate  $p \neq 0$ . Notăm  $u = tx$ , adică  $u_i = tx_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , și derivăm relația precedentă în raport cu  $t$ , ținând seama de formula de derivare a unei funcții compuse.

Găsim

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx) = p t^{p-1} f(x).$$

Punem  $t = 1$  și obținem ecuația Euler.

Reciproc, să presupunem că  $f$  satisfacă ecuația Euler,  $\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}(u) = p f(u)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$  cu  $p \neq 0$ . Punem  $u_i = tx_i$  și considerăm funcția

$$\Phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(t) = f(tx_1, \dots, tx_n)/t^p$$

Derivind în raport cu  $t$  și ținând seama de ecuația Euler, găsim

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \left[ t^p \left( x_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial u_n} \right) - p t^{p-1} f(tx_1, \dots, tx_n) \right] / t^{2p} = \\ &= \left[ u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial u_n} - p f(u) \right] / t^{p+1} = 0, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Rezultă  $\Phi(t) = \text{const} = \Phi(1) = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\forall t > 0$ , sau  $f(tx) = t^p f(x)$ , adică  $f$  este omogenă.

**Alternativă.** Ecuatia Euler  $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = pf(x)$  este o ecuatie liniara neomogenă cu deriveate parțiale de ordinul întii. Soluția găsită cu metoda prezentată în 6.1 se dovedește a fi o funcție omogenă.

**Teoremă.** Orice funcție de clasă  $C^\infty$  și omogenă pe  $\mathbb{R}^n$  este un polinom omogen.

**Demonstrație.** Fie  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^\infty$  omogenă, cu gradul de omogenitate  $p$ . Conform observațiilor de mai înainte, în mod necesar  $p \geq 0$ .

Fie  $n_0 > p$  un număr natural. Fiecare derivată parțială de ordinul  $n_0$  a lui  $f$  trebuie să fie identic nulă, deoarece aceasta este o funcție omogenă pe  $\mathbb{R}^n$ , având gradul de omogenitate  $p - n_0 < 0$ . Înținând seama de acest lucru și de formula Taylor, rezultă că  $f$  este un polinom, fie acesta de gradul  $m$ , care se scrie în forma  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_m$ , unde  $f_i$  este un polinom omogen de gradul  $i$  și  $f_m \neq 0$ . Omogenitatea împreună cu ipoteza  $f_m \neq 0$  implică  $p = m$  și  $f = f_m$  (adică  $f_0 = f_1 = \dots = f_{m-1} = 0$ ).

### 6.3. Hipersuprafețe cilindrice și conice

O hipersuprafață a lui  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , care poate fi generată prin mișcarea unui  $m$ -plan  $G$ ,  $m \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ , ce se sprijină pe o subvarietate  $\Gamma$  cu  $n-m-1$  dimensiuni, se numește *hipersuprafață riglată*;  $m$ -planul  $G$  se numește *generatoare*, iar subvarietatea  $\Gamma$  se numește *subvarietate directoare*.

Hipersuprafețele de cîmp ale cîmpurilor vectoriale torsionale sunt hipersuprafețe riglate (v. 6.1).

**Hipersuprafețe cilindrice.** Dacă generatoarea  $G$  se mișcă păstrîndu-și spațiul vectorial director, atunci hipersuprafața riglată se numește *hipersuprafață cilindrică*.

**Teoremă.** O hipersuprafață cilindrică este o hipersuprafață de cîmp a unui cîmp vectorial paralel și reciproc (fig. 6.4).

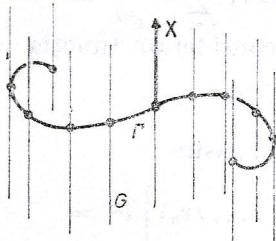


Fig. 6.4

**Demonstrație.** Presupunem că  $b_1, \dots, b_m$  sunt vectori ortogonali care generează spațiul vectorial director al lui  $G$ , iar  $b_{m+1}, \dots, b_n$  sunt vectori ortogonali care generează complementul ortogonal al lui  $G$  în  $\mathbb{R}^n$ . Multimea  $m$ -planeelor paralele cu  $G$  este reprezentată analitic prin

$$(x, b_{m+1}) = c_{m+1}, \dots, (x, b_n) = c_n, \\ (c_{m+1}, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (8)$$

Condiția ca  $m$ -planele (8) să se sprijine pe subvarietatea cu  $n-m-1$  dimensiuni

$$\Gamma: g_1(x) = 0, \dots, g_{n-m}(x) = 0 \quad (9)$$

se obține eliminând pe  $x = (x_1, \dots, x_n)$  între cele  $n+1$  ecuații (8) și (9). Se deduce  $\Phi(c_{m+1}, \dots, c_n) = 0$  și deci

$$\Phi((x, b_{m+1}), \dots, (x, b_n)) = 0. \quad (10)$$

Reciproc, se poate arăta că o hipersuprafață  $M$  a lui  $\mathbb{R}^n$  caracterizată printr-o ecuație de tipul (10) este o hipersuprafață cilindrică.

Considerăm funcția definită prin  $f(x) = \Phi((x, b_{m+1}), \dots, (x, b_n))$ . Notând  $u_\alpha = (x, b_\alpha)$ ,  $\alpha = m+1, \dots, n$ , găsim

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha} b_\alpha \text{ și deci } (b_1, \nabla f) = 0, \dots, (b_m, \nabla f) = 0,$$

adică  $f$  satisfacă un sistem de ecuații liniare omogene cu deriveate parțiale de ordinul întâi, ecuații ce sătăcează cîmpurilor vectoriale parallele  $X_1 = b_1, \dots, X_m = b_m$ .

Reciproc, dacă se dă un cîmp vectorial paralel  $X = (a_1, \dots, a_n)$ , atunci hipersuprafețele de cîmp sunt caracterizate prin  $M_c : f(x) = c$ , unde  $f$  este soluția generală a ecuației

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Deoarece sistemul caracteristic

$$\frac{dx_1}{a_1} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}$$

are soluția generală ( $a_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ipoteză impusă de procedură),

$$\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_n}{a_n} = c_1, \dots, \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} - \frac{x_n}{a_n} = c_{n-1},$$

rezultă

$$f(x) = \Phi\left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_n}{a_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} - \frac{x_n}{a_n}\right)$$

și deci  $M_c$  sunt hipersuprafețe cilindrice, generatoarea  $G$  fiind o dreaptă, iar  $\Gamma$  fiind o subvarietate cu  $n-2$  dimensiuni (fig. 6.4).

**Consecință.** Hipersuprafețele de cîmp ale unui cîmp vectorial coliniar cu unul paralel sunt hipersuprafețe cilindrice (se lasă deosebită hipersuprafața de nivel constant zero sătăcată factorului de coliniaritate).

**Hipersuprafețe conice.** Dacă generatoarea  $G$  se mișcă trecind printr-un  $(n-1)$ -plan fixat, atunci hipersuprafața riglată se numește hiper-suprafață conică, iar  $(n-1)$ -planul fixat se numește vîrf.

**Teoremă.** O hipersuprafață conică cu vîrful  $x_0 : x_1 = x_{10}, \dots, x_n = x_{n0}$  este o hipersuprafață de cîmp a cîmpului vectorial concurrent  $X = (x_1 - x_{10}, \dots, x_n - x_{n0})$  și reciproc (fig. 6.5).

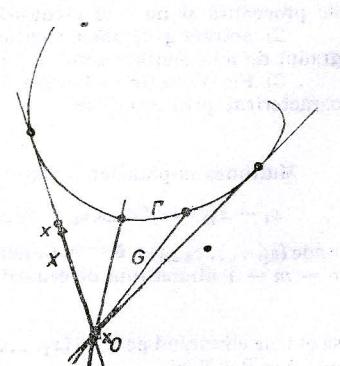


Fig. 6.5

*Demonstrație.* Mulțimea dreptelor ce trec prin punctul fixat  $x_0$  și care nu aparțin hiperplanului  $x_n = x_{n_0}$  este reprezentată prin

$$x_1 - x_{10} = c_1(x_n - x_{n_0}), \dots, x_{n-1} - x_{n-10} = c_{n-1}(x_n - x_{n_0}), \quad (11)$$

$(c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Condiția ca aceste drepte să se sprijine pe o subvarietate  $\Gamma$  cu  $n-2$  dimensiuni de ecuații

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0 \quad (12)$$

se obține eliminând pe  $x = (x_1, \dots, x_n)$  între cele  $n+1$  ecuații (11) și (12). Se deduce  $\Phi(c_1, \dots, c_{n-1}) = 0$  și deci

$$\Phi\left(\frac{x_1 - x_{10}}{x_n - x_{n_0}}, \dots, \frac{x_{n-1} - x_{n-10}}{x_n - x_{n_0}}\right) = 0. \quad (13)$$

Reciproc, se poate arăta că o hipersuprafață  $M$  a lui  $\mathbb{R}^n$  caracterizată printr-o ecuație de tipul (13) este o hipersuprafață conică cu vîrful în punctul  $x_0$ .

Funcția  $f$  definită prin  $f(x_1, \dots, x_n) = \Phi\left(\frac{x_1 - x_{10}}{x_n - x_{n_0}}, \dots, \frac{x_{n-1} - x_{n-10}}{x_n - x_{n_0}}\right)$  satisfacă ecuația cu derivate parțiale

$$(x_1 - x_{10}) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_{n_0}) \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \quad (14)$$

Evident, datele (11) și (12) constituie o problemă Cauchy pentru ecuația (14).

Reținem că hipersuprafețele de cimp ale unui cimp vectorial concurent sint hipersuprafețe conice avind drept vîrf un punct fixat din  $\mathbb{R}^n$  (fig. 6.5). Ecuația (14) se numește *ecuația liniară omogenă cu derivate parțiale de ordinul întâi a suprafețelor conice cu vîrful în  $x_0$* .

**O b s e r v a t i i.** 1) Eliminarea dreptelor care aparțin hiperplanului  $x_n = x_{n_0}$  ține doar de procedură și nu este esențială.

2) Soluția generală a ecuației (14) este o funcție omogenă în  $x_1 - x_{10}, \dots, x_n - x_{n_0}$  avind gradul de omogenitate zero (v. ecuația Euler din 6.2).

3) Fie  $V$  un  $(m-1)$ -plan fixat. Fără a scădea generalitatea putem presupune că  $V$  este caracterizat prin ecuațiile

$$x_1 = x_{10}, \dots, x_{n-m+1} = x_{n-m+1,0}.$$

Mulțimea  $m$ -planeelor  $G$  care trec prin  $V$  este reprezentată prin

$$x_1 - x_{10} = c_1(x_{n-m+1} - x_{n-m+1,0}), \dots, x_{n-m} - x_{n-m,0} = c_{n-m}(x_{n-m+1} - x_{n-m+1,0}), \quad (15)$$

unde  $(c_1, \dots, c_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$ . Condiția ca aceste  $m$ -plane să se sprijine pe o subvarietate  $\Gamma$  cu  $n-m-1$  dimensiuni de ecuații

$$g_1(x) = 0, \dots, g_{m+1}(x) = 0 \quad (16)$$

se obține eliminând pe  $x = (x_1, \dots, x_n)$  între cele  $n+1$  ecuații (15), (16). Se găsește  $\Phi(c_1, \dots, c_{n-m}) = 0$  și deci

$$\Phi\left(\frac{x_1 - x_{10}}{x_{n-m+1} - x_{n-m+1,0}}, \dots, \frac{x_{n-m} - x_{n-m,0}}{x_{n-m+1} - x_{n-m+1,0}}\right) = 0$$

este ecuația unei hipersuprafețe conice cu vîrful  $V$ . Notind

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Phi\left(\frac{x_1 - x_{10}}{x_{n-m+1} - x_{n-m+1,0}}, \dots, \frac{x_{n-m} - x_{n-m,0}}{x_{n-m+1} - x_{n-m+1,0}}\right)$$

se constată că

$$(x_1 - x_{10}) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + (x_{n-m+1} - x_{n-m+1,0}) \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+1}} = 0.$$

**Consecință.** Hipersuprafeletele de cîmp ale unui cîmp vectorial coliniar cu unul concurent sunt hipersuprafețe conice (se lasă deoparte hipersuprafața de nivel constant zero, asociată factorului de proporționalitate).

## 6.4. Hipersuprafețe de rotație

O hipersuprafață a lui  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , care poate fi generată prin rotația unei subvarietăți  $\Gamma$  cu dimensiunea  $m \in \{1, 2, \dots, n-2\}$  în jurul unui  $m$ -plan fixat  $D$  se numește **hipersuprafață de rotație**;  $m$ -planul  $D$  se numește **axă de rotație**, iar subvarietatea  $\Gamma$  se numește **generatoare** (fig. 6.6)

**Teoremă.** O hipersuprafață de rotație este o hipersuprafață de cîmp a unui cîmp vectorial Killing de forma  $Ax$  și reciproc.

**Demonstrație.** Prin ipoteză facem abstracție de translații (cîmpuri vectoriale paralele). De aceea putem presupune că  $m$ -planul  $D$  ce se sprijină pe vectorii liniar independenți  $b_1, \dots, b_m$  trece prin origine. Fie

$$S : x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2$$

o hipsferă cu centrul în origine (pe axă) și

$$P : (b_1, x) = 0, \dots, (b_m, x) = 0$$

$(n-m)$ -planul care trece prin origine și este perpendicular pe  $D$ . Intersecția  $P \cap S$  este o  $(n-m-1)$ -sferă.

Prin rotație în jurul lui  $D$ , orice punct de pe

$$\Gamma : g_1(x) = 0, \dots, g_{n-m}(x) = 0$$

se va deplasa într-un  $(n-m)$ -plan perpendicular pe  $D$  și va descrie o  $(n-m-1)$ -sferă cu centrul pe axa de rotație. De aceea hipersuprafața de rotație poate fi privită ca fiind locul geometric al  $(n-m-1)$ -sferelor cu centrele pe  $D$ , care trece prin  $\Gamma$  și ale căror  $(n-m)$ -plane sunt perpendiculare pe  $D$ . Astfel sistemul

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 = w_0, \quad \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j = w_i, \quad i = 1, \dots, m \quad g_1(x) = 0, \dots, g_{n-m}(x) = 0$$

trebuie să fie compatibil. Eliminând pe  $x = (x_1, \dots, x_n)$  între cele  $n+1$  ecuații, rezultă  $\Phi(w_0, w_1, \dots, w_m) = 0$  și deci hipersuprafața căutată are o ecuație carteziană implicită de forma

$$\Phi \left( \sum_{j=1}^n x_j^2, \sum_{j=1}^n b_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n b_{mj} x_j \right) = 0. \quad (17)$$

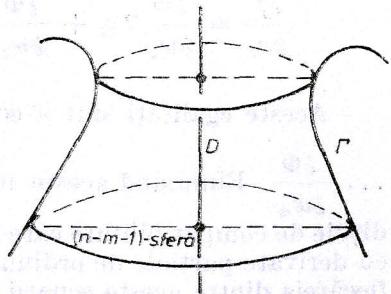


Fig. 6.6

Reciproc, se poate arăta că o hipersuprafață  $M$  a lui  $\mathbb{R}^n$  caracterizată printr-o ecuație de tipul (17) este o hipersuprafață de rotație.

Considerăm funcția definită prin

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Phi(\sum x_j^2, \sum b_{1j}x_j, \dots, \sum b_{mj}x_j)$$

și observăm că

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial w_0} 2x_j + \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} b_{1j} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial w_m} b_{mj}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Aceste egalități sunt  $n$  ecuații cu  $m+1$  necunoscute  $\frac{\partial \Phi}{\partial w_0}, \frac{\partial \Phi}{\partial w_1}, \dots,$

$\dots, \frac{\partial \Phi}{\partial w_m}$ . Eliminind aceste necunoscute între cele  $n$  ecuații, găsim condițiile de compatibilitate care sunt de fapt  $n-m-1$  ecuații liniare omogene cu derivate parțiale de ordinul întâi, cu funcția necunoscută  $f$ . Coeficienții fiecărei dintre aceste ecuații cu derivate parțiale sunt componentele unor cimpuri vectoriale Killing, adică de tipul  $Ax$ , unde  $A$  este o matrice antisimetrică.

În particular, dacă  $m = n-2$ , atunci produsul vectorial al celor  $n-1$  vectori  $x, b_1, \dots, b_m$  se poate scrie în forma  $Ax$ , unde  $A = [a_{ij}]$  este o matrice antisimetrică de ordinul  $n$  care satisfac  $Ab_1 = 0, \dots, Ab_m = 0$ , iar  $x = [x_1, \dots, x_n]$ . Utilizând matricea  $A$ , găsim o singură ecuație liniară omogenă cu derivate parțiale de ordinul întâi,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

și, evident,  $(\sum_j a_{1j}x_j, \dots, \sum_j a_{nj}x_j)$  este un cimp vectorial Killing.

Pentru reciprocă, fie  $A$  o matrice antisimetrică,  $Ax$  un cimp vectorial Killing și  $\nabla f(x) Ax = 0$  ecuația cu derivate parțiale care caracterizează hipersuprafețele de cimp scrisă în notații matriceale [ $\nabla f(x)$  este matrice linie, iar  $x$  — matrice coloană]. Pentru a arăta că hipersuprafețele de cimp sunt hipersuprafețe de rotație este suficient să arătăm că acestea sunt invariante față de curentul generat de cimpul vectorial Killing  $Ax$ , adică ecuația  $\nabla f(x) Ax = 0$  este invariantă față de acest curent. Într-adevăr, curentul generat de cimpul vectorial Killing  $Ax$  este difeomorfismul (rotație)  $x = e^{At}y, t \in \mathbb{R}$ , cu inversa  $y = e^{-At}x$ . Deoarece  $\nabla f(x) = \nabla f(y)e^{-At}$ , găsim  $\nabla f(y)e^{-At}Ae^{At}y = 0$  și, înținând seama că  $e^{-At}Ae^{At} = e^{-At}e^{At}A = A$ , rămîne  $\nabla f(y)Ay = 0$ .

**VARIANTĂ PENTRU RECIPROCĂ.** Tinând seama de faptul că familia orbitelor unui cimp vectorial Killing  $Ax$  este descrisă de ecuațiile

$$\|x\|^2 = c_0, \|Ax\|^2 = c_1, \dots, \|A^{n-2}x\|^2 = c_{n-2},$$

rezultă că  $f(x) = \Phi(\|x\|^2, \|Ax\|^2, \dots, \|A^{n-2}x\|^2)$  este soluția generală a ecuației  $\nabla f(x) Ax = 0$  și deci hipersuprafețele de cimp sunt caracterizate prin  $\Phi(\|x\|^2, \|Ax\|^2, \dots, \|A^{n-2}x\|^2) = c$ .

**Consecință.** Hipersuprafețele de cîmp ale unui cîmp vectorial coliniar cu un cîmp Killing  $Ax$  sunt hipersuprafețe de rotație (se lasă deoparte hiper suprafața de nivel constant zero, atâtă factorului de coliniaritate).

## 6.5. Valori și vectori proprii ale unui cîmp vectorial

Fie  $C^\infty(D)$  spațiul vectorial real al funcțiilor reale de clasă  $C^\infty$  pe mulțimea deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Un cîmp vectorial  $\mathbf{X}$  de clasă  $C^\infty$  pe  $D$  poate fi privit ca un operator liniar  $f \rightarrow \mathbf{X}(f) = D_x f, f \in C^\infty(D)$ . Proprietățile acestui operator liniar sunt strîns legate de proprietățile globale ale curentului generat de  $\mathbf{X}$ .

O funcție  $f \in C^\infty(D) \setminus \{0\}$  cu proprietatea  $\mathbf{X}(f) = \lambda f, \lambda \in \mathbb{R}$ , se numește *vector propriu al lui  $\mathbf{X}$  în raport cu valoarea proprie  $\lambda$* .

**Exemplu.** 1) Vectorii proprii ai cîmpului vectorial concurrent  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n), x \in D$  (con cu virful în origine), sunt funcțiile omogene, iar valorile proprii sunt gradele de omogenitate corespunzătoare. Dacă  $x \in \mathbb{R}^n$ , atunci fiecare valoare proprie a lui  $\mathbf{X}$  este un număr natural  $m$  și vectorul propriu corespunzător este un polinom omogen de gradul  $m$  (v. 6.2).

2) Funcțiile nenule care satisfac  $\mathbf{X}(f) = 0$ , adică elementele nenele din  $\text{Ker } \mathbf{X}$ , sunt vectori proprii ai lui  $\mathbf{X}$  în raport cu valoarea proprie zero.

3) Fie  $Ax$  un cîmp vectorial liniar pe  $\mathbb{R}^n$ . Funcția  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (y, x)$ ,  $y$  fiind vector fixat în  $\mathbb{R}^n$ , este un vector propriu pentru  $Ax$  în raport cu valoarea proprie  $\lambda$  dacă și numai dacă  $Ay = \lambda y$ , adică dacă și numai dacă  $y$  este un vector propriu al matricei  $A$  în raport cu valoarea proprie  $\lambda$ .

Parafrázind rezultatele din 6.3 și 6.4, ajungem la următoarele concluzii :

— Fie  $\mathbf{X} = (a_1, \dots, a_n), a_i \neq 0$ , un cîmp vectorial paralel. Un element oarecare al lui  $\text{Ker } \mathbf{X} \setminus \{0\}$  este funcția definită prin

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Phi \left( \frac{x_1 - x_n}{a_1}, \dots, \frac{x_{n-1} - x_n}{a_{n-1}} \right),$$

unde  $\Phi$  este o funcție arbitrară de clasă  $C^\infty$ .

— Fie  $\mathbf{X} = (x_1 - x_{10}, \dots, x_n - x_{n0})$  un cîmp vectorial concurrent. Funcția definită prin

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Phi \left( \frac{x_1 - x_{10}}{x_n - x_{n0}}, \dots, \frac{x_{n-1} - x_{n-10}}{x_n - x_{n0}} \right),$$

unde  $\Phi$  este o funcție arbitrară de clasă  $C^\infty$ , aparține lui  $\text{Ker } \mathbf{X} \setminus \{0\}$ .

— Fie  $\mathbf{X} = Ax$  un cîmp vectorial Killing. Submulțimea  $\text{Ker } \mathbf{X} \setminus \{0\}$  constă din elemente de forma

$$f(x) = \Phi(\|x\|^2, \|Ax\|^2, \dots, \|A^{n-2}x\|^2),$$

unde  $\Phi$  este o funcție arbitrară de clasă  $C^\infty$ .

**Teoremă.** 1)  $f \in C^\infty(D) \setminus \{0\}$  este un vector propriu al lui  $\mathbf{X}$  în raport cu valoarea proprie  $\lambda$  dacă și numai dacă

$$(f \circ \alpha)(t) = (f \circ \alpha)(0)e^{\lambda t}$$

pentru orice linie de cîmp  $\alpha$  a lui  $\mathbf{X}$ .

2) Dacă fiecare linie de cîmp maximală a lui  $\mathbf{X}$  este periodică, atunci  $\mathbf{X}$  admite numai valoarea proprie zero.

*Demonstrație.* Dacă  $\alpha$  este o linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$  pe  $D$ , iar  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție de clasă  $C^\infty$ , atunci

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha) = \mathbf{X}(f) \circ \alpha.$$

1) Fie  $\mathbf{X}(f) = \lambda f$ ,  $\lambda$  fiind un număr real dat. Înînd seama de observația precedentă, rezultă  $\frac{d}{dt}(f \circ \alpha) = \lambda(f \circ \alpha)$  și deci  $(f \circ \alpha)(t) = Ae^{\lambda t}$ ,  $t \in I$ , unde  $A = (f \circ \alpha)(0)$ .

Reciproc, dacă relația  $(f \circ \alpha)(t) = Ae^{\lambda t}$ , pentru orice  $t \in I$ , are loc pentru o curbă  $\alpha: I \rightarrow D$ , atunci  $\mathbf{X}(f) = \lambda f$  pe  $\alpha(I)$ . Dacă ultima relație este adevărată pentru fiecare linie de cîmp, atunci  $\mathbf{X}(f) = \lambda f$  pe  $D$  și deci  $\lambda$  este o valoare proprie a lui  $\mathbf{X}$ , iar  $f$  este un vector propriu.

**Observație.** Dacă  $\alpha(0)$  este un zero al lui  $f$ , atunci  $\alpha(I) \subset f^{-1}(0)$ .

2) Fie  $\lambda$  o valoare proprie și  $f$  vectorul propriu corespunzător. Deoarece  $f \neq 0$ ,  $\exists x_0 \in D$ , astfel incit  $f(x_0) \neq 0$ . Fie  $\alpha$  o linie de cîmp maximală a lui  $\mathbf{X}$  ce pleacă din  $x_0$ , periodică de perioadă  $T$ . Rezultă  $e^{\lambda t} = e^{\lambda(t+T)}$ ,  $T > 0$ , pentru orice  $t \in \mathbb{R}$  și deci  $\lambda = 0$ .

**Contraexemplu.** 1) Funcția  $f: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = e^{\lambda \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$ ,  $\lambda \neq 0$ , este de

clasă  $C^\infty$  și satisfacă ecuația  $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f$  pe  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ . Ea nu poate fi extinsă la un vector propriu pe  $\mathbb{R}^2$  al cîmpului vectorial  $\mathbf{X} = (y, -x)$ . Într-adevăr, liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  sint periodice,  $t \rightarrow (\sin(t+b), \cos(t+b))$  și deci singura valoare proprie a lui  $\mathbf{X}$  este zero.

2) Liniile de cîmp ale cîmpului vectorial  $\mathbf{X} = \left( \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

sint periodice,  $\alpha(t) = (a \sin(t+b), a \cos(t+b))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , și deci singura valoare proprie a lui  $\mathbf{X}$  pe  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  este zero. Aceasta nu exclude faptul că funcția  $f: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) =$

$= e^{\lambda(\frac{x^2+y^2}{2}) \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$ ,  $\lambda \neq 0$ , este de clasă  $C^\infty$  și satisfacă ecuația  $\frac{y}{x^2+y^2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f$

pe  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ .

Legăturile dintre proprietățile operatorului liniar  $\mathbf{X}$  și proprietățile globale ale curentului generat de  $\mathbf{X}$  sint de o importanță deosebită în cazul în care curentul conservă volumul. Pentru a pune în evidență aceste legături sint necesare cunoștințe de teoria operatorilor liniari pe spații euclidiene (sau în particular hilbertiene).

Presupunem că  $D$  este o mulțime deschisă, convexă și mărginită din  $\mathbb{R}^n$  cu frontieră  $\partial D$  netedă pe porțiuni. Atunci  $\bar{D} = D \cup \partial D$  este un compact în  $\mathbb{R}^n$ . Mulțimea  $\mathcal{C}^\infty(\bar{D})$  a funcțiilor de clasă  $C^\infty$  pe  $\bar{D}$  care se anulează pe  $\partial D$  este un spațiu vectorial real. Produsul scalar standard pe  $\mathcal{C}^\infty(\bar{D})$  este

$$(f, g) = \int_D f(x) g(x) dx$$

și deci  $\mathcal{C}^\infty(\bar{D})$  este un spațiu euclidian.

**Teoremă.** Un cimp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $\bar{D}$  al cărui curent conservă volumul este un operator liniar antisimetric pe spațiul vectorial euclidian  $\mathcal{C}^\infty(\bar{D})$ .

**Demonstrație.** Tinem seama de ipotezele  $f|_{\partial D} = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$  (cimp vectorial solenoidal) și de formula Gauss-Ostrogradski [11, p. 308],

$$\int_D (\operatorname{div} \mathbf{X}) dx = \int_{\partial D} (\mathbf{X}, \mathbf{N}) d\sigma$$

unde  $\mathbf{N}$  este cimpul vectorial unitar normal (exterior) la  $\partial D$ . Rezultă

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}(f), g) &= \int_D \mathbf{X}(f)(x) g(x) dx = \int_D \mathbf{X}(fg)(x) dx - \int_D f(x) \mathbf{X}(g)(x) dx = \\ &= \int_D \operatorname{div}(fg \mathbf{X})(x) dx - \int_D f(x) g(x) (\operatorname{div} \mathbf{X})(x) dx - \int_D f(x) \mathbf{X}(g)(x) dx = \\ &= \int_{\partial D} (fg \mathbf{X}, \mathbf{N}) d\sigma - \int_D f(x) g(x) (\operatorname{div} \mathbf{X})(x) dx - \int_D f(x) \mathbf{X}(g)(x) dx = \\ &= - \int_D f(x) \mathbf{X}(g)(x) dx = -(f, \mathbf{X}(g)), \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{D}). \end{aligned}$$

**Consecință.** Singura valoare proprie (reală) a cimpului vectorial  $\mathbf{X} : \mathcal{C}^\infty(\bar{D}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\bar{D})$ , de clasă  $C^\infty$ , al cărui curent conservă volumul, este zero.

**Demonstrație.** Proprietatea operatorilor antisimetrii; în cazul considerat, relațiile  $\mathbf{X}(f) = \lambda f$ ,  $f \neq 0$ ,  $(\mathbf{X}(f), f) = 0$  implică  $\lambda = 0$ .

Pentru exemple de cimpuri vectoriale al căror curent conservă volumul a se vedea 3.8–3.13.

**O b s e r v a t i e.** Fie ecuația  $\mathbf{X}(f) = Ff$  sau, altfel scris,  $\mathbf{X}(\ln|f|) = F$ , unde  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție fixată. Pentru orice linie de cimp  $\alpha : I \rightarrow D$  a lui  $\mathbf{X}$  se satisfacă

$$\frac{d}{dt} \ln|f(\alpha(t))| = F(\alpha(t))$$

sau

$$f(\alpha(t)) = f(\alpha(t_0)) \cdot e^{\int_{t_0}^t F(\alpha(s)) ds}.$$

Dacă cunoaștem pe  $F$  și  $f$ , atunci din proprietățile lor și din ultima relație decurg proprietăți ale lui  $\alpha$  și  $\mathbf{X}$ .

## 6.6. Metoda rețelei

În cazul în care soluția  $f$  a unei probleme Cauchy atașată unei ecuații liniare cu deriveate parțiale de ordinul întâi nu se explicitează prin formule, se face apel la metoda numerică a rețelei, cu ajutorul căreia se obține un tabel de valori ale lui  $f$ .

Pentru simplificarea expunerii fie ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi  $a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = F(x, y)$ , unde  $f$  este funcția necunoscută de

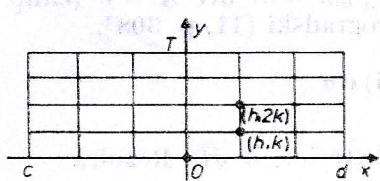


Fig. 6.7

clasa  $C^1$  pe  $[c, d] \times [0, T]$  care satisface condiția inițială  $f(x, 0) = g(x)$ . Constanta  $a$  este dată, iar  $F$  și  $g$  sunt funcții de clasă  $C^1$  cunoscute. Această problemă are soluția exactă  $f(x, y) = g(x - ay) + \int_0^y F(at - ay +$

$+ x, t)dt$ . Metoda numerică de găsire a unui tabel de valori ale lui  $f$  constă în următoarele: se înlocuiește domeniul  $[c, d] \times [0, T]$  printr-o rețea dreptunghiulară de pas dublu  $h, k$  ( $h > 0, k > 0$  convenabil alese, fig. 6.7), adică printr-o mulțime discretă de puncte  $M_{p,q}$  de coordonate  $x_p = ph, y_q = qk$ ,

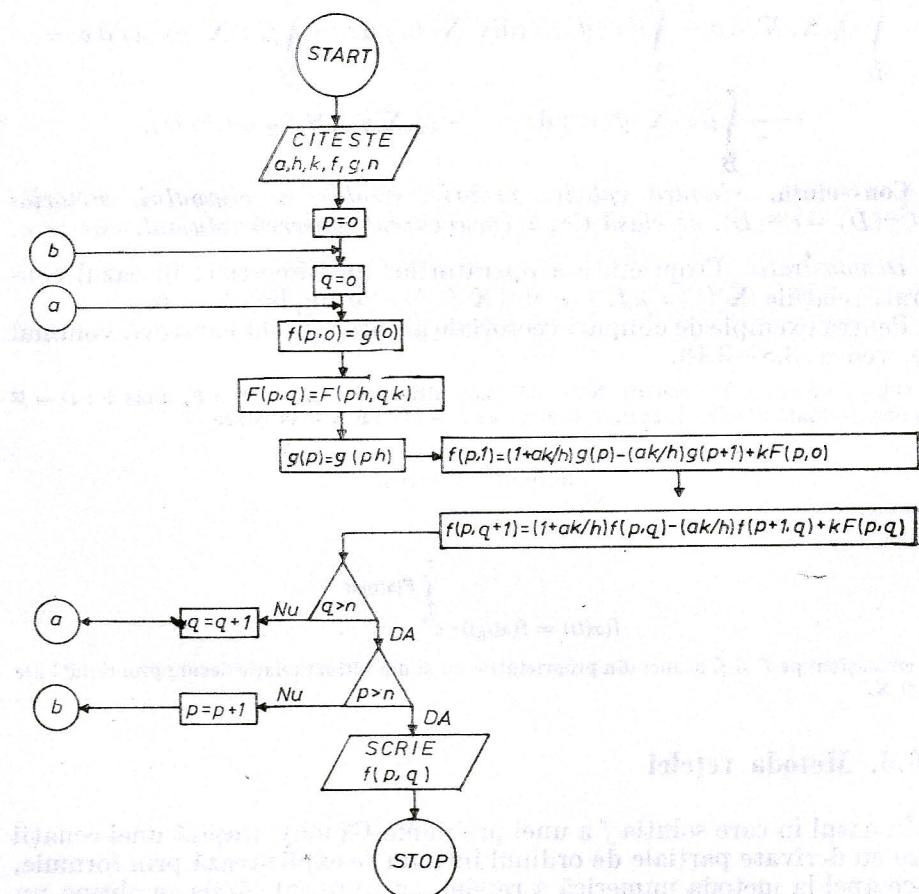


Fig. 6.8

$p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \geq 0$ , numite nodurile rețelei; se determină valorile funcției  $f$  în nodurile rețelei atașând ecuației inițiale un sistem de ecuații cu diferențe finite.

**Algoritm.** Se fixează  $h$  și  $k$ , se notează  $F_{p,q} = F(ph, qk)$ ,  $g_p = g(ph)$ ,  $f_{p,q} = f(ph, qk)$ ; se înlocuiește problema Cauchy inițială prin sistemul de ecuații cu diferențe finite

$$\frac{f_{p,q+1} - f_{p,q}}{k} + a \frac{f_{p+1,q} - f_{p,q}}{h} = F_{p,q}, \quad f_{p,0} = g_p,$$

în care  $a$ ,  $F_{p,q}$ ,  $g_p$  sunt numere reale cunoscute, iar sirul  $\{f_{p,q}\}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \geq 0$ , este un sir dublu de numere reale care se determină termen cu termen.

**Teoremă.** Dacă pașii rețelei  $h$  și  $k$  satisfac condiția  $0 \leq -\frac{ak}{h} \leq 1$ , atunci  $\sup_{p \in \mathbb{Z}} |f_{p,q} - f(ph, qk)| \leq nk|\eta(h, k)|$ , unde  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \eta(h, k) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  fiind fixat.

Inegalitatea din teorema constituie o evaluare a erorii în formula aproximativă  $f(ph, qk) \approx f_{p,q}$ . În concluzie, teorema afirmă că dacă  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  și  $n$  este suficient de mare determinat de condiția  $nk = \text{const}$ , atunci  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |f_{p,q} - f(ph, qk)| = 0$  și deci metoda rețelei este convergentă. Schema logică pentru algoritmul metodei este dată în fig. 6.8.

## 6.7. Probleme propuse

1. Să se arate că funcțiile definite respectiv prin  $f(x) = x_i + x_j + x_k$  și  $g(x) = x_i x_j x_k$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $i, j, k$  fiind fixați, sunt soluții ale ecuației

$$x_i(x_j - x_k) \frac{\partial f}{\partial x_i} + x_j(x_k - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_j} + x_k(x_i - x_j) \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0.$$

2. Să se verifice că funcția definită prin  $f(x) = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_2 - x_3}$  este o soluție a ecuațiilor

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^4 x_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

3. Fie  $\mathbf{X}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{X}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{X}_3 = (0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{X}_4 = (-x_2, x_1, 0)$ ,  $\mathbf{X}_5 = (0, -x_3, x_2)$ ,  $\mathbf{X}_6 = (x_3, 0, -x_1)$  ( $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ ) cimpuri vectoriale Killing liniar independente în  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ . Să se determine hiper-suprafețele de cimp.

**4.** Pentru fiecare dintre cîmpurile vectoriale următoare să se determine familia suprafețelor de cîmp :

- 1)  $\mathbf{V} = 2(x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ ,
- 2)  $\mathbf{V} = x(x+z)\mathbf{i} + y(y+z)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}$ ,
- 3)  $\mathbf{V} = (z + e^x)\mathbf{i} + (z + e^y)\mathbf{j} + (z^2 - e^{x+y})\mathbf{k}$ ,
- 4)  $\mathbf{V} = (xy^3 - 2x^4)\mathbf{i} + (2y^4 - x^3y)\mathbf{j} + 9z(x^3 - y^3)\mathbf{k}$ ,
- 5)  $\mathbf{V} = xy\mathbf{i} - y\sqrt{1-y^2}\mathbf{j} + (z\sqrt{1-y^2} - 2axy)\mathbf{k}$ ,
- 6)  $\mathbf{V} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ ,

R. 1)  $z^2 = e^y \varphi(y^2 e^{x^2/y^2})$ , 2)  $\ln x + \frac{z}{y} = \varphi\left(\ln y + \frac{z}{x}\right)$ , 3)  $y + z e^{-x} = \varphi(x + z e^{-y})$ ,

4)  $x^3 y^3 z = \varphi(xy^{-2} + yx^{-2})$ , 5)  $yz + ax(y + \sqrt{1-y^2}) = \varphi(x e^{\arcsin y})$ , 6)  $z^2 = y \varphi\left(\frac{x^2 - y^2}{y}\right)$ .

**5.** Să se găsească soluția problemei Cauchy  $z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ,  $z(1, y) = \sqrt{y}$ .

**6.** Se dă cîmpul vectorial  $\mathbf{V} = x^2(y+z)\mathbf{i} - y^2(z+x)\mathbf{j} + z^2(y-x)\mathbf{k}$ . Să se determine suprafața de cîmp care trece prin curba  $xy = a$ ,  $x+y=b$ .

**7.** Să se rezolve următoarele probleme Cauchy :

1)  $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ,  $z(x, 0) = \varphi(x)$ ;

2)  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ ,  $z(x, 0) = \varphi(x)$ ;

3)  $\frac{\partial z}{\partial y} = xz\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $z(x, 0) = x$ ;

4)  $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = f$ ,  $f(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ .

R. 1)  $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ ; 2)  $z = \frac{\varphi(x - y)}{1 - y\varphi(x - y)}$ , 3)  $x = z e^{-yz}$  4)  $f = \varphi(x e^{-z}, y e^{-z}) e^z$ .

**8.** Să se arate că polinoamele armonice în două variabile sunt polinoame omogene.

Indicăție.  $(x + iy)^n = P_n(x, y) + iQ_n(x, y)$  implică  $\frac{\partial P_n}{\partial x} = nP_{n-1}$ ,  $\frac{\partial P_n}{\partial y} = -nQ_{n-1}$ ,

$\frac{\partial Q_n}{\partial x} = nQ_{n-1}$ ,  $\frac{\partial Q_n}{\partial y} = nP_{n-1}$ ,  $P_{n+1} = xP_n - yQ_n$ ,  $Q_{n+1} = yP_n + xQ_n$ . Deci

$x\frac{\partial P_n}{\partial x} + y\frac{\partial P_n}{\partial y} = n(xP_{n-1} - yQ_{n-1}) = nP_n$ ,  $x\frac{\partial Q_n}{\partial x} + y\frac{\partial Q_n}{\partial y} = nQ_n$ .

**9.** Fie  $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  o funcție de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^{2n} \setminus \mathbb{R}^n$ , unde  $\mathbb{R}^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} | y = 0\}$ . Să se arate că dacă  $f(x, 0) = 0$  și dacă funcția parțială  $y \rightarrow f(x, y)$  este omogenă având gradul de omogenitate  $p > 0$ , atunci  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}^n$ .

**10.** Se dau cîmpurile vectoriale  $(y, -x, 0)$ ,  $(x, y, z)$ ,  $(x^2, yx, xz)$ ,  $(xy, y^2, yz)$ ,  $(xz, yz, z^2)$ . Să se arate că familia de conuri  $x^2 + y^2 = c^2 z^2$ , unde  $c$  este un parametru real, este invariантă față de curentul generat de fiecare dintre cîmpurile vectoriale date.

Acceași problemă pentru cîmpurile vectoriale  $(1, 0, y)$ ,  $(x, 0, z)$ ,  $(x^2, xy - z, xz)$ ,  $(0, 1, x)$ ,  $(0, y, z)$ ,  $(xy - z, y^2, yz)$  și paraboloidul hiperbolic  $z = xy$ .

**11.** Fie cîmpurile vectoriale  $(1, x)$ ,  $(x, 2y)$ ,  $(x^2 - y, xy)$ . Să se arate că grupurile cu un parametru determinate de aceste cîmpuri vectoriale lasă invariантă parabola  $x^2 - 2y = 0$ .

**12.** Se dau cîmpurile vectoriale  $\mathbf{X} = (1, 2x, 3y)$ ,  $\mathbf{Y} = (x, 2y, 3z)$ ,  $\mathbf{Z} = (0, 1, 3x)$  și funcția reală  $f(x, y, z) = 3xy - z - 2x^3$ . Să se arate că :

1) funcția  $f$  este un invariant în raport cu grupurile cu un parametru generate de  $\mathbf{X}$  respectiv  $\mathbf{Z}$ ;

2) funcția  $f$  este un vector propriu al lui  $\mathbf{Y}$  în raport cu valoarea proprie 3.

**13.** Să se cerceteze existența valorilor proprii și a vectorilor proprii pentru cîmpurile vectoriale  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  în cazurile

$$1) \quad X_i(x) = \sum_{j \neq i} x_j, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad 2) \quad X_i(x) = \prod_{j \neq i} x_j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Indicație. div  $\mathbf{X} = 0$ .

Acceași problemă pentru cîmpurile vectoriale omotetice, affine sau proiective.

**14.** Folosind metoda rețelei, să se aproximeze soluțiile următoarelor probleme Cauchy :

$$1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f(x, 0) = \sin \pi x, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad h = k = 0, 2;$$

$$2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = y \sin x, \quad f(x, 0) = \cos x, \quad (x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1], \quad h = 0, 1; \\ k = 0, 05.$$

**15.** Să se determine curbura Gauss și curbura medie ale unei suprafețe de cîmp din  $\mathbb{R}^3$ .

**16.** Fie  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea  $\|\text{grad } f\| = 1$ . Să se arate că suprafețele de cîmp ale lui  $\text{grad } f$  sunt riglate.

## 7. TEORIA BIFURCAȚIEI

Teoria bifurcației se ocupă cu studiul influenței variației parametrilor asupra punctelor de echilibru și a liniilor de cimp (în special periodice), având aplicații în biologie, chimie, fizică, inginerie etc. (sau în detaliu în domeniile menționate în introducerea la Cap. 5). Din aceasta prezentăm doar ideile de bază și exemple, cu mențiunea că teoria generală reclamă cunoștințe de analiză funcțională, topologie și sisteme dinamice.

În 7.1 se descrie bifurcația în mulțimea de echilibru scoțindu-se în evidență rolul teoremei funcțiilor implicate în această chestiune. Tot aici se reamintește clasificarea punctelor unei curbe plane dată printr-o ecuație carteziană implicită și se dau exemple de bifurcație în cazurile în care mulțimea de echilibru este respectiv evartică, evartică bicilindrică, evartică hipopedă și rodonee sferică de indice 2.

Noțiunea de varietate centru, care derivă din noțiunea de mulțime invariantă, este prezentată în 7.2. Apoi se comentează bifurcația curentului local (v. 7.3), în sensul trecerii de la liniile de cimp „deschise” la liniile de cimp „închise”, făcindu-se apel la un sistem liniar și la unul neliniar (model din biologie), ambele cu cite două funcții necunoscute.

În 7.4 se prezintă teorema Hopf a bifurcației într-o variantă simplificată, dar suficient de generală pentru a putea fi aplicată la cazurile concrete esențiale cum sunt ecuația von der Pol din teoria circuitelor electrice, sistemul Lorenz care descrie turbulența dinamică a unui fluid și sistemul Goodwin care modeleză procese biochimice.

Problemele din 7.5 se referă la mulțimea de echilibru, bifurcația în mulțimea de echilibru, existența varietăților centru, stabilitatea punctelor de echilibru și bifurcația curentului (cu aplicații în chimie și teoria reactoarelor).

### 7.1. Bifurcație în mulțimea de echilibru

Fie  $\mathbf{X}(x, c) = (X_1(x, c), \dots, X_n(x, c))$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , un cimp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$  care depinde de parametrul vector  $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ . Spațiul  $\mathbb{R}^n$  este numit *spațiu stăriilor*, iar  $\mathbb{R}^m$  este numit *spațiu de control* pentru sistemul diferențial

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_m), \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, \dots, x_n; c_1, \dots, c_m) \quad (1)$$

Submulțimea  $E$  a lui  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  caracterizată prin ecuațiile carteziene implicate

$$X_1(x, c) = 0, \dots, X_n(x, c) = 0, x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

se numește *mulțime de echilibru*, deoarece proiecția ei pe  $\mathbb{R}^n$  constă numai din puncte de echilibru ale sistemului (1). Mulțimea  $E$  este o subvarietate de dimensiune  $m$  a lui  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  numai dacă  $\mathbf{X}$  are anumite proprietăți (de exemplu să satisfacă ipotezele din teorema funcției implicate,

$\det \left[ \frac{\partial X_i}{\partial x_j} (x, c) \right] \neq 0$ ). În general, mulțimea de echilibru constă din puncte izolate sau din grafice de funcții implicate definite de sistemul (2). Aceste grafice se numesc *ramuri* ale mulțimii de echilibru.

Fie  $\chi$  restricția proiecției  $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\pi(x, c) = c$  la  $E$ . Submulțimea  $S$  a lui  $E$  formată din punctele singulare ale funcției  $\chi : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ , adică din punctele în care rangul matricei jacobian  $J(\chi)$  este mai mic decât  $m$ , se numește *mulțimea singularităților*. Explicitând jacobianul lui  $\chi$ , se constată că  $S$  este caracterizată prin ecuațiile

$$X_i(x, c) = 0, \det \left[ \frac{\partial X_i}{\partial x_j} (x, c) \right] = 0, i, j = 1, \dots, n.$$

Presupunem că  $(x_0, c_0)$  nu este un punct izolat al mulțimii de echilibru  $E$ . Dacă  $(x_0, c_0)$  este un punct singular al lui  $E$  cu proprietatea că există cel puțin două ramuri  $E_1 : x = \varphi(c)$  și  $E_2 : x = \psi(c)$  ale lui  $E$  astfel încât  $\varphi(c_0) = \psi(c_0) = x_0$  și  $E_1 \cap E_2 = \{(x_0, c_0)\}$ , atunci punctul  $c_0$  se numește *punct de bifurcație* al ramurilor în cauză.

Imaginea  $B = \chi(S) \subset \mathbb{R}^m$  este numită *mulțimea bifurcație* a punctelor de echilibru. Mulțimea bifurcație este observabilă și pe ea se schimbă numărul și natura punctelor de echilibru.

Punctele de echilibru izolate și ramurile disjuncte ale lui  $E$  nu au legătură directă cu bifurcațiile.

**Clasificarea punctelor unei curbe definită printr-o ecuație carteziană implicită.** Fie curba  $\Gamma : F(\alpha, \beta) = 0$ , unde  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție de clasă  $C^\infty$ .

1) Un punct al lui  $\Gamma$  în care  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} \neq 0$  sau  $\frac{\partial F}{\partial \beta} \neq 0$  se numește *punct regulat*. Într-un

asemenea punct funcționează teorema funcției implicate, adică există o funcție unică  $\alpha = \alpha(\beta)$  sau  $\beta = \beta(\alpha)$  căreia grafic trece prin punctul respectiv și este inclus în  $\Gamma$ .

2) Un punct  $M_0(\alpha_0, \beta_0)$  al lui  $\Gamma$  în care  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} (M_0) \neq 0$  și  $\frac{d\alpha}{d\beta}$  își schimbă semnul la tre-

cerea lui  $\beta$  prin  $\beta_0$  (sau  $\frac{\partial F}{\partial \beta} (M_0) \neq 0$  și  $\frac{d\beta}{d\alpha}$  își schimbă semnul la trecerea lui  $\alpha$  prin  $\alpha_0$ ) se numește *punct regulat de încrucișare*.

3) Un punct al lui  $\Gamma$  în care  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0$  se numește *punct singular*.

4) Un punct singular al curbei  $\Gamma$  în care cel puțin o derivată de ordinul doi a lui  $F$  nu se anulează și prin care trec două și numai două ramuri ale curbei  $\Gamma$  care posedă tangente distințe se numește *punct dublu* (fig. 7.1, a).

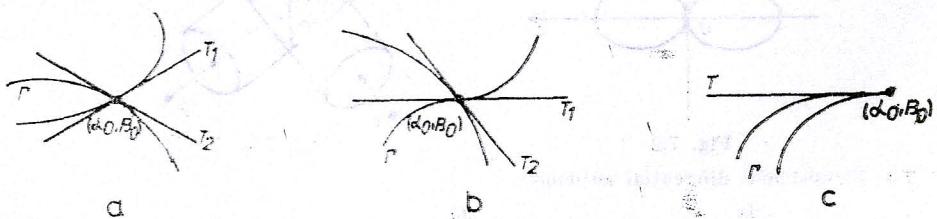


Fig. 7.1

5) Un punct dublu  $M_0(\alpha_0, \beta_0)$  al lui  $\Gamma$  pentru care  $\frac{d\alpha}{d\beta}$  (sau  $\frac{d\beta}{d\alpha}$ ) își schimbă seminul pe una dintre ramuri, la trecerea lui  $\beta$  prin  $\beta_0$  (la trecerea lui  $\alpha$  prin  $\alpha_0$ ), se numește *punct singular (dublu) de încreștere* (fig. 7.1, b).

6) Un punct singular al lui  $\Gamma$  în care două ramuri ale lui  $\Gamma$  au un contact de ordinul doi se numește *punct de întoarcere*. Într-un asemenea punct cele două ramuri au aceeași tangentă (fig. 7.1, c).

7) Un punct izolat al lui  $\Gamma$  se numește *punct conjugat*.

8) Un punct singular al lui  $\Gamma$  în care se anulează toate derivatele de ordinul doi se numește *punct singular de ordin superior*.

Fie  $(\alpha_0, \beta_0) \in \Gamma$  un punct singular în care hessiană  $d^2F(\alpha_0, \beta_0)$  nu este identic nulă. Dacă  $\det d^2F(\alpha_0, \beta_0) > 0$ , atunci  $(\alpha_0, \beta_0)$  este un punct izolat (conjugat) în  $\Gamma$ ; dacă  $\det d^2F(\alpha_0, \beta_0) < 0$ , atunci  $(\alpha_0, \beta_0)$  este un punct dublu al lui  $\Gamma$ ; dacă  $\det d^2F(\alpha_0, \beta_0) = 0$ , atunci  $(\alpha_0, \beta_0)$  este un punct de întoarcere al lui  $\Gamma$ . Într-un punct dublu sau de întoarcere direcțiile  $(l, m)$  ale tangențelor la  $\Gamma$  sint date de

$$l^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}(\alpha_0, \beta_0) + 2lm \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}(\alpha_0, \beta_0) + m^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}(\alpha_0, \beta_0) = 0.$$

Punctul conjugat și punctul dublu în  $\Gamma$  sint puncte critice izolate pentru funcția  $F$ .

**Aplicația 7.1.** Fie ecuația diferențială cu variabilele separabile

$$\frac{dx}{dt} = c^4 - c^2 + \frac{x^2}{4},$$

unde  $c$  este un parametru real. Mulțimea punctelor de echilibru este descrisă de ecuația  $c^4 - c^2 + x^2/4 = 0$  [sau] echivalent  $x = \pm |c| \sqrt{1 - c^2}$ ,  $c \in [-1, 1]$ . Se observă că  $(0, 0)$  este singurul punct singular al lui  $E$  (cvartică [58]). Acesta este un punct de întoarcere (fig. 7.2).

Ramurile (lui  $E$ )  $x = -2|c|\sqrt{1 - c^2}$  și  $x = 2|c|\sqrt{1 - c^2}$  se bifurcă una din alta în  $c = 0$

**7.2.** Fie sistemul diferențial

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + c^2 - 1, \quad \frac{dy}{dt} = y^2 + c^2 - 1,$$

unde  $c$  este un parametru real. Mulțimea punctelor de echilibru  $E: x^2 + c^2 - 1 = 0, y^2 + c^2 - 1 = 0$ ,  $c \in [-1, 1]$ , este o cvartică bicilindrică [58], adică intersecția a doi cilindri ale căror axe sunt perpendiculare, în raport cu reperul cartezian  $Oxyz$  (fig. 7.3). Bicilindrica  $E$  are două puncte singulare și anume  $(0, 0, \pm 1)$ .

Ramurile (lui  $E$ )

$$x = \pm \sqrt{1 - c^2}, \quad y = \pm \sqrt{1 - c^2}, \quad c \in [-1, 1],$$

se bifurcă una din alta în  $c = -1$  și în  $c = 1$  (fig. 7.3).

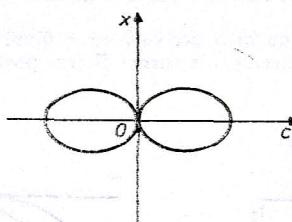


Fig. 7.2

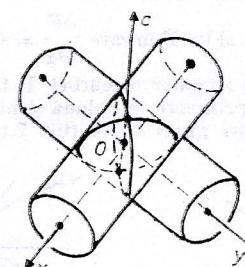


Fig. 7.3

**7.3.** Fie sistemul diferențial autonom

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 + c^2 - 4, \quad \frac{dy}{dt} = (x - 1)^2 + y^2 - 1,$$

unde  $c$  este un parametru real. Mulțimea punctelor de echilibru este

$$E : x^2 + y^2 + c^2 - 4 = 0, \quad (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Evident,  $c \in [-2, 2]$  și  $E$  este o *curvă hipopedă (lemniscată sferică [58])*, adică intersecția unei sfere și a unui cilindru de rotație tangent interior sferei, în raport cu reperul cartezian  $Oxy$  (fig. 7.4).

Ramurile (lui  $E$ )

$$x = \frac{4 - c^2}{2}, \quad y = \pm \frac{|c|}{2} \sqrt{4 - c^2}, \quad c \in [-2, 2],$$

se bifurcă una din alta în  $c = 0$ . Singurul punct singular al lui  $E$  are coordonatele  $x = 2, y = 0, c = 0$ .

**7.4.** Considerăm sistemul diferențial autonom

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 + c^2 - 1, \quad \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2 + c(x^2 + y^2).$$

unde  $c$  este un parametru real. În acest caz mulțimea punctelor de echilibru  $E : x^2 + y^2 + c^2 - 1 = 0, y^2 - x^2 + c(x^2 + y^2) = 0, c \in [-1, 1]$ , este o *rodonă sferică de indice 2* [58]. Într-adevăr,  $E$  admite reprezentarea parametrică periodică  $x = \sin 2u \cos v, y = \sin 2u \sin v, c = \cos 2u, u \in \mathbb{R}$ , și deci este curba  $v = 2u$  situată pe sferă  $x = \sin v \cos u, y = \sin v \sin u, a = \cos v, u, v \in \mathbb{R}$ , de rază unu. Punctele singulare ale rodoneei  $E$  sunt caracterizate prin  $x^2 + y^2 + c^2 - 1 = 0, y^2 - x^2 + c(x^2 + y^2) = 0$ ,

$$+ c^2 - 1 = 0, \quad y^2 - x^2 + c(x^2 + y^2) = 0, \quad \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x(c-1) & 2y(c+1) \end{vmatrix} = 0 \text{ și deci sunt } (0, 0, \pm 1).$$

Ramurile (lui  $E$ )

$$x = \pm(1+c) \sqrt{\frac{1-c}{2}}, \quad y = \pm(1-c) \sqrt{\frac{1+c}{2}}, \quad c \in [-1, 1],$$

se bifurcă una din alta în  $c = -1$  și în  $c = 1$  (fig. 7.5).

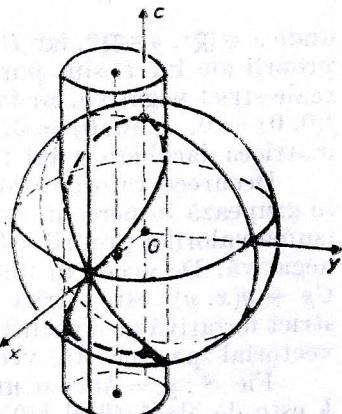


Fig. 7.4

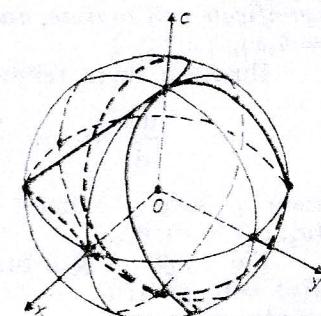


Fig. 7.5

## 7.2. Varietatea centru

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$  și  $\frac{dx_i}{dt} = X_i(x), i=1, \dots, n, (3)$

sistemul diferențial care dă liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$ .

O submulțime  $S \subset \mathbb{R}^n$  se numește mulțime *local invariантă* pentru sistemul (3) dacă  $\forall x_0 \in S$  linia de cîmp  $x(t)$  a lui  $\mathbf{X}$  determinată de condițiile inițiale  $x(0) = x_0$  se află în  $S$  pentru  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Dacă  $\varepsilon = \infty$ , atunci  $S$  se numește *mulțime invariантă*.

Mulțimea vidă și  $\mathbb{R}^n$  sunt local invariante. Orbitele cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  sunt mulțimi local invariante nevide (de dimensiune minimă) și orice mulțime local invariантă nevidă este o reuniune de orbite. În consecință, hipersuprafețele de cîmp sunt mulțimi local invariante.

Orbitele care sunt puncte de echilibru sunt invariante și deci mulțimea de echilibru este invariантă.

Reuniunea și intersecția a două mulțimi local invariante sint mulțimi local invariante.

Fie sistemul diferențial

$$\frac{dx}{dt} = Bx + f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Cy + g(x, y), \quad (4)$$

unde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , iar  $B$  și  $C$  sint matrice reale. Presupunem că valorile proprii ale lui  $B$  sint pur imaginare, valorile proprii ale lui  $C$  au părțile reale strict negative, iar funcțiile  $f$  și  $g$  sint de clasă  $C^\infty$  și satisfac condițiile  $f(0, 0) = 0$ ,  $f'(0, 0) = 0$ ,  $g(0, 0) = 0$ ,  $g'(0, 0) = 0$  (prin  $f'$  înțelegem matricea jacobian a lui  $f$ ).

Deoarece valorile proprii în numere complexe ale unei matrice reale se grupează în perechi, număr complex și conjugatul lui, urma matricei  $B$  (suma valorilor proprii) este egală cu zero, iar urma matricei  $C$  este strict negativă. De aceea în  $(0, 0)$  divergența cîmpului vectorial  $(Bx + f(x, y), Cy + g(x, y))$  este strict negativă. Prin continuitate, divergența rămîne strict negativă pe o vecinătate a lui  $(0, 0)$  și deci curentul generat de cîmpul vectorial pe această vecinătate mășorează volumele.

Fie  $S : y = h(x)$  o mulțime local invariantă a sistemului (4). Dacă  $h$  este de clasă  $C^1$  și  $h(0) = 0$ ,  $h'(0) = 0$ , atunci  $S$  se numește *varietate centru*.

Varietatea centru se folosește deseori în teoria bifurcației. Ca sub-varietate în  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , varietatea centru este tangentă la  $\mathbb{R}^n$  în origine.

**Teoremă.** [9]. *Dacă matricele  $B$ ,  $C$  și funcțiile  $f$ ,  $g$  satisfac condițiile specificate mai înainte, atunci sistemul (4) admite o varietate centru  $S : y = h(x)$ ,  $\|x\| < \delta$ .*

Ilustrăm doar tehnica demonstrației pe exemplul

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -y + g(x_1, x_2), \quad (4')$$

unde  $g$  este o funcție de clasă  $C^\infty$  cu  $g(x_1, x_2) = o(x_1^2 + x_2^2)$  cînd  $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ .

Fie  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de clasă  $C^\infty$  cu  $\psi(x) = 1$  pentru  $\|x\| \leq 1$ ,  $\psi(x) = 0$  pentru  $\|x\| \geq 2$ . Definim  $G(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2) \cdot g(x_1, x_2)$  și arătăm că

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -y + G(x_1, x_2), \quad (4'')$$

admete o varietate centru  $y = h(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Deoarece restricția lui  $G$  la discul de rază 1 cu centrul în origine este  $g$ , rezultă că există  $\delta > 0$  astfel încît  $y = h(x_1, x_2)$ ,  $x_1^2 + x_2^2 < \delta$ , să fie o varietate centru, locală pentru sistemul (4').

Primele două ecuații din (4'') admit soluția  $x_1(t) = c_1 + c_2 t$ ,  $x_2(t) = c_2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , unde  $x_i(0) = c_i$ ,  $i = 1, 2$ . Dacă  $y(t) = h(x_1(t), x_2(t))$  este soluție pentru a treia ecuație din (4''), atunci

$$\frac{d}{dt} h(c_1 + c_2 t, c_2) = -h(c_1 + c_2 t, c_2) + G(c_1 + c_2 t, c_2).$$

Această ecuație liniară neomogenă de ordinul întii admite soluția

$$h(c_1 + c_2 t, c_2) = e^{-t} (h(c_1, c_2) + \int_0^t e^s G(c_1 + c_2 s, c_2) ds).$$

Condiția  $\lim_{t \rightarrow -\infty} h(c_1 + c_2 t, c_2) e^t = 0$  implică  $h(c_1, c_2) = \int_{-\infty}^0 e^s G(c_1 + c_2 s, c_2) ds$ ,

fapt ce determină bine pe  $h$ , deoarece  $G$  are suportul compact. Prin construcție  $y = h(c_1, c_2)$ ,  $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ , este o varietate centru pentru sistemul (4'') și restricția la  $c_1^2 + c_2^2 < \delta$  este o varietate centru pentru sistemul (4').

Din exemple rezultă [9] :

- varietatea centru nu este necesar unică, iar intersecția varietăților centru nu este vidă;
- dacă  $f$  și  $g$  sunt analitice, nu rezultă neapărat că  $h$  este de clasă  $C^\infty$  sau analitică.

**Aplicații 7.5.** Sistemul diferențial  $dx/dt = -x^3$ ,  $dy/dt = -y$  admite o familie cu doi parametri de varietăți centru

$$y = h(x, c_1, c_2) = \begin{cases} c_1 \exp(-x^{-2}/2) & \text{pentru } x < 0, \\ 0 & \text{pentru } x = 0, \\ c_2 \exp(-x^{-2}/2) & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$$

Într-adevăr,  $(0, 0)$  este punct de echilibru,  $\frac{1}{2x^2} = t + k_1$ , unde  $k_1$  este constantă arbitrară,

defineste soluția generală a ecuației  $dx/dt = -x^3$ , iar  $y = k_2 e^{-t}$ ,  $k_2$  fiind constantă arbitrară, este soluția generală a ecuației  $dy/dt = -y$ . Rezultă

orbitele  $(0, 0)$  și  $y = \begin{cases} c_1 e^{-x^{-2}/2} & \text{pentru } x < 0, \\ c_2 e^{-x^{-2}/2} & \text{pentru } x > 0, \end{cases}$ ,  $c_1, c_2$  fiind constante arbitrale, care sunt schițate în fig. 7.6 ( $c_1 < c_2$ ) în baza următorului tabel de variație, întocmit pentru  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ :

$x$	$-\infty$	$0$	$\infty$
	$0$	$-$	$0$
$y'$	$0$	$0$	$+$
	$0$	$0$	$0$
$y$	$c_1$	$\searrow$	$c_2$
	$0$	$0$	$\nearrow$

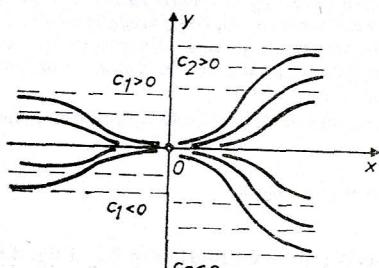


Fig. 7.6

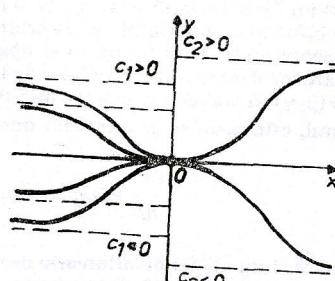


Fig. 7.7

Varietatea centru (reuniunea orbitelor precedente) este schițată în fig. 7.7 ( $c_1 < c_2$ ), adăugind la observațiile precedente faptul că  $x \rightarrow h(x, c_1, c_2)$  este o funcție de clasă  $C^\infty$ .

### 7.3. Bifurcația curentului

Considerăm cîmpul vectorial  $\mathbf{X}(x, c)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^m$  de clasă  $C^\infty$  căruia îi atașăm sistemul diferențial

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x, c). \quad (5)$$

Fie  $V$  o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^m$  care conține punctul  $c_0$  și  $x = x(c)$ ,  $c \in V$ , un punct de echilibru izolat al sistemului (5). Spunem că  $c = c_0$  este un *punct de bifurcație* pentru sistemul (5) dacă în  $c = c_0$  se schimbă proprietățile calitative ale curentului local în sensul că în orice vecinătate a lui  $c_0$  există puncte  $a$  și  $b$  astfel încît portretele locale ale fazelor pentru  $c = a$  și  $c = b$  nu sunt topologic echivalente.

Presupunem că aproximarea liniară a lui (5) în vecinătatea punctului  $x(c)$  este

$$\frac{dx}{dt} = A(c)x. \quad (6)$$

Cazul candidat la producerea bifurcației este acela în care  $A(c_0)$  are și valori proprii cu partea reală nulă. Într-adevăr, dacă toate valorile proprii ale lui  $A(c_0)$  au părțile reale nenule, atunci pentru  $\|z - c_0\|$  suficient de mic soluțiile lui (5) se comportă local ca și soluțiile lui (6) și deci  $c = c_0$  nu este un punct de bifurcație. În plus, fiind interesați în special de bifurcația fenomenelor stabile, se impune să adăugăm ipoteza că  $A(c_0)$  nu are valori proprii cu partea reală strict pozitivă.

**Aplicații 7.6. Sistem liniar.** Cel mai simplu exemplu de bifurcație a curentului se întâlnește în sistemul diferențial liniar omogen

$$\frac{dx}{dt} = cx - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + cy, \quad c \in \mathbb{R},$$

atașat cîmpului vectorial Killing  $(cx - y, x + cy)$  pe  $\mathbb{R}^2$ . Cu notatiile din 4.3, avem  $\beta = 2c$ ,  $\gamma = 1 + c^2 > 0$ ,  $\beta^2 - 4\gamma = -4 < 0$ . Deoarece  $\gamma = 1 + c^2 > 0$ ,  $\gamma > \beta^2/4$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$ , punctul de echilibru izolat  $(0, 0)$  este (1) un focar asymptotic stabil pentru  $c < 0$ , (2) un centru pentru  $c = 0$  și (3) un focar instabil pentru  $c > 0$  (fig. 4.6). De aceea  $c_0 = 0$  este valoarea lui  $c$  în care se produce bifurcația curentului: de la orbite spirale ce vin către  $(0, 0)$  se trece la orbite închise (elipse concentrice) în jurul lui  $(0, 0)$  și apoi la orbite spirale ce pleacă dinspre  $(0, 0)$ . Această bifurcație are loc deoarece trecerea lui  $c$  de la valori negative, prin zero, la valori pozitive face ca punctul  $(\beta, \gamma)$  să traverseze axa  $O\gamma$  într-un punct în care  $\gamma > 0$ .

Natural, este cazul să ne întrebăm dacă pentru sistemele diferențiale liniare omogene

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \quad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y$$

poate să apară și un alt fel de bifurcație decit cel descris anterior. Teoria din 4.3 și fig. 4.6 dau răspunsul la această problemă. Într-adevăr, chiar dacă  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , sunt funcții diferențierabile de  $c$ , nu se obțin linii de cîmp închise decit pentru  $\beta = 0$  și  $\gamma > 0$ . Deci, ori avem o bifurcație propriu-zisă de tipul precedent, ori avem o bifurcație patologică care apare la trecerea prin  $(0,0)$  a punctului  $(0, \gamma)$  care se mișcă pe semiaxă pozitivă  $O\gamma$ . Patologia este legată de faptul că pentru  $\gamma = 0$  avem o dreaptă de puncte de echilibru și nu un punct de echilibru izolat.

**7.7. Sistem neliniar.** Anumite aspecte ale interacțiunii dintre două populații, dintre care una parazitară și una victimă, sunt modelate de sistemul diferențial neliniar [47]

$$\frac{dx}{dt} = x(x(1-x) - y), \quad \frac{dy}{dt} = \alpha \left( x - \frac{1}{c} \right) y \quad (7)$$

pe  $x \geq 0, y \geq 0$ , unde  $\alpha$  este un număr strict pozitiv fixat, iar  $c$  este un parametru strict pozitiv.

Punctele de echilibru ale sistemului (7) sunt  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  și  $(c^{-1}, c^{-1}(1-c^{-1}))$ ,  $c > 1$ . În raport cu reperul cartezian  $Oxy$ , mulțimea de echilibru  $E$  este compusă din semiaxa deschisă  $Oc$ , semidreapta deschisă  $D : x=1, y=0, c > 0$  și curba  $\Gamma : x=1/c, y = (1-1/c)/c, c > 1$ , care apare la intersecția a două suprafețe cilindrice  $\Sigma_1 : x = 1/c, c \geq 1$ , cu generatoarele paralele cu  $Oy$ , și  $\Sigma_2 : y = (1-1/c)/c, c \geq 1$ , cu generatoarele paralele cu  $Ox$ . Suprafața  $\Sigma_1$  este o parte dintr-un cilindru hiperbolic. Forma lui  $\Sigma_2$  este determinată de alură graficului funcției reale  $y = (1-1/c)/c, c > 1$  (fig. 7.8) care rezultă din tabelul

$c$	1	2	3	$\infty$
$y'$	1	+	0	-
$y''$	-	-	0	+
$y$	0	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Figura 7.9 conține pe  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $E = Oc \cup D \cup \Gamma$  și proiecția lui  $E$  pe planul  $xOy$  care este arcul de parabolă  $\gamma_1 : y = x(1-x)$ ,  $0 < x \leq 1$ ,  $c = 0$ . Se observă că în punctul  $c = 1$  se produce o bifurcație a punctelor de echilibru.

În continuare vom face apel la aproximarea liniară a lui (7) și deci la teoria din 4.3 și la fig. 4.6.

Aproximarea liniară a sistemului (7) în vecinătatea punctului de echilibru  $(0, 0)$  este  $\frac{dx}{dt} = 0$ ,  $\frac{dy}{dt} = -\frac{\alpha}{c}y$ . Astfel,

cu notațiile din 4.3 avem  $\beta = -\frac{\alpha}{c} < 0$ ,  $\gamma = 0$  și deci în fig. 4.6 punctul  $(\beta, \gamma)$  se află pe semiaxa negativă  $O\gamma$ . Explicitarea familiei liniilor de cimp  $x = k_1, y = k_2 e^{-\frac{\alpha}{c}t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , pune în evidență comportarea curentului în vecinătatea lui  $(0, 0)$ .

Fie punctul de echilibru  $(1, 0)$ . Matricea aproximării liniare a sistemului (7) în vecinătatea acestui punct este  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \alpha(1-c^{-1}) \end{bmatrix}$ . Astfel  $\beta = -1 + \alpha(1-c^{-1})$ ,  $\gamma = -\alpha(1-c^{-1})$ . Pentru  $0 < c < 1$  avem  $\frac{dx}{dt} < 0$ ,  $\frac{dy}{dt} < 0$ , ceea ce ajută la a arăta că pentru orice condiții inițiale  $x(0) \geq 0$ ,  $y(0) \geq 0$  avem  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . Pentru  $c > 1$  avem  $\gamma < 0$  și fig. 4.6 arată că  $(1, 0)$  este un punct să.

Fie punctul de echilibru  $(c^{-1}, c^{-1}(1-c^{-1}))$ ,  $c > 1$ . Aproximarea liniară a sistemului (7) în vecinătatea acestui punct are matricea  $\begin{bmatrix} c^{-1}(1-2c^{-1}) & -c^{-1} \\ \alpha c^{-2}(1-c^{-1}) & 0 \end{bmatrix}$  și astfel  $\beta = c^{-1}(1-2c^{-1})$ ,  $\gamma = \alpha c^{-2}(1-c^{-1}) > 0$ .

Dacă  $c = 2$ , atunci  $\beta = 0$ ,  $\gamma = \alpha/8 > 0$  și punctul de echilibru  $(1/2, 1/4)$  este un centru (fig. 4.6).

Dacă  $c < 2$ , atunci  $\beta < 0$  și deci punctul de echilibru este fie un focar (pentru  $\gamma \geq \beta^2/4$ ), fie un nod (pentru  $\gamma < \beta^2/4$ ) asimptotic stabil. Dacă  $c > 2$ , atunci  $\beta > 0$  și deci punctul de echilibru este fie un focar (pentru  $\gamma > \beta^2/4$ ), fie un nod (pentru  $\gamma < \beta^2/4$ ) instabil. Precizăm că pentru  $c$  suficient de apropiat de 2 avem focare, iar inegalitatea  $\gamma > \beta^2/4$  este echivalentă cu

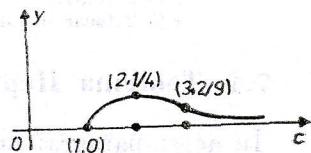


Fig. 7.8

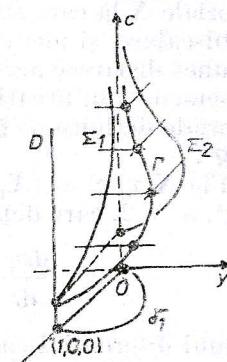


Fig. 7.9

$\alpha > (1-2c^{-1})^2/[4(1-c^{-1})]$ . Tabelul următor conține toate posibilitățile și arată că pentru o anumită valoare a lui  $\alpha$  bifurcația are loc la trecerea prin  $c = 2$ . Pentru simplificarea scrierii notăm  $a = (1-2c^{-1})^2/[4(1-c^{-1})]$ .

$\alpha > a$	$\alpha < a$
$c < 2$ focar asymptotic stabil	nod asymptotic stabil
$c = 2$ centru	imposibil deoarece $\alpha > 0$
$c > 2$ focar instabil	nod instabil

#### 7.4. Teorema Hopf a bifurcației

În acest paragraf ne propunem să punem în evidență felul în care soluțiile periodice ale unor sisteme diferențiale autonome apar din variația punctelor de echilibru în raport cu parametrii. În mod necesar cîmpurile vectoriale  $\mathbf{X}$  la care sunt atașate aceste sisteme nu sunt cîmpuri potențiale, nici biscalare, și nici cîmpuri pentru care  $(D_x \mathbf{X}, \mathbf{X})$  nu se anulează în nici un punct deoarece acesta nu admite linii de cîmp închise (v. 5.1, 8.4, 9.1). De asemenea, bifurcația curentului periodic nu poate să apară la cîmpurile vectoriale definite pe  $\mathbb{R}$ , ci numai la cîmpurile vectoriale definite cel puțin pe  $\mathbb{R}^2$ .

Fie  $\mathbf{X}(x, c) = (X_1(x, c), \dots, X_n(x, c))$  un cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , care depinde de parametrul real  $c$  și

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x, c), \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n(x, c) \quad (8)$$

sistemul diferențial care determină liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$ . Presupunem că sistemul algebric

$$X_1(x, c) = 0, \dots, X_n(x, c) = 0$$

admete o soluție izolată  $x_1 = x_1(c), \dots, x_n = x_n(c)$ ,  $c \in I$ . Aceasta este un punct de echilibru izolat al sistemului diferențial (8).

Fie  $\frac{dx}{dt} = A(c)x$ ,  $A(c) = \left[ \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x(c), c) \right]$  sistemul liniar care approximează pe (8) într-o vecinătate a punctului de echilibru  $x = x(c)$ . Notăm cu  $\lambda_1(c), \dots, \lambda_n(c)$  valorile proprii (în mulțimea numerelor complexe) ale matricei  $A(c)$  și presupunem că

$$\lambda_1(c) = \alpha(c) + i\beta(c), \lambda_2(c) = \alpha(c) - i\beta(c) = \overline{\lambda_1(c)}.$$

Dacă  $n > 2$ , se adaugă și ipoteza

$$\operatorname{Re}\lambda_3(c) < 0, \dots, \operatorname{Re}\lambda_n(c) < 0, \quad c \in I.$$

Presupunem că există o valoare izolată  $c_0 \in I$  astfel încât  $\alpha(c_0) = 0$ ,  $\beta(c_0) \neq 0$  și  $\frac{d\alpha}{dc}(c_0) > 0$  (aceasta înseamnă că la trecerea lui  $c$  prin  $c_0$  funcția  $c \rightarrow \alpha(c)$  trece de la valori negative la valori pozitive; evident se poate considera și inegalitatea opusă). Valoarea  $c_0$  se numește *valoarea critică* a parametrului  $c$ .

În ipotezele precedente E. Hopf a arătat că are loc una și numai una dintre următoarele trei situații.

*Situația 1.* Punctul de echilibru  $x_0 = x(c_0)$  este un centru, adică există o mulțime infinită de orbite închise concentrice în jurul lui  $x_0$ . În acest caz, pentru  $c \neq c_0$  dar vecin cu  $c_0$ , nu există nici o orbită periodică în jurul lui  $x(c)$ .

*Situația 2.* Există un număr  $b > c_0$  astfel încât pentru fiecare  $c \in (c_0, b)$  există o orbită închisă și numai una în jurul punctului de echilibru  $x(c)$  într-o vecinătate a acestui punct. Această familie cu un parametru de orbită închisă se bifurcă în punctul de echilibru  $x(c)$  în sensul că, dacă  $c \rightarrow c_0$ , atunci diametrul orbitelor închise variază cu  $|c - c_0|^{1/2}$ . În acest caz, pentru  $c \leq c_0$ ,  $c \in I$ , nu există orbite închise vecine cu  $x(c)$ .

*Situația 3.* Există un număr  $a < c_0$  astfel încât pentru fiecare  $c \in (a, c_0)$  există o orbită închisă și numai una în jurul punctului de echilibru  $x(c)$  într-o vecinătate a acestui punct. Această familie cu un parametru de orbită închisă se bifurează în modul explicitat mai înainte. Pentru  $c \geq c_0$  nu există orbite închise vecine cu  $x(c)$ .

În loc de demonstrație comentăm geometria teoremei Hopf. Ipotezele  $\operatorname{Re}\lambda_3(c) < 0, \dots, \operatorname{Re}\lambda_n(c) < 0$ ,  $c \in I$ ,  $\alpha(c_0) = 0$ ,  $\beta(c_0) \neq 0$ , garantează că contribuția funcțiilor proprii asociate lui  $\lambda_3, \dots, \lambda_n$  la soluția aproximării liniare tind către zero pentru  $t \rightarrow \infty$ , în timp ce contribuția funcțiilor proprii asociate lui  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  supraviețuiește.

Reamintim că: 1) fiecărei valori proprii reale i se asociază un subspațiu propriu real unidimensional (dreapta în  $\mathbb{R}^n$ ) care conține punctul de echilibru  $x_j = x_j(c_0)$ ,  $j = 1, \dots, n$ ; 2) fiecărei perechi de valori proprii complex conjugate i se asociază un subspațiu propriu real bidimensional (plan în  $\mathbb{R}^n$ ) care conține punctul de echilibru (în spațiul fazelor). Înținând seama de aceasta, rezultă că, fiind dat un punct  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  vecin cu punctul de echilibru  $x_j = x_j(c_0)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , linia de cimp prin  $x^*$  tindă în timp fie către punctul de echilibru, fie către planul prin punctul de echilibru generat de funcțiile proprii (sinus, cosinus) asociate cu  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$ . Astfel concentrăm teorema Hopf în observația că dacă ne oprim la aproximarea liniară, atunci evoluția interesantă (partea din soluție care nu dispare) aparține unui plan ce conține punctul de echilibru.

Demonstrațiile moderne [27, 30, 35] ale teoremei Hopf pun în evidență că pentru sistemele diferențiale neliniare există (în spațiul fazelor) o suprafață (subvarietație 2-dimensională) care conține punctul de echilibru și care joacă rolul planului de la sistemele liniare asociat cu  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$ . Această suprafață se numește *varietate centru*. Astfel, oricare ar fi  $n \geq 2$ , singurele posibilități topologice de apariție a orbitelor închise în afara punctelor de echilibru sunt exact posibilitățile din cazul  $n = 2$ . Ipotezele „ $X$  de clasă  $C^\infty$ ,  $\beta(c_0) = 0$ ,  $\frac{dz}{dc}(c_0) > 0$ ” limitează cazurile posibile la cele deja prezentate.

**O b s e r v a t i i . 1)** Din cauza existenței varietății centru, bifurcațiile Hopf sunt fenomene 2-dimensionale.

2) Inegalitatea  $\frac{dz}{dc}(c_0) < 0$  se poate transforma în inegalitatea opusă înlocuind pe  $c$  respectiv cu  $c_0 - c$ ,  $1/c$  etc.

3) Dacă sistemul diferențial depinde de mai mulți parametri reali, atunci din context trebuie depistat parametrul a cărui variație ar putea produce bifurcație Hopf.

4) În ipotezele teoremei Hopf se constată că  $\operatorname{div} A(c)x|_{c=c_0} = \text{urma } A(c_0) < 0$ . Prin continuitate,  $\operatorname{div} A(c)x$  rămâne strict negativă pe o vecinătate a lui  $c_0$  și deci familia de curenti generați de  $A(c)x$ ,  $c \in (c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon)$ , micșorează volumul.

**Aplicații 7.8. Ecuarea van der Pol.** Ecuările circuitului electric RLC schițat în fig. 1.20 sunt

$$i_C = \frac{dv_C}{dt}, \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad v_R = \Phi(i_R), \quad i_R = i_L = -i_C, \quad v_R + v_L = v_C.$$

unde  $i$ -urile sint *curenții* pe ramurile indicate prin indici și  $v_R = \Phi(i_R)$  este *legea Ohm generalizată* (caracteristică a rezistorului  $R$ ). Notind  $i_L = x$ ,  $v_C = -(L/C)^{1/2}y$ ,  $t = (LC)^{1/2}\tau$ , ecuaările precedente se transcriu

$$\frac{dx}{d\tau} = -y - f(x), \quad \frac{dy}{d\tau} = x,$$

unde  $f(x) = (L/C)^{1/2}\Phi(x)$ . Dacă rezistența este descrisă de funcția  $f(x) = -\mu x + x^3$ , atunci sistemul precedent este o formă a *ecuației van der Pol*. Parametrul real  $\mu$  controlează mărimea „rezistenței negative”.

Pentru orice  $\mu$  punctul  $x = 0, y = 0$  este un punct de echilibru. Matricea asociată aproximării liniare are valorile proprii  $\lambda_{1,2} = (\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4})/2$ . Acestea sunt: (1) reale negative, pentru  $\mu \leq -2$ , (2) complexe conjugate cu partea reală negativă, pentru  $-2 < \mu < 0$ , (3) complexe conjugate cu partea reală pozitivă, pentru  $0 < \mu < 2$ , (3) reale pozitive, pentru  $\mu \geq 2$ .

Dacă  $\mu < 0$ , atunci punctul de echilibru  $(0, 0)$  este asimptotic stabil. Dacă  $\mu$  crește trecind prin zero, punctul de echilibru  $(0, 0)$  își pierde stabilitatea datorită valorilor proprii  $\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ , unde  $\alpha(\mu) = \mu/2$  și  $\beta(\mu) = \sqrt{1 - \alpha^2(\mu)}$ . Deoarece  $\alpha'(0) = 1/2 > 0$ , se aplică teorema Hopf: există o familie de soluții periodice care se bifurcă din  $(0, 0)$ .

### 7.9. Sistemul Lorenz. Sistemul diferențial autonom

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \quad \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \quad \frac{dz}{dt} = xy - bz,$$

unde  $\sigma, r, b$  sunt parametri reali, a fost modelul matematic acceptat de Lorenz pentru turbulența dinamică a unui fluid [34]. Soluțiile acestui sistem sunt definite pe toată axa reală (v. 3.6).

Presupunând că  $\sigma$  și  $b$  sunt valori fixate, iar  $r$  rămâne ca parametru, cercetăm bifurcația în raport cu  $r$ .

Dacă  $\sigma \neq 0$  și  $b(r-1) > 0$ , atunci punctele de echilibru ale sistemului Lorenz sunt

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0; \quad x = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad y = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z = r-1.$$

Ne oprim la punctul de echilibru  $x_0 = \sqrt{b(r-1)}$ ,  $y_0 = \sqrt{b(r-1)}$ ,  $z_0 = r-1$ , care conduce la rezultate mai interesante. Matricea jacobian, adică matricea aproximării liniare în vecinătatea lui  $(x_0, y_0, z_0)$ , este

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -x_0 \\ x_0 & y_0 & -b \end{bmatrix}.$$

Această matrice are polinomul caracteristic

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(r + \sigma)\lambda + 2b\sigma(r - 1).$$

Tinind seama că polinomul de gradul trei, care are rădăcina reală  $\alpha$  și rădăcinile pur imaginare  $\pm i\beta$ , este  $\lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \beta^2\lambda - \alpha\beta^2$ , ajungem la concluzia că valoarea critică  $r_0$  a parametrului  $r$  trebuie să satisfacă relațiile

$$\alpha = -(\sigma + b + 1), \quad \pm i\beta = \pm \sqrt{b(r_0 + \sigma)}, \quad 2b\sigma(r_0 - 1) = b(r_0 + \sigma)(\sigma + b + 1).$$

Din ultima relație rezultă  $r_0 = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$  și

$$b(r_0 + \sigma) = 2b\sigma(\sigma + 1)/(\sigma - b - 1)$$

este pozitivă dacă  $\sigma > b + 1$ .

Presupunem  $\sigma > 0$ ,  $b > 0$  și deci  $r > 1$ . Înținind seama că soluția  $\lambda$  a ecuației caracteristice  $\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(r + \sigma)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0$  este funcție de  $r$ , prin derivare în ambii membri, găsim

$$\lambda'(r) = -b(\lambda + 2\sigma)/[3\lambda^2 + 2(\sigma + b + 1)\lambda + b(r + \sigma)].$$

Rezultă

$$\alpha'(r_0) = \operatorname{Re}\lambda'(r_0) = \frac{b(\sigma - b - 1)}{2[\beta^2(r_0) + (\sigma + b + 1)^2]} > 0.$$

Cu acestea am demonstrat că suntem în condițiile teoremei Hopf și deci pierderea stabilității în  $r = r_0$  conduce la bifurcație de tip Hopf.

### 7.10. Sistemul Goodwin

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+z^n} - ax, \quad \frac{dy}{dt} = x - by, \quad \frac{dz}{dt} = y - cz,$$

unde  $a, b, c$  sunt parametri reali strict pozitivi,  $n$  este un număr natural fixat, modelează procese biochimice cu feedback negativ (v. 4.4).

Fixăm pe  $a$  și  $b$  și lăsăm pe  $c$  drept parametru. Cercetăm prezența bifurcației Hopf în raport cu  $c$ .

Punctul de echilibru al sistemului este  $(x_0, y_0, z_0)$  cu  $x_0 = bcz_0$ ,  $y_0 = cz_0$ , unde  $z_0$  este soluția strict pozitivă a ecuației  $\frac{1}{1+z^n} = abc$  (v. 4.4). Aproximarea liniară a sistemului în vecinătatea lui  $(x_0, y_0, z_0)$  are matricea

$$\begin{bmatrix} -a & 0 & -nz_0^{n-1}/(1+z_0^n) \\ 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & -c \end{bmatrix},$$

iar polinomul caracteristic al acestei matrice are expresia

$\lambda^3 + (a + b + c)\lambda^2 + (ab + ac + bc)\lambda + abc + nz_0^{n-1}/(1+z_0^n)$ . Identificind acest polinom cu polinomul de gradul trei care are rădăcina reală  $\alpha$  și rădăcinile pur imaginare  $\pm i\beta$  (vezi exemplul precedent), deducem că valoarea critică  $c_0$  (dacă există) a lui  $c$  trebuie să satisfacă  $\alpha = -(a+b+c_0)$ ,  $\beta^2 = ab + (a+b)c_0$ ,  $abc_0 + nz_0^{n-1}/(1+z_0^n) = (a+b+c_0)[ab + (a+b)c_0]$ .

Notând  $a+b = A$ ,  $ab = B$ ,  $\frac{nz_0^{n-1}}{1+z_0^n} = D$ , ultima ecuație se transcrie  $Ac_0^2 + A^2c_0 + AB - D = 0$ .

Pentru  $A^3 - 4AB + 4D \geq 0$  aceasta are rădăcini reale și, dacă adăugăm condiția  $D > AB$ , rădăcina  $c_0 = \frac{-A^2 + \sqrt{A^4 - 4A^2B + 4AD}}{2A}$  este strict pozitivă.

Ecuația implicită

$$\lambda^3 + (a + b + c)\lambda^2 + (ab + ac + bc)\lambda + abc + nz_0^{n-1}/(1+z_0^n) = 0$$

defineste  $\lambda$  pe ca funcție de  $c$ , iar derivata acestei funcții se poate obține derivând ambii membri ai ecuației precedente în raport cu  $c$ . Rezultă

$$3\lambda^2\kappa' + \lambda^2 + 2(A + c)\lambda\kappa' + A\lambda + (B + Ac)\kappa' + B = 0$$

și deci

$$\kappa'(c) = (-\lambda^2 - A\lambda - B)/[3\lambda^2 + 2(A + c)\lambda + B + Ac]$$

De aici găsim

$$\alpha'(c_0) = \operatorname{Re}\lambda'(c_0) = \frac{-(A+c_0)^2 + A(A+c_0) - B}{3(A+c_0)^2 - 2(A+c_0)^2 + B + Ac_0} = \frac{-c_0^2 - Ac_0 - B}{\beta^2(c_0) + (A+c_0)^2} < 0.$$

În concluzie, la trecerea lui  $c$  prin  $c_0$  se pierde stabilitatea punctului de echilibru și apare bifurcația Hopf. Simetria polinomului caracteristic în  $a, b, c$  face ca oricare dintre parametrii  $a, b, c$  să indeplinească rolul descris mai înainte.

**7.11.** Procesele biochimice cu feedback pozitiv descrise de sistemul

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+z^n}{k+z^n} - ax, \quad \frac{dy}{dt} = x - by, \quad \frac{dz}{dt} = y - cz,$$

unde  $a, b, c \in (0, \infty)$ ,  $k > 1$  sunt parametri, iar  $n \in \mathbb{N}$  este fixat, nu beneficiază de bifurcație Hopf în raport cu  $c$  (și deci nici în raport cu  $a$  sau  $b$ ) pentru punctul de echilibru  $(x_0, y_0, z_0)$  cu

$$x_0 = bcz_0, y = cz_0, \text{ unde } z_0 \text{ este una dintre soluțiile pozitive ale ecuației } \frac{1+z^n}{k+z^n} = abc, \text{ (v. 4.4).}$$

Într-adevăr, polinomul caracteristic al matricei aproximării liniare în vecinătatea lui  $(x_0, y_0, z_0)$  este

$$\lambda^3 + (a+b+c)\lambda^2 + (ab+ac+bc)\lambda + abc - \varphi'(z_0) = 0,$$

unde  $\varphi(z) = (1+z^n)/(k+z^n)$  și deci  $\varphi'(z_0) > 0$ , iar identificarea sa cu polinomul  $\lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \beta^2\lambda - \alpha\beta^2$ , care are rădăcina reală  $\alpha$  și rădăcinile pur imaginare  $\pm i\beta$ , dă sistemul

$$\alpha = -(a+b+c_0), \quad \beta^2 = ab + (a+b)c_0, \quad abc_0 - \varphi'(z_0) = (a+b+c_0)[ab + (a+b)c_0].$$

Dar ultima ecuație a acestui sistem, de gradul doi în  $c_0$ , nu admite soluție strict pozitivă, cum cere ipoteza din problemă asupra lui  $c$ .

## 7.5. Probleme propuse

**1.** Să se verifice că varietatea de echilibru atașată sistemului diferențial  $\frac{dx}{dt} = cy + x(x^2 + y^2)$ ,  $\frac{dy}{dt} = -cx + y(x^2 + y^2)$  nu prezintă bifurcații.

**2.** Se dau sistemele diferențiale

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = cx - cy - x^2 + y^2 \\ \frac{dy}{dt} = cy + xy \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3cx - 5cy - x^2 + y^2 \\ \frac{dy}{dt} = 2cx - xy \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3cx - 3cy - x^2 + y^2 \\ \frac{dy}{dt} = cx - xy \end{array} \right\},$$
  

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = cx - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = -2cx + 2cy + xy - y^2 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = cy + xy \\ \frac{dy}{dt} = -cx + cy + x^2 + y^2 \end{array} \right\},$$

unde  $c$  este un parametru real. Pentru fiecare caz în parte să se determine multimea de echilibru și multimea bifurcație, precizând valorile lui  $c$  în

care se produce bifurcația punctelor de echilibru. Să se discute în raport cu c stabilitatea punctelor de echilibru.

**3.** Să se verifice că pentru orice număr real  $\alpha$  mulțimea  $M_\alpha = \{(x, y) | y = \alpha e^{1/x}, x < 0\} \cup \{(x, y) | x \geq 0, y = 0\}$  este varietatea centru a sistemului  $\frac{dx}{dt} = x^2, \frac{dy}{dt} = -y$ .

**4.** Să se arate că sistemul analitic  $\frac{dx}{dt} = -x^2, \frac{dy}{dt} = -y + x^2$  nu admite varietate centru analitică.

**I n d i c a ț i e .** Rezultă seria divergentă  $y = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)! x^n$ .

**5.** Fie cîmpul vectorial  $\mathbf{X}(x, y, z, c) = ((c-1)x - y + xz, x + (c-1)y + yz, cz - (x^2 + y^2 + z^2))$ , unde  $c$  este un parametru real. Să se arate că dacă  $c \in (1/2, 1)$  atunci  $\mathbf{X}$  are o linie de cîmp periodică situată într-un plan. Să se determine zerourile cîmpului și să se cerceteze stabilitatea acestora.

**I n d i c a ț i e .**  $\alpha(t) = (R(c) \cos t, R(c) \sin t, 1-c)$ .

**6.** Se consideră schimbarea de variabile  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ . Ce devine prin această schimbare sistemul diferențial care dă liniile de cîmp, dacă  $\mathbf{X}$  este cîmpul vectorial din problema precedentă?

**7.** Fie cîmpul vectorial  $\mathbf{X}(x, y, z, c) = (cx - y, x + cy, -z + xy)$ , unde  $c$  este un parametru real. Să se cerceteze stabilitatea punctului de echilibru  $(0, 0, 0)$ . Pentru  $c = 0$  să se descrie condițiile inițiale care produc soluții periodice.

**8.** Unele reacții chimice autocatalitice cu difuzie sunt descrise de sistemul diferențial

$$\frac{dx}{dt} = -(b+1)x + x^2 y + a, \quad \frac{dy}{dt} = bx - x^2 y,$$

unde  $a$  și  $b$  sunt parametri reali strict pozitivi. Să se determine punctul de echilibru și să se cerceteze stabilitatea. Să se cerceteze dacă variația lui  $b$  generează bifurcație.

**9.** Considerăm două recipiente despărțite de o membrană comună de difuzie. Fie  $x_1, x_2, x_3$  concentrațiile a trei substanțe chimice situate într-unul dintre recipiente și  $y_1, y_2, y_3$ , respectiv, concentrațiile acelorași substanțe situate în celălalt recipient. Presupunem că are loc difuzia și că  $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$  sunt legate prin sistemul diferențial

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(y - x) + \varphi(x), \quad \frac{dy}{dt} = Ay + B(x - y) + \varphi(y),$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} -0,1 & -1 & 0,8 \\ 1 & -0,1 & 0 \\ 0,8 & 0 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & c/2 \end{bmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{bmatrix} -x_1 x^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Să se cerceteze bifurcația Hopf.

**I n d i c a ḥ i e .** Valorile de bifurcație ale lui  $c$  sunt  $c_1 = 0,2314$  și  $c_2 = 1,9953$ . Trei dintre valorile proprii,  $-0,1$  și  $-0,1 \pm 0,6i$ , sunt și valori proprii ale lui  $2A$ . Celelalte trei sunt și valori proprii ale lui  $A - 2B$ .

**10.** Comportarea dinamică a două reactoare cu rezervoare mobile, cu reacție de primul ordin și reciclare, este descrisă de *sistemul autonom Kubiček* [32]

$$\frac{dx_1}{dt} = 0,2x_3 - x_1 + \alpha(1 - x_1) \exp_{\gamma} x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0,2x_4 - x_2 + 12 \alpha(1 - x_1) \exp_{\gamma} x_2 - 2x_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 5\alpha[x_1 - x_3 + 0,2(1 - x_3) \exp_{\gamma} x_4],$$

$$\frac{dx_4}{dt} = 5\alpha[x_2 - x_4 + 2,4(1 - x_3) \exp_{\gamma} x_4 - 2x_4],$$

unde  $\exp_{\gamma} x = \exp\left(\frac{x}{1+x/\gamma}\right)$ ,  $\gamma = 1000$ , iar  $\alpha$  este un parametru real.

Să se arate că în punctele  $\alpha_1 = 0,09556$ ;  $\alpha_2 = 0,1574$ ;  $\alpha_3 = 0,2730$  se produce bifurcația Hopf.

## 8. SUBVARIETĂȚI ORTOGONALE LINIILOR DE CÎMP

Teoria expusă în acest capitol are la bază un concept de transversalitate : spațiul euclidian  $\mathbb{R}^n$  este suma directă dintre subspațiile ortogonale ce se identifică cu  $\mathbb{R}$  și  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Subvarietațile ortogonale liniilor de cîmp sunt soluții ale ecuațiilor Pfaff atașate cîmpurilor vectoriale. Ca „secțiuni” ortogonale orbitelor, ele dă cele mai bune informații despre evoluția sistemului fizic descris local de cîmpul vectorial. Definiția acestora și exemplele standard sunt date în 8.1.

Complet integrabilitatea unei ecuații Pfaff pe o mulțime deschisă și conexă  $D$  este echivalentă cu faptul că prin fiecare punct al mulțimii  $D$  trece o hipersuprafață ortogonală liniilor de cîmp (v. 8.2). Acesta este un rezultat teoretic bun, dar cu șanse mici de folosire. Salvarea este teorema Frobenius care reduce problema complet integrabilității la efectuarea unor calcule simple (v.8.3).

Complet integrabilitatea unei ecuații Pfaff se traduce prin noțiunile de cîmp vectorial local potențial sau local biscalar. Cele mai potrivite exemple pentru asemenea cazuri sunt cîmpurile vectoriale newtoniene, cîmpurile vectoriale electrostatice, cîmpurile vectoriale torsionale și cîmpurile vectoriale care descriu sistemele termodinamice. În cazul spațiului cu trei dimensiuni condiția de (local) biscalaritate se reduce la ortogonalitatea dintre cîmpul vectorial dat și rotorul acestuia (v. 8.4).

Un cîmp vectorial definește o distribuție transversală  $(n-1)$ -dimensională, care poate să fie sau nu integrabilă. Dacă această distribuție este integrabilă, atunci hipersuprafețele integrale ale sale determină o stratificare a mulțimii deschise și conexe pe care se lucrează ; dacă această distribuție nu este integrabilă, atunci mulțimea tuturor varietaților sale integrale este un spațiu neolonon (v. 8.5). Teoria generală a spațiilor neolonomne are aplicații în mecanica analitică, termodinamică etc. [70].

Orbitele unui cîmp vectorial se pot exprima (local) în mai multe moduri : ca intersecții de familiile de hipersuprafețe, ca intersecție dintre familiile de hipersuprafețe și spații neolonomne sau ca intersecție de spații neolonomne (v. 8.6).

În 8.7 se analizează fapte care conduc la definiția hiperevadricelor neolonomne, demonstrând o teoremă originală (în raport cu bibliografia). În 8.8 se menționează probleme deschise, iar problemele propuse în 8.9 se referă la ecuații Pfaff complet integrabile, cîmpuri vectoriale biscaleare, distribuții, evadrice neolonomne, intersecții de suprafețe și spații neolonomne etc.

Liniile de cîmp și subvarietațile ortogonale lor sunt intuitiv corelative. Există totuși o diferență ontologică între noțiunea de linie de cîmp și cea de subvarietație ortogonală liniilor de cîmp. De exemplu, în reprezentarea matematică a fenomenelor mecanice, linia de cîmp indică traectoria pe care o urmăză un mobil plasat într-un punct din domeniul de definiție al cîmpului, din momentul în care se poate găsi un mobil sensibil la tipul de cîmp considerat (linia de cîmp atât de intuițiiile corpusculare) pe cind o subvarietație ortogonală liniilor de cîmp indică posibilitatea egală de mișcare a unei infinități de mobile (suprafața ortogonală liniilor de cîmp și de intuițiiile ondulatorii).

### 8.1. Subvarietațи ortogonale liniilor de cîmp

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , fără zerouri pe  $D$ . Cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  îi se atașează o familie de hiperplane  $\Omega_x$ ,  $x \in D$ , fiecare hiperplan  $\Omega_x$  fiind determinat de un punct  $x$  și de vectorul normal  $\mathbf{X}(x)$ . Evident, hiperplanul  $\Omega_x$  este ortogonal liniei de cîmp care trece prin punctul  $x$ .

Subvarietățile  $M$  ale lui  $D$  cu proprietatea că restricția cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  la  $M$  este un cîmp vectorial normal la  $M$  se numesc *subvarietăți ortogonale liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$* .

Fie  $M$  o subvarietate a lui  $D$  și  $T_x M$  spațiul tangent la  $M$  în punctul  $x \in M$ . Subvarietatea  $M$  este ortogonală liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  dacă și numai dacă  $T_x M \subseteq \Omega_x \subset T_x D = T_x \mathbb{R}^n$ ,  $\forall x \in D$  (subvarietatea  $M$  este tangentă în fiecare punct  $x \in M$  la hiperplanul  $\Omega_x$ ). Dimensiunea unei subvarietăți ortogonale liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  este cel mult  $n-1$ .

Tinînd seama că  $(dx_1, \dots, dx_n)$  este un vector din hiperplanul  $\Omega_x$ , rezultă că subvarietățile ortogonale liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  sunt caracterizate prin ecuația

$$X_1(x) dx_1 + \dots + X_n(x) dx_n = 0, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

numită *ecuație Pfaff pe  $D$* .

Subvarietățile ortogonale liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  se numesc *varietăți integrale* (sau *soluții*) ale *ecuației Pfaff* (1).

Din punct de vedere local, o varietate integrală  $M$  de dimensiune  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  a ecuației Pfaff (1) este caracterizată

(I) fie printr-o imersie  $f = (f_1, \dots, f_n) : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ ,  $u = (u_1, \dots, \dots, u_k) \rightarrow f(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u))$  care satisfacă

$$\sum_{i=1}^n X_i(f(u)) \frac{\partial f_i}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

(II) fie printr-un sistem de ecuații carteziene implicate  $F_1(x) = 0, \dots, \dots, F_{n-k}(x) = 0$  atașate submersiei  $F = (F_1, \dots, F_{n-k}) : U \subset D \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , cu proprietatea că ecuația Pfaff (1) este o consecință a ecuațiilor  $F_1(x) = 0, \dots, F_{n-k}(x) = 0$ ,  $dF_1(x) = 0, \dots, dF_{n-k}(x) = 0$ .

Noțiunea de varietate integrală de dimensiune 1 se poate extinde în felul următor: o imersie  $\alpha : I \rightarrow D$ ,  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  se numește *curbă integrală a ecuației Pfaff* (1) dacă

$$X_1(\alpha(t)) \frac{dx_1}{dt} + \dots + X_n(\alpha(t)) \frac{dx_n}{dt} = 0 \quad (1')$$

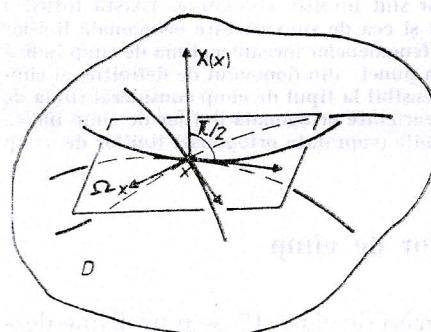


Fig. 8.1

Existența curbelor integrale este evidentă, fiind condiționate doar de o singură ecuație diferențială de ordinul întâi (1') cu  $n$  funcții necunoscute. De aceea se observă că prin fiecare punct  $x$  al lui  $D$  trec o infinitate de curbe integrale ale ecuației Pfaff (1) (fig. 8.1). Existența subvarietăților integrale de dimensiune  $k \in \{2, \dots, n-2\}$  nu se discută în această carte.

Problema existenței și unicității hipersuprafețelor integrale (subvarietăți de dimensiune  $n-1$  în  $D \subset \mathbb{R}^n$ ) prin fiecare punct  $x$  al lui  $D$  este cea mai dificilă, dar și cea mai importantă. În paragrafele următoare vom arăta că această problemă se reduce la exis-

tența unui cîmp scalar local ale cărui hipersuprafețe de nivel constant sunt hipersuprafețe integrale ale ecuației Pfaff.

Parafrazînd rezultate cunoscute din teoria cîmpurilor vectoriale irotaționale (v. 2.1), ajungem la teorema următoare.

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial irotațional pe  $D$ , care nu se anulează nicăieri și  $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  un punct din  $D$ .

1) Dacă  $D$  este un interval  $n$ -dimensional, atunci hipersuprafețele de nivel constant ale funcției

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i0}}^{x_i} X_i(x_{10}, \dots, x_{i-10}, x_i, \dots, x_n) dx_i.$$

sunt hipersuprafețe ortogonale liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$ .

2) Dacă  $D$  este o mulțime convexă, atunci hipersuprafețele de nivel constant ale funcției

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 (X(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0) dt$$

sunt hipersuprafețe ortogonale liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$ .

*Demonstrație.* Se constată că  $\mathbf{X} = \text{grad } f$ .

**O b s e r v a t i o n e.** Circulația cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  pe o curbă ortogonală liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  este nulă.

## 8.2. Ecuații Pfaff complet integrabile

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , fără zerouri pe  $D$  și

$$X_1(x) dx_1 + \dots + X_n(x) dx_n = 0 \quad (2)$$

ecuația Pfaff atașată acestui cîmp. Ecuația Pfaff (2) se numește *exactă* dacă cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  este potențial, adică dacă există  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  de

clasă  $C^2$  astfel încît  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = X_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sau echivalent  $df(x) =$

$= \sum_{i=1}^n X_i(x) dx_i$ . În consecință (v. 2.1), pe o mulțime deschisă, conexă și

simplu conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , ecuația Pfaff (2) este exactă dacă și numai dacă cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  este irotațional.

Presupunem că ecuația Pfaff (2) nu este exactă. Uneori există o funcție neconstantă  $\mu: D \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  de clasă  $C^1$  astfel încît

$$\mu(x) X_1(x) dx_1 + \dots + \mu(x) X_n(x) dx_n = 0$$

să fie o ecuație exactă, adică să existe  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^2$  astfel încît

$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \mu(x) X_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sau echivalent  $dF(x) = \mu(x) \sum_{i=1}^n X_i(x) dx_i$ .

Funcția  $\mu$  se numește *factor integrant* și satisfac sistemul cu derive parțiale (consecință a teoremei Schwartz pentru  $F'$ )

$$\frac{\partial(\mu X_i)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial(\mu X_j)}{\partial x_i}(x), i \neq j.$$

Ecuatiile Pfaff local exacte și ecuațiile Pfaff care local admit factor integrant se numesc *ecuații complet integrabile*.

**Teoremă.** *Ecuatia Pfaff (2) este complet integrabilă dacă și numai dacă prin oricare punct  $x_0 \in D$  trece o hipersuprafață integrală a ecuației.*

*Demonstrație.* Presupunem că ecuația Pfaff (2) este local exactă, adică  $\forall x_0 \in D$  există o mulțime deschisă  $U \subset D$  care conține pe  $x_0$  și un cîmp scalar  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^2$  astfel încît  $df(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x) dx_i = 0$  pe  $U$ . Atunci prin  $x_0 \in D$  trece hipersuprafață integrală  $f(x) = f(x_0)$ .

Presupunem că ecuația Pfaff (2) admite factorul integrant local  $\mu$ , adică  $\forall x_0 \in D$  există o mulțime deschisă  $U \subset D$  care conține pe  $x_0$  și  $\mu: U \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  de clasă  $C^1$  și  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  de clasă  $C^2$  astfel încât  $dF(x) = \sum_{i=1}^n \mu(x) X_i(x) dx_i = 0$ . Atunci prin  $x_0 \in D$  trece hipersuprafață integrală  $F(x) = F(x_0)$ .

Presupunem că prin fiecare punct al lui  $D$  trece o hipersuprafață integrală a ecuației Pfaff (2), familia hipersuprafețelor fiind descrisă local prin  $G(x) = c$ . Rezultă  $dG(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i}(x) dx_i = 0$ . Deoarece ecuația

Pfaff (2) este o consecință a acestora, avem fie  $\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = X_i(x)$ , fie  $\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = \mu(x) X_i(x)$ , adică ecuația Pfaff (2) este sau local exactă sau admite un factor integrant local.

Mulțimea tuturor hipersuprafețelor integrale ale unei ecuații Pfaff complet integrabile se numește *soluția generală a ecuației*.

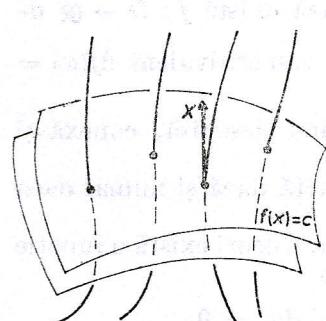


Fig. 8.2

În final, observăm că ecuația Pfaff (2) este complet integrabilă dacă și numai dacă există cîmpurile scalare locale  $\lambda$  și  $f$  astfel încât  $\mathbf{X} = \lambda \text{ grad } f$  (fig. 8.2). În acest caz hipersuprafețele de nivel constant ale lui  $f$  (familie cu un parametru de hipersuprafețe) sunt ortogonale liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$ . Pentru a fixa una dintre aceste hipersuprafețe este suficient să dăm un punct prin care să treacă.

**Complemente.** Fie  $\sigma$  o porțiune mărginită dintr-o hipersuprafață în  $D \subset \mathbb{R}^n$  descrisă de ecuația Pfaff complet integrabilă  $\sum_{i=1}^n X_i(x) dx_i = 0$ .

și de un punct pe care îl conține. Hipersuprafața  $\sigma$  este orientabilă deoarece cîmpul vectorial normal  $\mathbf{X}$  nu se anulează în nici un punct al lui  $\sigma$ .

Fie  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$  și  $N = \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}$  cîmpul vectorial unitar normal la  $\sigma$ . Numărul  $\int_{\sigma} (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) d\sigma$  se numește *fluxul lui  $\mathbf{Y}$  la traversarea lui  $\sigma$* .

Observăm că fluxul lui  $X = (X_1, \dots, X_n)$  la traversarea lui  $\sigma$  (hipersuprafață ortogonală liniilor de cîmp) este strict pozitiv, iar extremele funcției reale  $\mathbf{Y} \rightarrow \int_{\sigma} (\mathbf{Y}, \mathbf{N}) d\sigma$ ,  $\|\mathbf{Y}\| = 1$  se ating pe  $-\frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}$  și  $\frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}$ .

**Aplicația 8.1.** Să se găsească soluțiile generale ale următoarelor ecuații Pfaff:

$$1) x_1(x_1^2 + x_2^2 - a^2) dx_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 + a^2) dx_2 = 0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$2) (1 + \sin x_1) dx_1 + (2 + \sin x_2) dx_2 + \dots + (n + \sin x_n) dx_n = 0, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$3) x_1(x_2 - 1)(x_3 - 1) dx_1 + x_2(x_3 - 1)(x_1 - 1) dx_2 + x_3(x_1 - 1)(x_2 - 1) dx_3 = 0, x_i > 1.$$

*Rezolvare.* 1) Notăm  $X_1(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 + x_2^2 - a^2)$ ,  $X_2(x_1, x_2) = x_2(x_1^2 + x_2^2 + a^2)$ . Deoarece

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}(x) = 2x_1 x_2, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ecuația Pfaff este exactă. Determinăm

$$f(x) = \int_0^{x_1} t(t^2 + x_2^2 - a^2) dt + \int_0^{x_2} t(0^2 + t^2 + a^2) dt = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_1^2 x_2^2}{2} + \frac{a^2 x_2^2}{2} - \frac{a x_1^2}{2}.$$

Soluția generală este definită prin  $f(x) = c$ , unde  $c$  este o constantă arbitrară.

2) Fie  $X_i(x) = i + \sin x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Cîmpul vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  este irațional, iar  $\mathbb{R}^n$  este mulțime convexă. Calculăm

$$f(x) = \int_0^1 (\mathbf{X}(tx), x) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n (i + \sin t x_i) x_i dt = \sum_{i=1}^n (i x_i - \cos x_i).$$

Soluția generală este definită prin  $f(x) = c$ , unde  $c$  este o constantă arbitrară.

3) Mulțimea  $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 > 1, x_2 > 1, x_3 > 1\}$  este deschisă, conexă și simplu conexă. Notind  $X_1(x) = x_1(x_2 - 1)(x_3 - 1)$ ,  $X_2(x) = x_2(x_3 - 1)(x_1 - 1)$ ,  $X_3(x) = x_3(x_1 - 1)(x_2 - 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , se constată că  $\mu(x) = (x_1 - 1)^{-1} (x_2 - 1)^{-1} (x_3 - 1)^{-1}$  este o soluție a sistemului cu derivate parțiale

$$\frac{\partial(\mu X_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mu X_j)}{\partial x_i}, i, j = 1, 2, 3.$$

Deci  $\mu$  este un factor integrant. Prin înmulțire cu  $\mu$ , ecuația Pfaff se scrie în forma echivalentă

$$\left(1 + \frac{1}{x_1 - 1}\right) dx_1 + \left(1 + \frac{1}{x_2 - 1}\right) dx_2 + \left(1 + \frac{1}{x_3 - 1}\right) dx_3 = 0$$

sau  $d[x_1 + x_2 + x_3 + \ln(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)] = 0$ . Rezultă soluția generală  $x_1 + x_2 + x_3 + \ln(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) = c$ .

### 8.3. Teorema Frobenius

Fie  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , o mulțime deschisă și conexă, iar  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$ , care nu se anulează nicăieri. Cercetarea complet integrabilității ecuației Pfaff

$$X_1(x)dx_1 + \dots + X_n(x)dx_n = 0 \quad (2')$$

pe baza definițiilor din paragraful precedent este anevoieoașă. De aceea prezentăm o alternativă datorită lui Frobenius care, în situațiile concrete, se reduce la efectuarea unor calcule simple.

**Teoremă.** 1) Pentru  $n = 2$ , ecuația Pfaff (2') este complet integrabilă.

2) Pentru  $n \geq 3$ , ecuația Pfaff (2') este complet integrabilă dacă și numai dacă

$$X_i \left( \frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \right) + X_j \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) + X_k \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) = 0,$$

$i, j, k = 1, \dots, n$ .

*Demonstrație.* 1) Pentru  $n = 2$ , ecuația Pfaff (2') se reduce la o ecuație diferențială ordinată a cărei soluție generală (familie de curbe) este asigurată de teorema de existență și unicitate (locală).

2) Fie  $n \geq 3$ . Dacă ecuația Pfaff (2') este local exactă, atunci  $\text{rot } \mathbf{X} = \left[ \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right] = 0$  și condiția din teorema este verificată. Dacă ecuația Pfaff nu este local exactă, dar admite un factor integrant local  $\mu$ , adică există cîmpul scalar local  $\mu$  de clasă  $C^1$  și cîmpul scalar local  $F$  de clasă  $C^2$  astfel încît  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \mu(x)X_i(x)$ , atunci  $X_i = \frac{1}{\mu} \frac{\partial F}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , satisfac condițiile din teorema.

Presupunem că relațiile din teorema au loc. Dacă  $\text{rot } \mathbf{X} = 0$ , atunci ecuația Pfaff (2') este local exactă. Dacă  $\exists x_0 \in D$  astfel încât  $\text{rot } \mathbf{X}(x_0) \neq 0$ , atunci, fără a scădea generalitatea, acceptăm  $X_i(x_0) \neq 0$ ,  $i$  fiind fixat, și prin continuitate există o mulțime deschisă  $U \subset D$  care conține pe  $x_0$  și pe care se păstrează aceste relații. Înlocuind  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  cu  $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$  respectiv și pe  $x_i$  cu  $z$ , condițiile din teorema implică

$$\frac{\partial j_\beta}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial j_\beta}{\partial z} j'_\alpha = \frac{\partial j'_\alpha}{\partial u_\beta} + \frac{\partial j'_\alpha}{\partial z} f_\beta, \quad (*)$$

unde  $j_\alpha = -\frac{X_\alpha}{X_i}$ ,  $\alpha, \beta \in J := \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ , iar ecuația

Pfaff se transcrie sub forma

$$dz = \sum_{\alpha \in J} j'_\alpha(u_1, \dots, u_{i-1}, z, u_{i+1}, \dots, u_n) du_\alpha. \quad (**)$$

Dar relațiile (\*) sunt echivalente cu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = \frac{\partial^2 z}{\partial u_\beta \partial u_\alpha},$$

care nu sunt altceva decât condițiile de complet integrabilitate ale sistemului cu derivație partiale

$$\frac{\partial z}{\partial u_\alpha} = f_\alpha(u_1, \dots, u_{i-1}, z, u_{i+1}, \dots, u_n), \quad \alpha \in J,$$

echivalent cu ecuația cu diferențiale totale (\*\*) și deci cu ecuația Pfaff (2') pe  $U$ . Deci, prin  $x_0$  trece hipersuprafața integrală  $x_i = x_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ,  $i$  fiind fixat.

**Comentariu.** Conform teoremei precedente ecuației Pfaff (2') î se atașeză  $n^3$  funcții  $f_{ijk} : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_{ijk} = X_i \left( \frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \right) + X_j \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) + X_k \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Deoarece  $f_{ijk} = f_{jki} = f_{kij}$ ,  $f_{ijk} = -f_{ikj}$ ,  $f_{ijk} = -f_{jki}$ ,  $f_{ijk} = -f_{jik}$ , numai  $C_n^3$  dintre funcțiile  $f_{ijk}$  pot fi liniar independente (anume acelea pentru care  $i < j < k$ ). De exemplu: pentru  $n = 3$  rămîne doar o funcție  $f_{123}$ ; pentru  $n = 4$  rămîn patru funcții  $f_{123}, f_{124}, f_{134}, f_{234}$ ; pentru  $n = 5$  rămîn zece funcții etc.

Dacă una dintre funcțiile  $f_{ijk}$ ,  $i < j < k$ , nu este funcția zero, atunci ecuația Pfaff (2') nu este complet integrabilă. Aceasta este echivalentă cu faptul că există cel puțin un punct  $x_0 \in D$  astfel încît orice varietate integrală care trece prin  $x_0$  (și una trece oricum!) este de dimensiune cel mult  $n-2$ .

Chiar dacă ecuația Pfaff (2') nu este complet integrabilă, totuși ea poate să admite ca soluții și unele hipersuprafețe. În acest caz ecuația Pfaff (2') cit și ecuațiile  $f_{ijk}(x) = 0$ ,  $i < j < k$ , trebuie să fie identități condiționate în raport cu ecuațiile carteziene sau parametrice ale acestor hipersuprafețe. De exemplu, ecuația Pfaff  $xz \, dx + z(2x - y) \, dy - x^2 \, dz = 0$  nu este complet integrabilă, deoarece  $f_{123}(x, y, z) = 2xz(x - y)$ , dar admite soluția  $z = 0$  (planul  $xOy$ ).

**O b s e r v a t i i . 1.** În cazul  $n = 3$ , condiția de complet integrabilitate se transcrie  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) = 0$ .

2) Pe  $\mathbb{R}^n$  cîmpurile vectoriale pot fi identificate cu 1-formele fără a altera conținutul matematic și posibilitățile de reprezentare a problemelor concrete. Astfel, în loc de cîmpul vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , deseori este preferată utilizarea 1-formei diferențiale atașate  $\omega = X_1(x) \, dx_1 + \dots + X_n(x) \, dx_n$ , iar ecuația Pfaff se scrie simplu  $\omega = 0$ . Notind cu  $\delta$  diferențiala exterioră a 1-formei  $\omega$ , se deovedește că ecuația  $\omega = 0$  este complet integrabilă dacă și numai dacă  $\omega \wedge \delta \omega = 0$ , fapt echivalent cu afirmațiile teoremei precedente.

#### 8.4. Cîmpuri vectoriale biscałare

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$ . Presupunem că există două cîmpuri scalare  $\lambda$  de clasă  $C^1$  și  $j$  de clasă  $C^2$  pe  $D$  astfel încît  $\mathbf{X} = \lambda \text{ grad } j$ . Dacă  $\lambda$  și  $j$  sunt funcțional independente, atunci cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  se numește *biscalare*. Dacă  $\lambda$  și  $j$  sunt funcțional dependente, atunci se dovedește că  $\mathbf{X}$  este un cîmp potențial.

Liniile de cîmp ale unui cîmp vectorial biscałar sunt reparametrizări de linii de gradient (deci nu pot fi curbe închise).

Rezultatele din paragrafele precedente arată că un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă, care nu se anulează nicăieri, este un cîmp vectorial local potențial sau local biscałar dacă și numai dacă

admete o familie de hipersuprafețe ortogonale liniilor sale de cîmp. În consecință, cîmpurile de clasă  $C^1$  pe  $\mathbb{R}^2$ , care nu se anulează nicăieri, sunt sau local potențiale sau local biscaleare și este adeverată următoarea teoremă de caracterizare a cîmpurilor vectoriale local biscaleare pentru cazurile  $n \geq 3$ .

**Teorema.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , o mulțime deschisă și conexă și  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$  care nu se anulează în nici un punct și care este rotațional. Cîmpul  $\mathbf{X}$  este local biscalar dacă și numai dacă

$$X_i \left( \frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \right) + X_j \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) + X_k \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) = 0, \\ i, j, k = 1, \dots, n.$$

**Aplicația 8.2. 1)** Fie  $D$  o mulțime deschisă și conexă din  $\mathbb{R}^n$ . Un cîmp vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  pe  $D$  se numește torsional dacă există un cîmp scalar  $a$  pe  $D$  și un cîmp vectorial  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  pe  $D$  (toate de clasă convenabilă) astfel încit

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = a \delta_{ij} + X_i Y_j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

unde  $\delta_{ij}$  este simbolul lui Kronecker. Orice cîmp vectorial torsional  $\mathbf{X}$  este un cîmp local potențial sau local biscalar deoarece satisfacă condiția de complet integrabilitate din teorema Frobenius.

2) Fie  $x_1, \dots, x_n$  parametri de stare ai unui sistem termodinamic. Asimilăm pe  $x = (x_1, \dots, x_n)$  cu un punct din  $\mathbb{R}^n$  numit *stare* și presupunem că mulțimea stăriilor este un con deschis  $D$  cu vîrful în origine, care nu conține originea în interior (motiv impus de teoria funcțiilor omogene, v. 6.2). Se postulează că evoluția locală a sistemului termodinamic este descrisă de un cîmp vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  în care  $X_2, \dots, X_n$  sunt funcții omogene avind gradul de omogenitate zero pe  $D$  și cel puțin de clasă  $C^1$  pe  $D$ . Prin *evoluție* înțelegem fie o linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$ , fie o curbă ortogonală liniilor de cîmp, curbă numită *drum adiabatic*. Principiul al doilea al termodynamicii este echivalent cu faptul că  $\mathbf{X}$  este un anumit cîmp vectorial biscalar, adică  $\mathbf{X} = T \text{ grad } S$ , unde  $T$  este temperatura termodinamică, iar  $S$  este entropia sistemului. Evident, entropia sistemului este constantă în lungul drumurilor adiabatice.

Condiția ca  $\mathbf{X}$  să fie un cîmp vectorial local biscalar are o exprimare simplă în cazul  $n = 3$  și anume  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) = 0$ . Această relație arată că suprafețele ortogonale liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  trebuie căutate printre suprafețele de cîmp ale lui  $\text{rot } \mathbf{X}$  (suprafețe de vîrtej). Pornind de aici și lăsând deoparte cîmpurile irotaționale, J. Bertrand a dat următorul algoritm pentru obținerea cîmpurilor scalare locale funcțional independente  $\lambda$  și  $\beta$  pentru care  $\mathbf{X} = \lambda \text{ grad } \beta$ .

**Algoritmul lui J. Bertrand.** Presupunem  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) = 0$  și  $\varphi_1(x, y, z) = c_1$ ,  $\varphi_2(x, y, z) = c_2$  liniile de cîmp ale lui  $\text{rot } \mathbf{X}$  (linii de vîrtej) exprimate cu ajutorul integralelor prime  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$ . Avem  $(\text{grad } \varphi_1, \text{rot } \mathbf{X}) = 0$ ,  $(\text{grad } \varphi_2, \text{rot } \mathbf{X}) = 0$ , care împreună cu ipoteza  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) = 0$  implică „coplanaritatea” cîmpurilor vectoriale  $\mathbf{X}$ ,  $\text{grad } \varphi_1$ ,  $\text{grad } \varphi_2$ , adică  $\mathbf{X} = \alpha \text{ grad } \varphi_1 + \beta \text{ grad } \varphi_2$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$  (fig. 8.3). Noua reprezentare a lui  $\mathbf{X}$  permite transcrierea ecuației Pfaff sub forma

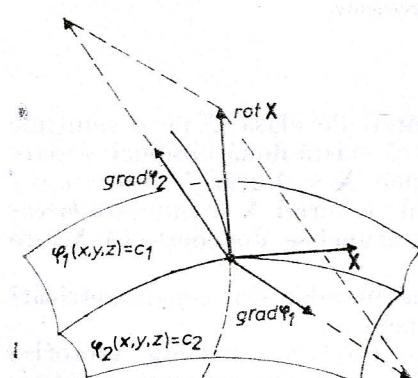


Fig. 8.3

$\alpha d\varphi_1 + \beta d\varphi_2 = 0$ . Să arătăm că  $\alpha/\beta$ , pentru  $\beta \neq 0$ , depinde numai de integralele prime  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$ . Într-adevăr, relațiile  $\mathbf{X} = \alpha \text{ grad } \varphi_1 + \beta \text{ grad } \varphi_2$ ,  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) = 0$  implică  $(\text{grad } \alpha/\beta, \text{grad } \varphi_1 \times \text{grad } \varphi_2) = 0$ , iar produsul mixt este jacobianul funcțiilor  $\alpha/\beta$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ . Rezultă  $\alpha/\beta = E(\varphi_1, \varphi_2)$  și deci  $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + E(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ . Soluția generală  $f(\varphi_1, \varphi_2) = c$  a acestei ecuații reprezintă familia suprafețelor ortogonale liniilor de cimp ale lui  $\mathbf{X}$ . Cind este cazul, din identitatea  $\mathbf{X} = \lambda \text{ grad } f$  se găsește  $\lambda$ .

**Aplicația 8.3.1**  $\mathbf{X}(x, y, z) = (yz, x(z-x), -xy)$  este un cimp local biscalar. Într-adevăr,  $\text{rot } \mathbf{X}(x, y, z) = (-2x, 2y, -2x)$  și deci  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) = 0$ .

Zerourile lui  $\mathbf{X}$  sunt punctele dreptelor  $Oy$ ,  $Oz$  și  $D : y = 0, x = z$ . Întrucit teoria precedentă elimină aceste puncte, se consideră că domeniul de definiție al lui  $\mathbf{X}$  este  $\mathbb{R}^3 \setminus (Oy \cup Oz \cup D)$ .

Familia liniilor de virtej ale lui  $\mathbf{X}$  este soluția generală a sistemului simetric

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-x},$$

adică  $xy = c_1$ ,  $x - z = c_2$ . Rezultă  $\mathbf{X}(x, y, z) = \alpha \text{ grad } (xy) + \beta \text{ grad } (x - z) = \alpha(y, x, 0) + \beta(1, 0, -1)$  și prin identificare găsim  $\alpha = z - x$ ,  $\beta = xy$ , adică  $\mathbf{X}(x, y, z) = (z - x) \text{ grad } (xy) + xy \text{ grad } (x - z)$ . Ecuația  $yz dx + x(z-x) dy - xy dz = 0$  se transcrie  $(z-x)d(xy) + xyd(x-z) = 0$  și deci  $xy = c(x-z)$  reprezintă familia suprafețelor ortogonale liniilor de cimp ale lui  $\mathbf{X}$ .

Din identitatea  $\mathbf{X} = \lambda \text{ grad } xy/(x-z)$  găsim  $\lambda = -(x-z)^2$ .

2) Fie  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  cimpul vectorial Killing de componente  $X_1(x) = 2x_2 - 3x_3$ ,  $X_2(x) = x_3 - 2x_1$ ,  $X_3(x) = 3x_1 - x_2$  pentru care se verifică relația  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) = 0$ . Aceasta înseamnă că  $\mathbf{X}$  este local biscalar sau că ecuația Pfaff  $(2x_2 - 3x_3)dx_1 + (x_3 - 2x_1)dx_2 + (3x_1 - x_2)dx_3 = 0$  este complet integrabilă.

Zerourile lui  $\mathbf{X}$  sunt caracterizate prin  $2x_2 - 3x_3 = 0$ ,  $x_3 - 2x_1 = 0$ ,  $3x_1 - x_2 = 0$ , adică sunt punctele dreptei de ecuații  $3x_1 - x_2 = 0$ ,  $2x_1 - x_3 = 0$ . Aceste zerouri sunt eliminate din domeniul de definiție de teoria formulată anterior.

Determinăm integralele prime ale sistemului liniilor de virtej  $\frac{dx_1}{-2} = \frac{dx_2}{-6} = \frac{dx_3}{-4}$ . Rezultă

$\varphi_1(x) = 3x_1 - x_2$ ,  $\varphi_2(x) = 2x_1 - x_3$ , care sunt funcțional independente..

Scriem  $\mathbf{X} = \alpha \text{ grad } \varphi_1 + \beta \text{ grad } \varphi_2$  și prin identificare obținem  $\alpha(x) = 2x_2 - x_3$ ,  $\beta(x) = x_2 - 3x_1$ . Cu acestea ecuația Pfaff se transcrie în forma

$$(2x_2 - x_3)d(3x_1 - x_2) + (x_2 - 3x_1)d(2x_2 - x_3) = 0$$

sau  $d\left(\frac{3x_1 - x_2}{2x_2 - x_3}\right) = 0$ . Soluția generală a ecuației Pfaff este definită prin  $\frac{3x_1 - x_2}{2x_2 - x_3} = c$ , adică

este o parte a unui fascicul de plane, mai puțin axa fasciculului care conține zerourile lui  $\mathbf{X}$ . Din

identitatea  $\mathbf{X} = \lambda \text{ grad } \frac{3x_1 - x_2}{2x_2 - x_3}$  rezultă  $\lambda =$

$$= \frac{1}{(2x_2 - x_3)^2}.$$

Sistemul simetric

$$\frac{dx_1}{2x_2 - 3x_3} = \frac{dx_2}{x_3 - 2x_1} = \frac{dx_3}{3x_1 - x_2}$$

arătă că orbitele lui  $\mathbf{X}$  au ecuațiile carteziene implicate  $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = c_1$ ,  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c_2$  și deci sunt cercuri. Axa fasciculului precedent de direcție  $(-1, -3, -2)$  nu este altceva decât normala orientată, care trece prin origine, comună planelor  $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = c$ , (fig. 8.4).

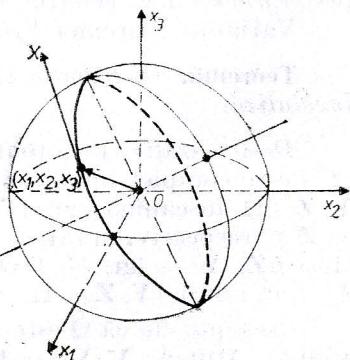


Fig. 8.4

## 8.5. Distribuția ortogonală unui cîmp vectorial

Fie  $D$  o mulțime deschisă și conexă din  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$ , fără zerouri pe  $D$  și

$$X_1(x) dx_1 + \dots + X_n(x) dx_n = 0 \quad (2'')$$

ecuația Pfaff asociată lui  $\mathbf{X}$  pe  $D$ . Dacă ecuația Pfaff (2'') este complet integrabilă și are soluția generală  $M_c : f(x) = c$ , atunci  $D$  poate fi privit ca reuniunea hipersuprafețelor de nivel constant  $M_c$  (care sunt mulțimi disjuncte). Cu alte cuvinte, o ecuație Pfaff complet integrabilă produce o stratificare (foliație) a lui  $D$  prin hipersuprafețe.

Presupunem că ecuația Pfaff (2'') nu este complet integrabilă (rezultă  $n \geq 3$ ), adică cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  nu posedă o familie de hipersuprafețe ortogonale liniilor de cîmp. Și în acest caz ecuația Pfaff determină o „stratificare” a lui  $D$  prin varietăți integrale de dimensiuni maxim posibile, dar aceasta este esențial diferită de cea din cazul complet integrabil, deoarece fiecare „strat” are dimensiunea cel mult  $n - 2$  și cel puțin 1 (accidental, dimensiunea poate fi și  $n - 1$ ), iar printr-un punct pot trece varietăți integrale diferite de aceeași dimensiune.

Cele două situații descrise anterior pot fi înglobate într-o teorie mai generală în felul următor. Notăm cu  $T_x D$  spațiul tangent la  $D$  în punctul  $x$ . Pentru  $x$  fixat în  $D$  ecuația (2'') reprezintă hiperplanul  $\Omega_x$  determinat de punctul  $x$  și de vectorul normal  $\mathbf{X}(x)$ . Corespondența  $x \rightarrow \Omega_x \subset T_x D$  definește o funcție  $\Omega$  pe  $D$  care este o distribuție  $(n - 1)$ -dimensională, numită *distribuție ortogonală cîmpului vectorial*  $\mathbf{X}$ . Un cîmp vectorial  $\mathbf{Y}$  aparține distribuției  $\Omega$  dacă  $\mathbf{Y}(x) \in \Omega_x$ ,  $\forall x \in D$ , sau echivalent  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$  pe  $D$ . Evident, pentru fiecare  $x \in D$  există o vecinătate  $U$  a lui  $x$  și  $n - 1$  cîmpuri vectoriale  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{n-1}$  de clasă  $C^1$  pe  $U$  astfel încât  $\mathbf{Y}_1(x), \dots, \mathbf{Y}_{n-1}(x)$  să genereze pe  $\Omega_x$ ,  $x \in U$  (v. și 3.2 din care rezultă că  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{n-1}$  pot fi cîmpuri de gradienți). Mulțimea  $\{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{n-1}\}$  se numește *bază locală* a distribuției  $\Omega$ .

Distribuția  $\Omega$  se numește *involutivă* dacă apartenența  $\mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \Omega$  și  $\mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  de clasă  $C^1$  implică  $[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \in \Omega$ . Varietățile integrale ale ecuației Pfaff (2'') se numesc *varietăți integrale ale distribuției*  $\Omega$ . Distribuția  $\Omega$  se numește *integrabilă* dacă ecuația Pfaff (2'') este complet integrabilă.

Varianta teoremei Frobenius pentru distribuția  $\Omega$  este următoarea.

**Teoremă.** *Distribuția  $\Omega$  este integrabilă dacă și numai dacă ea este involutivă.*

**Demonstrație.** Presupunem că  $\Omega$  este integrabilă, adică ecuația Pfaff (2'') este complet integrabilă sau local  $\mathbf{X} = \lambda \operatorname{grad} f$ . Atunci apartenența  $\mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \Omega$  înseamnă ( $\operatorname{grad} f, \mathbf{Y} = 0$ ,  $(\operatorname{grad} f, \mathbf{Z}) = 0$ ). Derivând în raport cu  $\mathbf{Z}$  și, respectiv, în raport cu  $\mathbf{Y}$ , găsim  $\operatorname{Hess} f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + (\operatorname{grad} f, D_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y}) = 0$ ,  $\operatorname{Hess} f(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}) + (\operatorname{grad} f, D_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}) = 0$  și prin diferență obținem  $(\operatorname{grad} f, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]) = 0$ , adică  $[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \in \Omega$ . Astfel  $\Omega$  este involutivă.

Presupunem că  $\Omega$  este involutivă și  $\{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{n-1}\}$  este o bază locală a lui  $\Omega$ . Atunci  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_\alpha) = 0$  și  $(\mathbf{X}, [\mathbf{Y}_\beta, \mathbf{Y}_\gamma]) = 0$ ,  $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n - 1$ . Deoarece  $(D_{\mathbf{Y}_\beta} \mathbf{X}, \mathbf{Y}_\gamma) + (\mathbf{X}, D_{\mathbf{Y}_\beta} \mathbf{Y}_\gamma) = 0$ ,  $(D_{\mathbf{Y}_\gamma} \mathbf{X}, \mathbf{Y}_\beta) + (\mathbf{X}, D_{\mathbf{Y}_\gamma} \mathbf{Y}_\beta) = 0$ , avem

$0 = (\mathbf{X}, [\mathbf{Y}_\beta, \mathbf{Y}_\gamma]) = (\mathbf{X}, D_{\mathbf{Y}_\beta} \mathbf{Y}_\gamma - D_{\mathbf{Y}_\gamma} \mathbf{Y}_\beta) = (D_{\mathbf{Y}_\beta} \mathbf{X}, \mathbf{Y}_\gamma) - (D_{\mathbf{Y}_\gamma} \mathbf{X}, \mathbf{Y}_\beta) = = (\text{rot } \mathbf{X})(\mathbf{Y}_\beta, \mathbf{Y}_\gamma)$ . Fixăm cîmpul local de repere  $\{Z_1 = \mathbf{Y}_1, \dots, Z_{n-1} = \mathbf{Y}_{n-1}, Z_n = \mathbf{X}\}$  și observăm că funcțiile (v. 8.3)

$$j_{ijk} = X_i(\text{rot } \mathbf{X})_{jk} + X_j(\text{rot } \mathbf{X})_{ki} + X_k(\text{rot } \mathbf{X})_{ij}$$

constituie componentele unui cîmp tensorial de ordinul trei. Componentele acestui cîmp tensorial în raport cu reperul fixat sint

$$f_{ABC} = \sum_{i,j,k} f_{ijk} Z_A^i Z_B^j Z_C^k = X_A(\text{rot } \mathbf{X})_{BC} + X_B(\text{rot } \mathbf{X})_{CA} + X_C(\text{rot } \mathbf{X})_{AB},$$

$$A = \alpha, n; B = \beta, n; C = \gamma, n,$$

unde  $X_A = \sum_i X_i Z_A^i$ ,  $(\text{rot } \mathbf{X})_{AB} = \sum_{i,j} (\text{rot } \mathbf{X})_{ij} Z_A^i Z_B^j$  sint componentele lui

$\mathbf{X}$  și, respectiv, ale lui  $\text{rot } \mathbf{X}$ . Relațiile  $X_\alpha = 0, (\text{rot } \mathbf{X})_{\beta\gamma} = 0$  și proprietățile referitoare la indicei ale funcțiilor  $j_{ABC}$  arată că  $j_{ABC} = 0$ . Aceasta din urmă, împreună cu faptul că  $Z_A^i$  este o matrice nesingulară, implică  $f_{ijk} = 0$ . Astfel ecuația Pfaff (2'') este complet integrabilă și deci  $\Omega$  este integrabilă.

Presupunem că ecuația Pfaff (2'') nu este complet integrabilă. Așa cum am arătat în 8.1, prin fiecare punct  $x$  al lui  $D$  trece sigur o infinitate de curbe integrale ale ecuației Pfaff (fig. 8.1). De asemenea există o submulțime a lui  $D$  cu proprietatea că orice două puncte ale acestei submulțimi pot fi unite printr-o curbă integrală a ecuației Pfaff (2''), proprietate ce poate fi interpretată în sensul că o ecuație Pfaff care nu este complet integrabilă nu constituie o „legătură pentru poziții (puncte)” [8, 53]. Într-adevăr, o curbă integrală  $\alpha : I \rightarrow D$ ,  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  a ecuației Pfaff (2'') satisfacă  $\sum_{i=1}^n X_i(\alpha(t)) \frac{dx_i}{dt} = 0$  și este suficient să fixăm pe

$\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dt}$  în clasa polinoamelor cu coeficienți arbitrari ca să găsim o curbă  $\alpha$  cu proprietatea specificată (fig. 8.5).

Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial pe  $D \subset \mathbb{R}^n$  care nu este local potential sau local biscalar (rezultă  $n \geq 3$ ) și  $\Omega$  distribuția ortogonală lui  $\mathbf{X}$  (care nu este integrabilă). Mulțimea tuturor varietăților integrale ale distribuției  $\Omega$  se numește *spațiu necolonom definit de mulțimea  $D$  și de cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  pe  $D$* . Spațiuul necolonom are o structură complet diferită de aceea definită pe  $D$  de o familie de hiper-suprafețe ortogonale liniilor de cîmp, desătăcăzătorul acestea se asemănă prin existența hiperplanelor tangente (v. și 8.7).

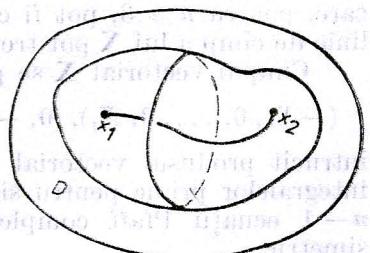


Fig. 8.5

Complemente. Fie cîmpul vectorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , de clasă  $C^1$  pe mulțimea deschisă și conexă  $D$  și

$$X_1(x) dx_1 + \dots + X_n(x) dx_n = 0 \quad (3)$$

ecuația Pfaff asociată lui  $\mathbf{X}$  pe  $D$ . Teoria anterioară se referă la ecuația Pfaff (3) pe mulțimea deschisă  $D_* = \{x \in D \mid \mathbf{X}(x) \neq 0\}$ . În cazul în care  $\mathbf{X}$  are zerouri pe  $D$  extindem această teorie.

Astfel, printr-o soluție a ecuației Pfaff (3) se înțelege fie o varietate integrală fixată de un punct  $x_0 \in D_*$ , fie mulțimea zerourilor lui  $\mathbf{X}$  pe  $D$  care se notează cu  $Z(\mathbf{X})$ . Evident  $Z(\mathbf{X})$  nu este o subvarietate a lui  $D$  decât în cazuri particulare.

Zerourile cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  se numesc *puncte singulare* ale spațiului neolonom definit de ecuația Pfaff (3).

**Aplicația 8.4.** 1) Cel mai simplu și poate cel mai celebru spațiu neolonom în  $\mathbb{R}^3$  se poate obține extinzind egalitatea  $y' = dy/dx$ . Pentru aceasta este suficient să renotăm  $y' = z$  și să

interpretăm tripletul  $(x, y, z)$  ca punct din  $\mathbb{R}^3$ , deoarece  $dy - zdx = 0$  este o ecuație Pfaff care nu este complet integrabilă.

Spațiul neolonom  $\Sigma : dy - zdx = 0$  nu are puncte singulare. El conține toate dreptele parallele cu axa  $Oz$ , adică dreptele de ecuații  $x = x_0, y = y_0$ . În particular, intersecția lui  $\Sigma$  cu planul  $yOz$  este familia de drepte  $x = 0, y = c_1$ , iar intersecția cu planul  $xOz$  este axa  $Ox$  și familia de drepte  $y = 0, x = c_2$  (fig. 8.6).

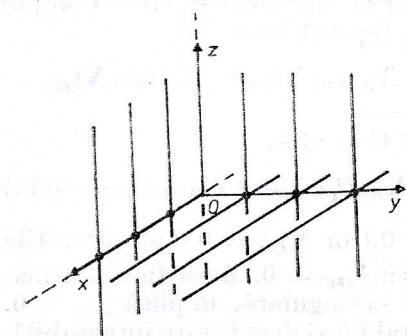


Fig. 8.6

2) Cîmpul vectorial Goodwin  $\mathbf{X}(x, y, z) = \left( \frac{1}{1+z^n} - ax, x-by, y-cz \right)$  admite doar curbe ortogonale liniilor de cîmp deoarece  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) \neq 0$  și suprafața de ecuație carteziană implicită  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) = 0$  nu este ortogonală liniilor de cîmp.

## 8.6. Liniile de cîmp ca intersecții de spații neolome

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^1$  pe o mulțime deschisă și conexă  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Liniile de cîmp ale cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  sunt caracterizate de sistemul simetric

$$\frac{dx_1}{X_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x)}.$$

Acesta este echivalent cu un sistem de  $n-1$  ecuații Pfaff, de exemplu

$$-X_n(x)dx_1 + X_1(x)dx_n = 0, \dots, -X_n(x)dx_{n-1} + X_{n-1}(x)dx_n = 0,$$

care, pentru  $n \geq 3$ , pot fi complet integrabile sau nu. Deci prin fiecare linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$  pot trece atât hipersuprafețe cât și spații neolome.

Cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  se poate recupera din cîmpurile vectoriale

$$(-X_n, 0, \dots, 0, X_1), (0, -X_n, \dots, 0, X_2), \dots, (0, 0, \dots, -X_n, X_{n-1})$$

întrucît produsul vectorial al acestora din urmă este  $X_n^{n-2}\mathbf{X}$ . Existența integralelor prime pentru sistemul simetric arată că există un sistem de  $n-1$  ecuații Pfaff complet integrabile echivalent local cu sistemul simetric.

Reciproc, fie ecuația Pfaff  $\sum_{i=1}^n X_i(x)dx_i = 0$  pe  $D$  despre care presupunem că nu este complet integrabilă. Atașăm la această ecuație încă  $n-2$  ecuații Pfaff arbitrară

$$\sum_{i=1}^n X_i^\alpha(x)dx_i = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-2,$$

astfel încit rangul matricei  $\begin{bmatrix} X_1 & \dots & X_n \\ X_1^\alpha & \dots & X_n^\alpha \end{bmatrix}$  să fie  $n - 1$ . Sistemul de ecuații Pfaff

$$X_1(x)dx_1 + \dots + X_n(x)dx_n = 0,$$

$$X_1^\alpha(x)dx_1 + \dots + X_n^\alpha(x)dx_n = 0, \alpha = 1, \dots, n - 2,$$

este echivalent cu sistemul diferențial simetric

$$\frac{dx_1}{Y_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{Y_n(x)},$$

unde  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  este un cîmp vectorial coliniar cu produsul vectorial al celor  $n - 1$  cîmpuri vectoriale  $\mathbf{X}, \mathbf{X}^\alpha$ . Înînd seama de teorema de existență și unicitate a liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{Y}$ , deducem că, fiind dată o ecuație Pfaff, pentru fiecare alegere a vectorilor  $\mathbf{X}^\alpha$  există cîte o curbă integrală unică care trece prin  $x_0 \in D$ .

**Exemplu 1.** Să se determine liniile de cîmp pentru  $\mathbf{X} = yi + zj + ak$  și să se pună în evidență două spații neolome care determină aceste curbe.

*Rezolvare.* Sistemul cu coeficienți constanti

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = z, \frac{dz}{dt} = x$$

admete punctul de echilibru  $(0, 0, 0)$  și soluția generală

$$x = c_1 e^t + e^{-t/2} \left( c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right),$$

$$y = c_1 e^t + e^{-t/2} \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} c_3 - \frac{1}{2} c_2 \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 + \frac{1}{2} c_3 \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right],$$

$$z = c_1 e^t + e^{-t/2} \left[ -\frac{1}{2} c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 - c_3 \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right], t \in \mathbb{R}.$$

Forma simetrică

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x}$$

implică  $xdx - ydy = 0$ ,  $zdy - zdz = 0$ . Aceste două ecuații Pfaff reprezintă respectiv spații neolome (cilindri rectenți, v. § 7 și [58]) întrucât nu sunt complet integrabile. Intersecția acestor spații neolome coincide cu liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$ .

Evident, prin liniile de cîmp trece și hipersuprafețe de nivel constant:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x} = \frac{(x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz}{0}$$

implică  $d(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = 0$  și deci  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = c_1$ .

**O b s e r v a ᄀ i i .** 1) Avem

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x} = \frac{(z^2 - xy) dx + (x^2 - yz) dy + (y^2 - zx) dz}{0}$$

Cu toate acestea expresia  $(z^2 - xy) dx + (x^2 - yz) dy + (y^2 - zx) dz$  nu este o combinație integrabilă, deoarece  $\text{rot } [(z^2 - xy) \mathbf{i} + (x^2 - yz) \mathbf{j} + (y^2 - zx) \mathbf{k}] = 3\mathbf{X} \neq 0$ . Există însă un factor integrant pentru ecuația  $(z^2 - xy) dx + (x^2 - yz) dy + (y^2 - zx) dz = 0$ , dar dificultatea determinării efective a acestuia este echivalentă cu dificultatea de a găsi combinații integrabile pentru sistemul simetric.

2) Cimpul vectorial  $\mathbf{X} = (y, z, x)$  este solenoidal și deci curentul generat de  $\mathbf{X}$  conservă volumul.

## 8.7. Distribuția ortogonală unui cimp vectorial afin

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + a_i$ , un cimp vectorial afin pe  $\mathbb{R}^n$  și

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + a_i \right) dx_i = 0 \quad (4)$$

ecuația Pfaff asociată lui  $\mathbf{X}$ . Această ecuație descrie distribuția ortogonală lui  $\mathbf{X}$ .

Presupunem că  $\mathbf{X}$  este irotațional, fapt echivalent cu  $a_{ij} = a_{ji}$ . Atunci și numai atunci ecuația Pfaff (4) este o ecuație exactă și soluția sa generală este familia hiperevadricelor din  $\mathbb{R}^n$  de ecuații

$$0, 5 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n a_i x_i = c.$$

Cu alte cuvinte, hipersuprafetele ortogonale liniilor de cimp ale unui cimp vectorial afin irotațional sunt hiperevadrice.

Să cercetăm condițiile în care ecuația Pfaff (4) este complet integrabilă (distribuția  $\Omega$  este integrabilă).

**Teoremă.** Presupunem că  $\mathbf{X}$  este rotational, adică matricea  $[a_{ij}]$  nu este simetrică.

- 1) Dacă  $\text{rang } [a_{ij}] = 1$ , atunci ecuația Pfaff (4) este complet integrabilă.
- 2) Dacă  $\text{rang } [a_{ij}] = 2$ , atunci ecuația Pfaff (4) poate să fie sau nu complet integrabilă.
- 3) Dacă  $\text{rang } [a_{ij}] \geq 3$ , atunci ecuația Pfaff (4) nu este complet integrabilă.

**Demonstrație.** Conform teoremei Frobenius ecuația Pfaff (4) este complet integrabilă dacă și numai dacă

$$a_{il}(a_{kj} - a_{jk}) + a_{jl}(a_{ik} - a_{ki}) + a_{kl}(a_{ji} - a_{ij}) = 0, \\ i, j, k, l = 1, \dots, n. \quad (5)$$

- 1) Se știe că o matrice  $[a_{ij}]$  are rangul 1 dacă și numai dacă există doi vectori  $[u_i]$  și  $[v_j]$  astfel încât  $a_{ij} = u_i v_j$ . Cu această exprimare, relațiile (5) sunt satisfăcute identic.

2) Considerăm cîmpul vectorial liniar  $\mathbf{X} = (x - y - z, x + y + z, x + y + z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , a cărui matrice asociată

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

are rangul doi. Se găsește  $\text{rot } \mathbf{X} = (0, -2, 2)$ , deci  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) = 0$  și astfel condiția de complet integrabilitate (5) este satisfăcută.

Fie cîmpul vectorial liniar  $\mathbf{X} = (x - y - z, x + y + 2z, x + y + 2z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , pentru care matricea asociată

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

are rangul doi. Se găsește  $\text{rot } \mathbf{X} = (-1, -2, 2)$ , deci  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) = -x + y + z$  și astfel condiția de complet integrabilitate (5) nu se satisfacă.

3) Preferăm să demonstrăm enunțul echivalent „în ipoteza rang  $[a_{ij}] \geq 3$ , ecuația Pfaff (4) este complet integrabilă dacă și numai dacă  $a_{ij} = a_{ji}$ “.

Presupunem că rangul lui  $[a_{ij}]$  este trei. Atunci putem întotdeauna să admitem că  $|a_{\alpha\beta}|$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ , este minorul de ordinul trei diferit de zero (raționamentul cu oricare alt minor este analog). Deoarece  $|a_{\alpha\beta}| \neq 0$ , putem să definim numerele  $a^{\alpha\beta}$  astfel încît

$$a^{\alpha\beta} a_{\gamma\tau} = \delta_{\gamma}^{\alpha}, \quad a^{\alpha\beta} a_{\gamma\beta} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \quad (6)$$

(matricea  $[a^{\alpha\beta}]$  este inversa matricei  $[a_{\alpha\beta}]$ ). Să alegem acum din toate ecuațiile (5) pe acelea pentru care toți indicii iau valorile 1, 2, 3 :

$$a_{\alpha\delta}(a_{\gamma\beta} - a_{\beta\gamma}) + a_{\beta\delta}(a_{\alpha\gamma} - a_{\gamma\alpha}) + a_{\gamma\delta}(a_{\beta\alpha} - a_{\alpha\beta}) = 0.$$

Înmulțind cu  $a^{\alpha\delta}$ , sumind după  $\alpha, \beta$  și ținând seama de (6), găsim  $a_{\gamma\beta} = a_{\beta\gamma}$ .

Din ecuațiile (5) alegem acum pe acelea pentru care indiciile  $i$  ia valori de la 1 la  $n$ , iar toți ceilalți indici iau valorile 1, 2, 3. Dacă vom ține cont de  $a_{\gamma\beta} = a_{\beta\gamma}$ , aceste ecuații se reduc la

$$a_{\beta\delta}(a_{i\gamma} - a_{\gamma i}) + a_{\gamma\delta}(a_{\beta i} - a_{i\beta}) = 0.$$

Înmulțind cu  $a^{i\delta}$ , sumind și ținând seama de (6), găsim  $a_{i\gamma} = a_{\gamma i}$ .

Cu determinările precedente, ecuațiile (5) în care  $i$  și  $\gamma$  iau valori de la 1 la  $n$  sunt satisfăcute identic, iar cele în care  $i, l, j$  iau valori de la 1 la  $n$  se reduc la  $a_{\gamma l}(a_{il} - a_{lj}) = 0$ . Cum unele dintre numerele  $a_{\gamma l}$  sunt diferite de zero, rezultă că  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j, = 1, \dots, n$ .

Demonstrația pentru cazul rang  $[a_{ij}] = p$ ,  $3 < p \leq n$ , este analoagă.

Presupunem că  $[a_{ij}]$  nu este simetrică, dar  $0 < \text{rang } [a_{ij}] \leq 2$ . Prezența factorului integrant  $\mu$  pentru ecuația Pfaff (4) face ca hipersuprafețele ortogonale liniilor de cîmp ale cîmpului vectorial afin coresponzător să nu mai fie hiperevadrice. Această afirmație este pusă în evidență de următoarele exemple.

Fie  $a_{ij} = u_i a_j$  ( $u_1, \dots, u_n \neq (a_1, \dots, a_n)$ ). În acest caz ecuația Pfaff (4) se transcrie  $\left( \sum_{i=1}^n u_i dx_i \right) \left( \sum_{j=1}^n a_j x_j \right) + \sum_{i=1}^n a_i dx_i = 0$  și are soluția generală  $\sum_{i=1}^n u_i x_i + \ln \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right| = c$ .

Cîmpul vectorial liniar  $\mathbf{X} = (x-y-z, x+y+z, x+y+z)$  pe  $\mathbb{R}^3$ , asociat unei matrice de rangul doi, satisfacă condiția de complet integrabilitate. Algoritmul lui Bertrand arată că suprafetele ortogonale linilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  sunt descrise de familia de ecuații carteziene implicate

$$\operatorname{arctg} \frac{y+z}{x} + \frac{1}{2} \ln [x^2 + (y+z)^2] = c.$$

Raționamentele precedente conduc la următoarea definiție: spațiul neolonom definit de ecuația Pfaff (4) în fiecare dintre cazurile:

1) rang  $[a_{ij}] = 2$  și relațiile (5) nu sunt satisfăcute,

2) rang  $[a_{ij}] \geq 3$  și  $[a_{ij}]$  nu este simetrică, se numește hiperevadrică neolonomă.

Cazul 1) din această definiție și faptul că orice ecuație Pfaff pe  $\mathbb{R}^2$  admite un factor integrant local fac necesară ipoteza  $n \geq 3$ .

Hiperevadricele neolonomice se pot clasifica [58, 70] după tipul mulțimii  $Z(\mathbf{X})$  ale cărei elemente se numesc *centre*.

**Aplicația 8.5.** 1) Considerăm evadrica neolonomă descrisă de ecuația  $zdx - ydy = 0$ . Aceasta posedă o dreaptă de centre,  $Ox : z = 0, y = 0$  și de aceea se numește *cilindru neolonom de axă Ox*. Acest cilindru neolonom nu seamănă deloc cu familia de cilindri de axă  $Ox$ , fapt ce se poate evidenția prin observația că cel neolonom conține axa  $Ox$ , dreptele (fig. 8.7,  $x_0 < y_0^2$ ).

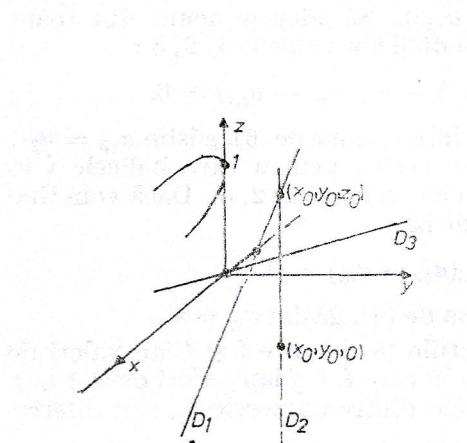


Fig. 8.7

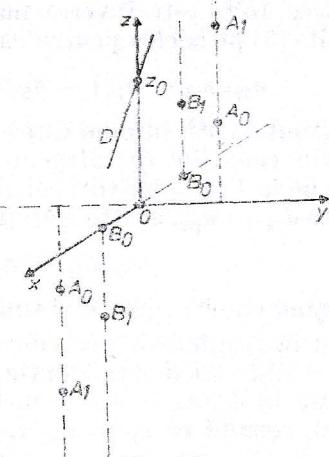


Fig. 8.8

$$D_1 : x = x_0 + \frac{y_0^2}{z_0} t, \quad y = y_0 + \frac{y_0}{z_0} t, \quad z = z_0 + t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (x_0, y_0, z_0) \text{ fixat}, \quad z_0 \neq 0;$$

$D_2 : x = x_0, \quad y = y_0; \quad D_3 : x = y = z$   
și parabolă  $\Gamma : y^2 = 2x, \quad z = 1$ .

2) O cvadrice neonomă fără centru se numește *paraboloid neonom*. De exemplu,  $\Sigma : dz = (x - y) dx + (x - 2y) dy$ . Se observă că  $\Sigma$  conține dreapta  $D : x = \sqrt{2}t, y = t, z = z_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $z_0$  fiind fixat și se întâlnește cu spirala  $\Gamma : x = \cos t, y = \sin t, z = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , în punctele,

$$A_k \left( 0, \pm 1, \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}, \text{ și } B_m (\pm 1, 0, m\pi), m \in \mathbb{Z}. \text{ Axa}$$

$Oz$  este axă de simetrie a lui  $\Sigma$  (fig. 8.8)

3) Cvadricea neonomă  $\Sigma : (x - y) dx + (x + y) dy + zdz = 0$  posede centrul  $(0, 0, 0)$ , axă de simetrie  $Oz$  și planul de simetrie  $xOy$ . Intersecția lui  $\Sigma$  cu planul  $xOz$  este familia de cercuri  $y = 0$ ,  $x^2 + z^2 = c_1$ , intersecția cu planul  $yOz$  este familia de cercuri  $x = 0$ ,  $y^2 + z^2 = c_2$ , iar intersecția cu planul  $xOy$  este familia de curbe

$$z = 0, \arctg \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = c_3 \text{ (fig. 8.9).}$$

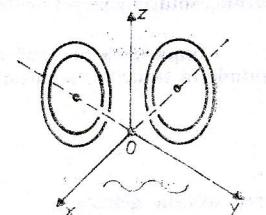


Fig. 8.9

## 8.8. Dependența de parametri a subvarietăților ortogonale liniilor de cimp

Fie cimpul vectorial  $\mathbf{X}(x, a) = (X_1(x, a), \dots, X_n(x, a))$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  de clasă  $C^\infty$ , care depinde de parametrul vector  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ . Subvarietățile ortogonale liniilor de cimp ale lui  $\mathbf{X}$  sunt soluții ale ecuației Pfaff

$$X_1(x, a) dx_1 + \dots + X_n(x, a) dx_n = 0.$$

Cu notațiile din 8.3, acestei ecuații i se atașează  $C^3$  funcții  $f_{ijk}(x, a)$ ,  $i < j < k$ , cu ajutorul cărora putem decide complet integrabilitatea în felul următor:

1) Dacă  $f_{ijk}(x, a) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}^m$ , atunci ecuația Pfaff este complet integrabilă și deci  $\mathbf{X}$  admite o familie după  $a$  de familii de hiper-suprafețe ortogonale liniilor de cimp. Valori diferite ale lui  $a$  pot impune familii de hiper-suprafețe de tipuri diferite, ortogonale liniilor de cimp.

2) Dacă  $f_{ijk} \neq 0$ , dar  $\exists a_0 \in \mathbb{R}^m$  astfel încât  $f_{ijk}(x, a_0) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , atunci ecuația Pfaff este complet integrabilă doar în cazul  $a = a_0$  și neintegrabilă pentru  $a \neq a_0$ . Deci  $\mathbf{X}(x, a_0)$  admite o familie de hiper-suprafețe ortogonale liniilor de cimp, iar  $\mathbf{X}(x, a)$  cu  $a \neq a_0$  admite doar subvarietăți de dimensiune cel mult  $n-2$  ortogonale liniilor de cimp.

În general, curentul generat de un cimp vectorial conservă mulțimea subvarietăților ortogonale liniilor de cimp. De aceea observațiile precedente sint în strînsă legătură cu subclasele familiei după  $a$  de curenti generați de cimpul vectorial  $\mathbf{X}(x, a)$ .

Reamintim că dacă ecuația Pfaff este complet integrabilă, adică  $\mathbf{X}$  este un cimp local potențial sau local biscalalar, atunci, pe porțiuni, orbitele lui  $\mathbf{X}$  sint liniile de gradient sau reparametrizări de liniile de gradient.

**Exemplu. 1**) Considerăm cimpul vectorial liniar  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i(x) = a_i \sum_{j=1}^n u_j x_j +$

$+ u_i u = {}^t[u_1, \dots, u_n]$ , care depinde de parametrul vector  $a = {}^t[a_1, \dots, a_n]$ . Ecuația Pfaff asociată lui  $\mathbf{X}$  este

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i dx_i \right) \left( \sum_{j=1}^n u_j dx_j \right) + \sum_{i=1}^n u_i dx_i = 0.$$

Dacă  $a = 0$ , atunci soluția generală este familia de hiperplane  $H_c : \sum_{i=1}^n u_i x_i = c$ , iar dacă  $a \neq 0$ , atunci soluția generată este familia de hipersuprafețe  $M_c : \sum_{i=1}^n a_i x_i + \ln \left| \sum_{i=1}^n u_i x_i \right| = c$ .

Împărțirea în două clase a hipersuprafețelor ortogonale liniilor de cimp ale lui  $\mathbf{X}$  corespunde la tipurile de curenti generați de  $\mathbf{X}$ . Într-adevăr, sistemul care dă liniile de cimp

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i \sum_{j=1}^n u_j x_j + u_i,$$

are soluția generală

$$x = e^{At} \left[ x_0 + \left( \frac{t}{1!} I - \frac{t^2}{2!} A + \dots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} A^n + \dots \right) u \right], \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad A = [a_i \ u_i].$$

Rezultă curentul global (difeomorfism) pe  $\mathbb{R}^n$

$$x = e^{At} y + e^{At} \left[ \frac{t}{1!} I - \frac{t^2}{2!} A + \dots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} A^n + \dots \right] u$$

care constă din transformări affine particulare. Dacă  $a = 0$ , atunci curentul se reduce la translații,  $x = y + tu$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**N o t ā.** Se observă că  $\text{div } \mathbf{X} = (a, u)$  și deci curentul păstrează volumul dacă vectorii  $a$  și  $u$  sunt ortogonali.

2) Fie cimpul vectorial liniar  $\mathbf{X} = (-x + \alpha y, \beta x - y + \alpha z, \beta y - z)$  pe  $\mathbb{R}^3$ , unde  $\alpha$  și  $\beta$  sunt parametri reali. Se găsește  $\text{rot } \mathbf{X} = (\beta - \alpha) (1, 0, 1)$ . Dacă  $\beta = \alpha$ , atunci  $\mathbf{X}$  este un cimp potențial și evadricele  $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2\alpha yz = c$  sunt ortogonale liniilor de cimp. Dacă  $\beta \neq \alpha$ , atunci  $(\mathbf{X}, \text{rot } \mathbf{X}) = (\beta - \alpha) [-x + (\alpha + \beta) y - z]$  și deci  $\mathbf{X}$  posedă doar curbe ortogonale liniilor de cimp.

**Probleme desehise.** 1) Are vreo influență bifurcația Hopf a curentului generat de  $\mathbf{X}(x, a)$  asupra mulțimii subvarietăților ortogonale liniilor de cimp?

2) Pentru mulțimea subvarietăților ortogonale liniilor de cimp ale lui  $\mathbf{X}(x, a)$  există fenomen de bifurcație?

## 8.10. Probleme propuse

1. Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații Pfaff :

$$(e^{x_1 x_2} + 1) dx_1 + \frac{x_1 x_2 - 1}{x_2^2} e^{x_1 x_2} dx_2 = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus O x_1,$$

$$dx_3 = \frac{x_3 + a}{x_1} dx_1 + \frac{x_3 + a}{x_2} dx_2, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 + a > 0,$$

$$2x_1 x_3 dx_1 + 2x_2 x_3 dx_2 + (x_3^2 - x_2^2 - x_1^2) dx_3 = 0, \quad x_3 > 0.$$

2. Să se cerceteze dacă ecuațiile Pfaff asociate cimpurilor conforme și proiective (v. 2.7, 2.8) sint sau nu complet integrabile.

**3.** Să se rezolve următoarele sisteme :

$$\left. \begin{array}{l} xzdx + z(2x - y) dy - x^2 dz = 0 \\ x = y \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz = 0 \\ z = xy \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x^2 - y^2 - z^2)dx + 2xydy + 2xzdx = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} (x - y)dx + (x + y)dy + zdz = 0, \\ z = x^2 + y^2 \end{array} \right\}.$$

**4.** Se dau cîmpurile vectoriale :

$$1) \quad \mathbf{X}(x, y, z) = z(1 - e^y) \mathbf{i} + xze^y \mathbf{j} + x(1 - e^y) \mathbf{k},$$

$$2) \quad \mathbf{X}(x, y, z) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k},$$

$$3) \quad \mathbf{X}(r) = 2(a, r) \mathbf{a} + 2(\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \mathbf{b} - \frac{(a, r)^2 + (b, r)^2}{(a, b \times r)} \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Să se arate că fiecare  $\mathbf{X}$  este un cîmp biscalar și să se determine funcțiiile  $f$  și  $\lambda$  astfel încît  $\mathbf{X} = \lambda \operatorname{grad} f$ .

$$\mathbf{R.} \quad 1) \quad \mathbf{X}(x, y, z) = -x^2z^2 \operatorname{grad} \frac{1-e^y}{xz}; \quad 2) \quad \mathbf{X}(x, y, z) = \frac{xyz}{2} \operatorname{grad} (x^2 + y^2 + z^2);$$

$$3) \quad \mathbf{X}(r) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, r) \operatorname{grad} \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})^2 + (\mathbf{b}, \mathbf{r})^2}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{r})}.$$

**5.** Fie cîmpul vectorial  $\mathbf{V} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + z\varphi(x, y)\mathbf{k}$ , unde  $\varphi$  este o funcție de clasă convenabilă. Să se determine  $\varphi$  astfel încît  $\mathbf{V}$  să fie biscalar.

**6.** Fie cîmpul vectorial  $\mathbf{V} = \operatorname{grad} \varphi(r) + \varphi(r) \operatorname{grad} \psi(r)$ , unde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , iar  $\varphi$  și  $\psi$  sint funcții de clasă convenabilă.

1) Să se determine liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{V}$ .

2) Să se arate că  $\mathbf{V}$  este un cîmp vectorial potențial și să se determine familia suprafețelor ortogonale liniilor de cîmp.

Indicație.  $\mathbf{V} = e^{-\Psi} \operatorname{grad} \varphi e^{\Psi}$ .

**7.** Se consideră următoarele cîmpuri vectoriale :

$$1) \quad \mathbf{V} = xz\mathbf{i} + z(2x - y)\mathbf{j} - x^2\mathbf{k},$$

$$2) \quad \mathbf{V} = x^2(y+z) \mathbf{i} - y^2(z+x) \mathbf{j} + z^2(y-x)\mathbf{k},$$

$$3) \quad \mathbf{V} = y^2z^2\mathbf{i} + xyz^2\mathbf{j} + xy^2\mathbf{z}\mathbf{k},$$

$$4) \quad \mathbf{V} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k},$$

$$5) \quad \mathbf{V} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k},$$

$$6) \quad \mathbf{V} = x(y - z)\mathbf{i} - y(x - z)\mathbf{j} + z(x - y)\mathbf{k}.$$

Să se stabilească dacă există familii de suprafețe ortogonale liniilor de cîmp. În caz că există, să se găsească ecuațiile carteziene implicate ale acestor familii de suprafețe. Pentru spațiile neolonomice să se determine intersecțiile cu axele și planele de coordonate (v. și problema 2 din 3.13).

**8.** Care dintre următoarele ecuații Pfaff definesc evadrice neolomone :

$$(x+y)dx + (-x+z)dy - zdz = 0,$$

$$(5x-2y+4z)dx + (4x-y)dy + 2xdz = 0,$$

$$ydx + zdy - (6x+11y+6z)dz = 0,$$

$$ydx + (x+z)dy + (y+z)dz = 0?$$

În cazurile affirmative, să se determine intersecțiile evadricelor neolome cu plane ce trec prin axele de coordonate.

**9.** Ce fel de hipersuprafețe sunt hipersuprafețele ortogonale liniilor de cîmp ale unui cîmp vectorial torsional ?

**I n d i c a ț i e.** Hipersuprafețe cu toate punctele ombilicale (părți de hiperplane sau de hipersfere).

**10.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , o mulțime deschisă și conexă și  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $D$ , fără zerouri. Notăm prin  $\Omega$  distribuția ortogonală lui  $\mathbf{X}$ . Să se arate că distribuția  $\Omega$  este involutivă dacă și numai dacă pentru fiecare bază locală  $\{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{n-1}\}$  există funcțiile  $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n-1$ , de clasă  $C^\infty$ , astfel încît

$$[\mathbf{Y}_\alpha, \mathbf{Y}_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{n-1} C_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathbf{Y}_\gamma.$$

**11.** Să se cerceteze dependența de parametri a soluțiilor următoarelor ecuații Pfaff :

$$x(x^2 + y^2 + a)dx + y(x^2 + y^2 - a)dy = 0,$$

$$(y - x^a)dx + xdy = 0,$$

$$bxy^2dx - ax^2dy + z(by^2 - ax^2)dx = 0, \quad 2(ay + z)dx +$$

$$+ (x + 3ay + 3z)dy + (x - ay)dz = 0.$$

**12.** Fie cîmpul vectorial Lorenz

$$\mathbf{X}(x, y, z) = (-\sigma x + \sigma y, -xz + rx - y, xy - bz),$$

unde  $\sigma, r, b$  sunt parametri reali. Are vreo influență bifurcația Hopf a curentului generat de  $\mathbf{X}$  (v. 3.6 și 7.4) asupra curbelor ortogonale liniilor de cîmp ?

**13.** Pe  $\mathbb{R}^3$  se dă cîmpul vectorial  $\mathbf{V} = \varphi(r)[(\mathbf{axr}) \times \mathbf{r}]$ , unde  $\mathbf{a}$  este un vector constant,  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , iar  $\varphi$  este o funcție de clasă  $C^1$ .

1) Să se calculeze  $\text{rot } \mathbf{V}$  și  $\text{div } \mathbf{V}$ .

2) Să se determine suprafețele ortogonale cîmpului  $\mathbf{V}$ .

3) Să se afle  $\varphi$  astfel încît circulația lui  $\mathbf{V}$  pe orice curbă închisă să fie nulă. Apoi să se calculeze fluxul lui  $\mathbf{V}$  prin sfera  $r^2 - 2(a, \mathbf{r}) = 0$ .

**Indicație :**  $\text{rot } \mathbf{V} = 3\varphi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) - \varphi'(r)((\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}) \times \frac{\mathbf{r}}{r}$ ,  $\text{div } \mathbf{V} = 2(\mathbf{a}, \mathbf{r})\varphi(r)$ .

## 9. ENERGHII

Energia unui cimp vectorial  $\mathbf{X}$  este cimpul scalar definit prin  $f = \|\mathbf{X}\|^2/2$ . Acest cimp scalar are proprietăți interesante impuse fie de comportarea gradientului, hessianei sau laplacianului lui  $f$ , fie de comportarea lui  $f$  de-a lungul liniilor de cimp.

Studiul energiei unui cimp vectorial este o nouitate cel puțin în raport cu literatura aplicativă. În particular, cercetarea variației energiei pe liniile de cimp este o idee nouă care merită atenția specialistilor, intrucât conduce la informații suplimentare despre fenomenul a căruia evoluție locală este descrisă de cimpul vectorial. Un interesant rezultat de această natură [69] este criteriul din 9.1 după care liniile de cimp nu pot fi închise. Tot aici se cuvine să reamitим că energia lui  $\mathbf{X}$  poate fi folosită în probleme de completitudine și în probleme de stabilitate ca funcție Leapunov.

### 9.1. Energia unui cimp vectorial oarecare

Fie  $D$  o mulțime deschisă și conexă din  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial de clasă  $C^2$  pe  $D$ . Cimpul vectorial  $\mathbf{X}$  își poate atașa funcția reală  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \|\mathbf{X}(x)\|^2/2$ . Deoarece un cimp vectorial  $\mathbf{X}$  reprezintă local viteza de variație a unui proces fizic, jumătatea pătratului lungimii cimpului vectorial, adică  $f$ , va reprezenta densitatea de energie cinetică a mediului în mișcare. Funcția  $f$  va fi numită *energia cimpului vectorial  $\mathbf{X}$* .

Se observă că zerourile lui  $f$  coincid cu zerourile lui  $\mathbf{X}$  (dacă există!). Aceste zerouri, adică pozițiile de echilibru ale procesului, sunt puncte de minim global și deci puncte critice ale energiei  $f$ , dar reciprocă nu este adevărată fără clauze suplimentare. Relațiile  $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$  arată că

dacă  $\frac{D(X_1, \dots, X_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$  pe  $D$ , atunci punctele critice ale energiei  $f$  sunt pozițiile de echilibru și deci puncte de minim global; în caz contrar există puncte critice ale lui  $f$  care nu sunt zerouri ale lui  $\mathbf{X}$ .

Dacă energia  $f$  este convexă, atunci punctele critice ale sale coincid cu punctele de minim global (în particular, cu zerourile lui  $\mathbf{X}$ , dacă aceste zerouri există).

Să cercetăm variația energiei  $f$  pe liniile de cimp ale lui  $\mathbf{X}$ . Pentru aceasta ne folosim de

$$df(\mathbf{X}) = D_{\mathbf{x}}f = (D_{\mathbf{x}}\mathbf{X}, \mathbf{X}),$$

$|D_{\mathbf{x}}f| \leq \|D_{\mathbf{x}}\mathbf{X}\| \|\mathbf{X}\| \leq \|D\mathbf{X}\| \|\mathbf{X}\|^2$ , unde  $D\mathbf{X}$  este matricea jacobiană a lui  $\mathbf{X}$ ,

$$|D_{\mathbf{x}}f| \leq \|D_{\mathbf{x}}\mathbf{X}\| \|\mathbf{X}\| = \sqrt{2} \|D_{\mathbf{x}}\mathbf{X}\| \sqrt{f}.$$

Notăm cu  $\alpha : I \rightarrow D$  o linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$ . Dacă  $D_{\mathbf{X}}\mathbf{X} \circ \alpha = 0$ , atunci  $\alpha$  este o dreaptă.<sup>1</sup> De asemenea,  $(D_{\mathbf{X}}\mathbf{X}, \mathbf{X}) \circ \alpha = (\|D_{\mathbf{X}}\mathbf{X}\| \circ \alpha)(\|\mathbf{X}\| \circ \alpha)$  dacă și numai dacă de-a lungul lui  $\alpha$  avem  $D_{\mathbf{X}}\mathbf{X} = \frac{\mu}{2}\mathbf{X}$ , adică  $\alpha$  este o dreaptă reparametrizată prin  $s = h(t)$ ,  $t \in J$ , unde

$$h(t) = a + b \int_{t_0}^t \exp \left( \frac{1}{2} \int_{t_0}^r \mu \circ \alpha(u) du \right) dr, \quad a, b = \text{const.}$$

**Teoremă.** Fie  $f$  energia cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  pe  $D$  și  $\alpha : I \rightarrow D$  o linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$ .

1) Atunci

$$f \circ \alpha(t) = \begin{cases} f \circ \alpha(t_0) & \text{dacă } \alpha \text{ este o dreaptă,} \\ f \circ \alpha(t_0) e^{\int_{t_0}^t \mu \circ \alpha(u) du} & \text{dacă } \alpha \text{ este o dreaptă repara-} \\ f \circ \alpha(t_0) + \int_{t_0}^t (D_{\mathbf{X}}\mathbf{X}, \mathbf{X}) \circ \alpha(u) du & \text{metrizată prin } s = h(t), \\ - 2 \int_{t_0}^t \|D\mathbf{X}\| \circ \alpha(u) du & \text{în caz contrar,} \\ f \circ \alpha(t_0) e^{-2 \int_{t_0}^t \|D\mathbf{X}\| \circ \alpha(u) du} & \leq f \circ \alpha(t) \leq f \circ \alpha(t_0) e^{-2 \int_{t_0}^t \|D\mathbf{X}\| \circ \alpha(u) du} \end{cases}$$

2) Dacă  $\mathbf{X}$  nu are zerouri pe  $D$ , iar  $\alpha$  nu este o dreaptă și nici o dreaptă reparametrizată prin  $s = h(t)$ ,  $t \in I$ , atunci

$$|\sqrt{f \circ \alpha(t)} - \sqrt{f \circ \alpha(t_0)}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{t_0}^t \|D_{\mathbf{X}}\mathbf{X}\| \circ \alpha(u) du, \quad t \geq t_0.$$

**Demonstrație.** 1) Prima parte este o consecință directă a relațiilor  $\frac{d}{dt} f \circ \alpha = D_{\mathbf{X}} f \circ \alpha$ ,  $D_{\mathbf{X}} f = (D_{\mathbf{X}}\mathbf{X}, \mathbf{X})$ .

Pentru partea a doua observăm că relația  $|D_{\mathbf{X}} f| \leq \|D\mathbf{X}\| \|\mathbf{X}\|^2$  implică  $\left| \frac{d}{dt} f \circ \alpha \right| \leq 2(\|D\mathbf{X}\| \circ \alpha) f \circ \alpha$ . Aceasta permite să dovedim că func-

ția  $\varphi(t) = f \circ \alpha(t) e^{-2 \int_{t_0}^t \|D\mathbf{X}\| \circ \alpha(u) du}$  este descreșătoare pe  $[t_0, t] \subset I$ . Într-adevăr

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{-2 \int_{t_0}^t \|D\mathbf{X}\| \circ \alpha(u) du} \left( \frac{d}{dt} f \circ \alpha(t) - 2(\|D\mathbf{X}\| \circ \alpha(t))(f \circ \alpha(t)) \right) \leq 0.$$

Relația  $\varphi(t) \leq \varphi(t_0)$  implică

$$f \circ \alpha(t) \leq f \circ \alpha(t_0) e^{\int_{t_0}^t \|D_X X\| \circ \alpha(u) du}.$$

Analog, din faptul că funcția  $\psi(t) = f \circ \alpha(t) e^{-\int_{t_0}^t \|D_X X\| \circ \alpha(u) du}$  se dovedește a fi crescătoare rezultă partea din stînga a inegalității scrisă în teorema.

2) Relația  $|D_X f \circ \alpha| \leq \sqrt{2}(\|D_X X\| \circ \alpha) \sqrt{f \circ \alpha}$  se transcrie  $\left| \frac{d}{dt} f \circ \alpha \right| \leq \sqrt{2}(\|D_X X\| \circ \alpha) \sqrt{f \circ \alpha}$  și în ipotezele din teoremă rămîne o inegalitate strictă.

Considerăm funcția definită prin

$$\varphi(t) = \sqrt{f \circ \alpha(t)} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{t_0}^t \|D_X X\| \circ \alpha(u) du.$$

Se observă că

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{1}{2\sqrt{f \circ \alpha(t)}} \frac{d}{dt} f \circ \alpha(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \|D_X X\| \circ \alpha(t) < 0$$

pe orice interval  $[t_0, t] \subset I$ , adică  $\varphi$  este strict descrescătoare. Rezultă  $\varphi(t) \leq \varphi(t_0) = \sqrt{f \circ \alpha(t_0)}$ .

Analog se arată că funcția

$$\psi(t) = \sqrt{f \circ \alpha(t)} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{t_0}^t \|D_X X\| \circ \alpha(u) du$$

este strict crescătoare. Deci  $\psi(t) \geq \psi(t_0) = \sqrt{f \circ \alpha(t_0)}$ .

O b s e r v a t i o n i. 1)  $D_X f = (D_X X, X)$  dă în fiecare punct  $x$  viteza de variație a energiei  $f$  cînd punctul  $x$  se mișcă în direcția  $X(x)$ , adică (inițial) de-a lungul liniei de cîmp ce pleacă din  $x$  tangentă la  $X(x)$ . Zerourile vitezei de variație a energiei  $f$  sunt fie zerouri ale lui  $X$ , fie zerouri ale lui  $D_X X$ , fie puncte în care  $D_X X$  și  $X$  sunt ortogonale.

2) Dacă  $D_X f \geq 0$  iar  $\alpha$  este o linie de cîmp a lui  $X$ , atunci  $f \circ \alpha$  este o funcție crescătoare.

**Teoremă.** Dacă  $(D_X X, X)$  nu se anulează în nici un punct al lui  $D$ , atunci liniile de cîmp ale lui  $X$  nu pot fi închise (deci nici periodice).

*Demonstratie.* Fie  $\alpha : I \rightarrow D$  o linie de cîmp a lui  $X$ . Presupunem că există  $t_1, t_2 \in I$ ,  $t_1 < t_2$ , astfel încît  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ . Rezultă  $f \circ \alpha(t_1) = f \circ \alpha(t_2)$  și teorema precedentă implică

$$\int_{t_1}^{t_2} \mu \circ \alpha(u) du = 0 \quad \text{sau} \quad \int_{t_1}^{t_2} (D_X X, X) \circ \alpha(u) du = 0.$$

Teorema valorii medii pe  $[t_1, t_2]$  implică  $(D_X X, X) \circ \alpha(u_0) = 0$ , care contrazice ipoteza.

**Teoremă.** Fie  $\alpha : I \rightarrow D$  o linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$ . Dacă  $\alpha$  este o dreaptă reparametrizată prin  $s = h(t)$ ,  $t \in I$ , și  $\mu \circ \alpha$  este crescătoare, atunci  $f \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  este sau convexă sau concavă. Dacă  $\alpha$  nu este dreaptă și nici o dreaptă reparametrizată prin  $s = h(t)$ ,  $t \in I$ , iar  $(D_{\mathbf{X}}\mathbf{X}, \mathbf{X}) \circ \alpha$  este crescătoare, atunci  $f \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  este convexă.

**Demonstratie.** Ne oprim la ultima parte. Ipotezele dau

$$\frac{d^2}{dt^2} f \circ \alpha(t) = \frac{d}{dt} (D_{\mathbf{X}}\mathbf{X}, \mathbf{X}) \circ \alpha(t) \geq 0, \quad \forall t \in I.$$

Presupunem că  $\mathbf{X}$  nu are zerouri pe  $D$ , ipoteză ce permite construcția cîmpului vectorial unitar  $\mathbf{U} = \mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$ . Linile de cîmp ale lui  $\mathbf{U}$  sunt reprezentări normale ale liniilor de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$ .

Vom arăta că restricția energiei  $f = \|\mathbf{X}\|^2/2$  la o linie de cîmp a lui  $\mathbf{U}$  este bine determinată de restricțiile cîmpurilor scalare  $\text{div } \mathbf{U}$  și  $\text{div } \mathbf{X}$  la linia de cîmp respectivă. Pentru aceasta notăm cu  $\beta(s)$ ,  $s \in I$ , o linie de cîmp a lui  $\mathbf{U}$ , parametrul  $s$  fiind abscisa curbilinie și punem  $l = \|\mathbf{X}\| \circ \beta$ ,  $\varphi = \text{div } \mathbf{U} \circ \beta$ ,  $\psi = \text{div } \mathbf{X} \circ \beta$ . Relația  $\text{div } \mathbf{X} = D_{\mathbf{U}}\|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{X}\| \text{ div } \mathbf{U}$  arată că

$$\frac{dl}{ds} = -l\varphi + \psi,$$

adică  $l$  este determinată de  $\varphi$  și  $\psi$  ca soluție a unei ecuații diferențiale liniare de ordinul întîi. Punând  $l(s_0) = l_0$ , găsim

$$l(s) = e^{-\int_{s_0}^s \varphi(t) dt} \left( l_0 + \int_{s_0}^s \psi(r) e^{\int_r^s \varphi(t) dt} dr \right).$$

## 9.2. Energia unui cîmp vectorial irotațional

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^2$  irotațional pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ , adică

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x), \quad \forall x \in D, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Relația de definiție este echivalentă cu faptul că pentru fiecare  $x \in D$  matricea  $\left[ \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) \right]$  este simetrică. De asemenea se știe că  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial irotațional pe  $D$  dacă și numai dacă el este local potențial.

Fie  $f = \frac{1}{2}\|\mathbf{X}\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2$  energia lui  $\mathbf{X}$ . Deoarece  $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$ , rezultă grad  $f = D_{\mathbf{X}}\mathbf{X}$ . Astfel devine evident că zerourile lui  $\mathbf{X}$  sunt puncte critice ale lui  $f$  și că mulțimea punctelor critice ale lui  $f$  conține orbitele lui  $\mathbf{X}$  care sunt drepte. Existența unei linii de cîmp  $\alpha$  a lui

$\mathbf{X}$  care este o dreaptă (echivalent  $D_{\mathbf{x}}\mathbf{X} = 0$ ) impune rang  $\left[ \frac{\partial X_i}{\partial x_j} (\alpha(t)) \right] \leq n-1$ . Dacă  $x_0 \in D$  este un punct critic al energiei  $f$  și rang  $\left[ \frac{\partial X_i}{\partial x_j} (x_0) \right] = n$ , atunci  $x_0$  este un zero al lui  $\mathbf{X}$ .

Relația  $(\text{grad } f, \mathbf{X}) = D_{\mathbf{x}}f = (D_{\mathbf{x}}\mathbf{X}, \mathbf{X})$  arată că dacă forma pătratică  $\mathbf{Y}_x \rightarrow (D_{\mathbf{Y}_x}\mathbf{X}, \mathbf{Y}_x)$ ,  $\mathbf{Y}_x \in T_x D$  este pozitiv definită pentru orice  $x \in D$ , atunci punctele critice ale lui  $f$  sunt zerouri ale lui  $\mathbf{X}$ .

Matricea hessianei  $d^2f$  a lui  $f$  are elementele

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k},$$

iar matricea de elemente  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k}$  este pozitiv semidefinită. Dacă și matricea de elemente  $\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k}$  este pozitiv semidefinită, atunci energia  $f$  este convexă pe  $D$ .

Calculind urma hessianei, găsim laplacianul

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n X_i \frac{\partial^2 X_j}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)^2 + D_{\mathbf{x}}(\text{div } \mathbf{X}).$$

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial irotațional pe  $D$ . Dacă fiecare vector nenul  $\mathbf{X}(x)$  satisface  $D_{x(x)}(\text{div } \mathbf{X}) > 0$  și energia  $f$  atinge un maxim local într-un punct  $x_0 \in D$ , atunci  $\mathbf{X}$  se anulează identic pe o vecinătate a lui  $x_0$ .

**Demonstrație.** Presupunem că  $x_0$  este un punct de maxim local (necesar punct critic) al lui  $f$  și  $\mathbf{X}(x_0) \neq 0$ . Rezultă că hessiana  $d^2f(x_0)$  este negativ semidefinită și deci  $\Delta f(x_0) \leq 0$ . Pe de altă parte,  $\Delta f > 0$  în orice punct în care  $\mathbf{X}$  nu este zero. Rămîne că  $\mathbf{X}(x_0) = 0$ . Deoarece  $f(x_0) = 0$  este un maxim,  $f$  și deci  $\mathbf{X}$  trebuie să se anuleze identic într-o vecinătate a lui  $x_0$ .

**O b s e r v a t i o n i .** 1)  $D_{\mathbf{x}}(\text{div } \mathbf{X}) > 0$  implică faptul că divergența lui  $\mathbf{X}$  este o funcție strict crescătoare pe liniile de cimp ale lui  $\mathbf{X}$ .

2) Cimpurile vectoriale irotaționale sunt local potențiale, adică pentru fiecare  $x_0 \in D$  există o mulțime deschisă  $U \subseteq D$  care conține pe  $x_0$  și  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $\mathbf{X} = \text{grad } \varphi$  pe  $U$ . De aceea  $f|_U = \|\text{grad } \varphi\|^2/2$ . Hipersuprafețele  $\varphi(x) = c$  sunt ortogonale liniilor de cimp ale lui  $\mathbf{X}$ , iar mulțimile de nivel constant atașate lui  $f|_U$  coincid cu mulțimile de nivel constant atașate lui  $\|\text{grad } \varphi\|^2$ .

### 9.3. Energia unui cimp vectorial Killing

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cimp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$ . Cimpul vectorial  $\mathbf{X}$  este un cimp Killing pe  $\mathbb{R}^n$ , adică  $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , dacă și numai dacă  $\mathbf{X}(x) = Ax + b$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , unde  $A = [a_{ij}]$  este o matrice antisimetrică de ordinul  $n$ . Rangul matricei  $A$  este un număr par (v. 2.6).

Energia cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$  este funcția reală definită prin  $f(x) = \|Ax + b\|^2/2$ . Deoarece  $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = - \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$ , rezultă grad  $f = -D_{\mathbf{X}}\mathbf{X}$ , și  $D_{\mathbf{X}}f = 0$ . Aceste relații fac evidente afirmațiile că zerourile lui  $\mathbf{X}$  (dacă există!) sunt puncte critice ale lui  $f$  și că mulțimea punctelor critice ale lui  $f$  include toate orbitele lui  $\mathbf{X}$ , inclusiv cele care sunt drepte (adică energia  $f$  este o constantă de-a lungul fiecărei orbite).

Deoarece  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k}$  este o matrice pozitiv semidefinită, energia  $f$  este o funcție convexă pe  $\mathbb{R}^n$ . De aceea punctele sale critice (dacă există!) sunt puncte de minim global și deci coincid cu zerourile lui  $\mathbf{X}$ . Mulțimile de nivel constant atașate energiei  $f$  sunt hiperevadrice, iar curentul global generat pe  $\mathbb{R}^n$  de grad  $f$  (cîmp vectorial complet) mărește volumul în afară de cazul în care  $\mathbf{X}$  este paralel.

Convexitatea energiei  $f$  și observațiile precedente arată că există trei posibilități mutual exclusive :

- 1) mulțimea zerourilor lui  $\mathbf{X}$  este un hiperplan de codimensiune pară ;
- 2) reuniunea orbitelor lui  $\mathbf{X}$  care sunt drepte este o mulțime nevidă, închisă și convexă ;
- 3) energia  $f$  nu are puncte de minim.

#### 9.4. Energia unui cîmp vectorial conform

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ . Presupunem că  $\mathbf{X}$  este un cîmp conform, adică  $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \psi \delta_{ij}$ ,  $\psi =$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{n} \operatorname{div} \mathbf{X}, i, j = 1, \dots, n. \text{ Din aceste ecuații rezultă expresiile explicite} \\ &X_j(x) = \frac{1}{2} x_j \sum_{k=1}^n c_k x_k - \frac{1}{4} c_j \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{k=1}^n c_{kj} x_k + d_j, c_{ij} + e_{ji} = c \delta_{ij}, \psi(x) = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k x_k + c. \end{aligned}$$

Fie  $f = \|\mathbf{X}\|^2/2$  energia cîmpului vectorial  $\mathbf{X}$ . Găsim

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = - \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \psi X_j,$$

adică grad  $f = -D_{\mathbf{X}}\mathbf{X} + \psi \mathbf{X}$  și  $D_{\mathbf{X}}f = \psi f$ . Aceste relații implică :

- 1) Zerourile lui  $\mathbf{X}$  (dacă există!) sunt puncte critice ale energiei  $f$ .
- 2) Punctele critice ale energiei  $f$  sunt sau zerouri ale lui  $f$  sau zerouri ale lui  $\psi$ .

3) Mulțimea punctelor critice ale lui  $f$  include orbitele lui  $\mathbf{X}$  care sunt drepte reparametrizate prin  $s = a + b \int_{t_0}^t \exp \left( \int_{t_0}^s \psi \circ \alpha(u) du \right) dr$ .

Matricea hessianei  $d^2f$  a lui  $f$  are elementele

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( X_j c_k + X_k c_j - \delta_{jk} \sum_{i=1}^n c_i X_i \right)$$

De aici rezultă laplacianul  $\Delta f = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{2-n}{2} \sum_{i=1}^n c_i X_i$ .

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial conform pe  $\mathbb{R}^n$  și  $f$  energia lui  $\mathbf{X}$ . Dacă  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  este o linie de cîmp a lui  $\mathbf{X}$ , atunci

$$f \circ \alpha(t) = f \circ \alpha(t_0) e^{\int_{t_0}^t \psi \circ \alpha(u) du}$$

**Demonstrație.** Consecință a relațiilor  $\frac{d}{dt} f \circ \alpha = D_{\mathbf{x}} f \circ \alpha$  și  $D_{\mathbf{x}} f = \psi f$ .

O b s e r v a t i e . Zerourile lui  $\mathbf{X}$  coincid cu zerourile lui  $f$ .

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cîmp vectorial omotetic pe  $\mathbb{R}^n$ , cu  $\psi = c \neq 0$ , adică  $X_j = \sum_{k=1}^n c_{jk} x_k + d_j$ ,  $c_{11} + \dots + c_{nn} = \frac{n}{2} c \neq 0$ . Fie  $f = \|\mathbf{X}\|^2/2$  energia lui  $\mathbf{X}$ . Atunci :

1) punctele critice ale lui  $f$  sunt zerouri ale lui  $\mathbf{X}$ .

2) energia  $f$  este o funcție proprie a lui  $\mathbf{X}$  în raport cu valoarea proprie  $c$ ,

3) energia  $f$  este convexă ,

4) liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  nu pot fi închise.

## 9.5. Energia unui cîmp vectorial afin

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , un cîmp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$ . Cîmpul vectorial  $\mathbf{X}$  este afin, adică  $\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0$ ,  $i, j, k = 1, \dots, n$ , dacă și numai dacă  $\mathbf{X}(x) = Ax + b$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , unde  $A = [a_{ij}]$  este o matrice pătrată constantă, iar  $b$  este un vector coloană constant.

Fie  $f(x) = \|Ax + b\|^2/2$  energia cîmpului vectorial afin  $\mathbf{X}$ . Se găsește  $D_{\mathbf{Y}} f = (A\mathbf{Y}, Ax + b)$ ,  $\forall \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ , și deci zerourile lui  $\mathbf{X}$  (dacă există !), sunt puncte critice ale lui  $f$ . În particular, relațiile  $D_{\mathbf{x}} \mathbf{X} = A(Ax + b)$ ,  $D_{\mathbf{x}} f = (A(Ax + b), Ax + b)$  arată că mulțimea punctelor critice ale lui  $f$  conține liniile de cîmp ale lui  $\mathbf{X}$  care sunt drepte. Existența unei linii de cîmp  $\alpha$  a lui  $\mathbf{X}$  care este o dreaptă a lui  $\mathbb{R}^n$  impune rang  $A \leq n-1$ . Dacă  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  este un punct critic al energiei  $f$  și rang  $A = n$ , atunci  $x_0$  este un zero al lui  $\mathbf{X}$ .

Matricea hessianei  $d^2f$  a lui  $f$  are elementele

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik}.$$

De aceea  $d^2f \geq 0$  și deci energia  $f$  este o funcție convexă pe  $\mathbb{R}^n$ . Acest rezultat implică faptul că punctele critice ale lui  $f$  (dacă există!) coincid cu punctele de minim global și deci cu zerourile lui  $\mathbf{X}$ . De asemenea, curentul global determinat pe  $\mathbb{R}^n$  de grad  $f$  (cimp vectorial complet) mărește volumul în afară de cazul în care  $\mathbf{X}$  este paralel.

## 9.6. Energia unui cimp vectorial proiectiv

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cimp vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Cimpul  $\mathbf{X}$  este proiectiv adică,  $\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = c_j \delta_{ik} + c_k \delta_{ij}$ ,  $i, j, k = 1, \dots, n$ , dacă și numai dacă  $X_i(x) = x_i \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + d_i$ .

Energia  $f = \|\mathbf{X}\|^2/2$  are gradientul de componente

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n X_i \left( \delta_{ij} \sum_{k=1}^n c_k x_k + c_j x_i + a_{ij} \right) = \\ &= X_j \sum_{k=1}^n c_k x_k + c_j \sum_{i=1}^n X_i x_i + \sum_{i=1}^n a_{ij} X_i. \end{aligned}$$

Din acestea se observă că zerourile lui  $\mathbf{X}$  (dacă există!) sunt puncte critice ale lui  $f$ . Derivând din nou, găsim

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n X_i (c_j \delta_{ik} + c_k \delta_{ij}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} + X_k c_j + X_j c_k \quad \text{și} \quad \Delta f = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n c_i X_i = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{2}{n+1} D_{\mathbf{X}}(\operatorname{div} \mathbf{X}). \end{aligned}$$

## 9.7. Energia unui cimp vectorial torsional

Fie  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un cimp vectorial torsional pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ , adică,  $\mathbf{X}$  este de clasă  $C^\infty$  și  $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = a \delta_{ij} + X_i Y_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , unde  $a$  este un cimp scalar de clasă  $C^\infty$  pe  $D$ , iar  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$  este un cimp

vectorial de clasă  $C^\infty$  pe  $D$ . Energia  $f = \|\mathbf{X}\|^2/2$  a lui  $\mathbf{X}$  satisfacă  $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = aX_j + 2fY_j$ . Rezultă  $\text{grad } f = a\mathbf{X} + 2f\mathbf{Y}$  și  $D_{\mathbf{X}}f = 2(a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y}))f$ . Astfel: 1) zerourile lui  $\mathbf{X}$  (zerourile lui  $f$ , puncte de minim global ale lui  $f$ ) sunt puncte critice ale lui  $f$ , 2) punctele critice ale energiei  $f$  sunt sau zerouri ale lui  $f$  sau zerouri ale lui  $a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ .

Prin calcule directe găsim

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = X_j \frac{\partial a}{\partial x_k} + 2f \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} + a^2 \delta_{jk} + aX_j Y_k + 2aX_k Y_j + 4fY_j Y_k,$$

$$\Delta f = D_{\mathbf{X}}a + 2f \operatorname{div} \mathbf{Y} + na^2 + 3(\mathbf{X}, \mathbf{Y})a + 4f\|\mathbf{Y}\|^2.$$

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial torsional pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dacă  $x_0$  este un punct de maxim local al energiei  $f$  și  $a(x_0) \neq 0$ , atunci  $x_0$  este un zero al lui  $a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ .

**Demonstratie.** Fie  $x_0$  un punct de maxim local al energiei  $f$ . Atunci  $x_0$  este un punct critic al lui  $f$  [și deci un zero al lui  $f$  sau un zero al lui  $a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ] și  $\Delta f(x_0) \leq 0$ . Presupunem  $\mathbf{X}(x_0) = 0$ . Rezultă  $\Delta f(x_0) = na^2(x_0) > 0$ , contradicție! Rămîne că  $\mathbf{X}(x_0) \neq 0$  și deci  $x_0$  este un zero al lui  $a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ .

Liniile de cîmp ale unui cîmp torsional  $\mathbf{X}$  sunt drepte reparametrizate. Expresia energiei lui  $\mathbf{X}$  pe o linie de cîmp  $\alpha : I \rightarrow D$  este  $f \circ \alpha(t) = 2 \int_0^t (a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \circ \alpha(u) du$   $= f \circ \alpha(t_0) e^{\int_0^t (a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \circ \alpha(u) du}$ . Aceasta arată că  $f$  este sau o constantă sau are o variație exponentială pe liniile de cîmp. Dacă  $(a + (\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \circ \alpha$  este nedescrescătoare, atunci  $f \circ \alpha$  este sau convexă sau concavă.

## 9.8. Energia unui cîmp vectorial hamiltonian

Considerăm hamiltonianul  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto H(x, y)$  de clasă  $C^3$  și cîmpul vectorial hamiltonian  $\mathbf{X} = (X_i, X_{n+i})$ ,  $X_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}$ ,  $X_{n+i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Notind  $\mathbf{Y} = \text{grad } H = (\frac{\partial H}{\partial x_i}, \frac{\partial H}{\partial y_i})$  și observăm că  $\mathbf{X} = J\mathbf{Y}$ , unde  $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  este matricea structurii complexe canonice a lui  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Energia  $f = \|\mathbf{X}\|^2/2$  a cîmpului vectorial hamiltonian  $\mathbf{X}$  satisfacă  $\frac{1}{2} \|\mathbf{X}\|^2 = \frac{1}{2} \|\text{grad } H\|^2$ . Acest rezultat nu este întimplător. El este

o consecință a faptului că  $\mathbf{X}$  se obține din grad  $H$  prin rotația dată de matricea  $J(\mathbf{X})$  și grad  $H$  sunt cîmpuri vectoriale ortogonale, adică  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial tangent la hipersuprafețele de nivel constant atașate lui  $H$  și arată că zerourile lui  $f$  sunt puncte critice ale lui  $H$ .

Fie  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  o linie de gradient a lui  $H$ . Funcția  $f \circ \alpha$  este monotonă crescătoare. Dacă  $I = [t_0, \infty)$  și există  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = x_1$ , atunci  $x_1$  este un punct critic al lui  $H$  (un zero al lui  $\mathbf{X}$ ) și deci un zero al lui  $f$  (v. 5.1).

Cîmpul vectorial  $\mathbf{Y} = \text{grad } H$  este irațional și deci  $\text{grad } f = D_{\mathbf{Y}} \mathbf{Y} = D_{J\mathbf{X}}(-J\mathbf{X}) = D_{J\mathbf{X}} J\mathbf{X}$ . Astfel se observă că zerourile lui  $\mathbf{X}$  sunt puncte critice ale lui  $f$  și că mulțimea punctelor critice ale lui  $f$  conțin orbitele lui  $J\mathbf{X}$  care sunt drepte.

Notăm  $x_{n+i} = y_i$  și folosim indicii  $\alpha, \beta, \gamma = i, n+i$ . Matricea hessiană lui  $f$  are elementele

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= \sum_{\gamma=1}^{2n} \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_\beta} + \sum_{\gamma=1}^{2n} Y_\gamma \frac{\partial^2 Y_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \\ &= \sum_{\gamma=1}^{2n} \frac{\partial X_\gamma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial X_\gamma}{\partial x_\beta} + \sum_{\gamma=1}^{2n} X_\gamma \frac{\partial^2 X_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \end{aligned}$$

Ținând seama că  $\frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_\gamma}$ , găsim laplacianul

$$\Delta f = \sum_{\alpha, \gamma=1}^{2n} \left( \frac{\partial Y_\gamma}{\partial x_\alpha} \right)^2 + D_{\mathbf{Y}}(\text{div } \mathbf{Y}) = \sum_{\alpha, \gamma=1}^{2n} \left( \frac{\partial X_\gamma}{\partial x_\alpha} \right)^2 + D_{J\mathbf{X}}(\text{div } J\mathbf{X}).$$

Se observă că  $\text{div } J\mathbf{X} = -\Delta H$ . În consecință, sunt adevărate următoarele propoziții :

1)  $J\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial solenoidal dacă și numai dacă  $H$  este un cîmp scalar armonic.

2) Dacă  $H$  este un cîmp scalar armonic, atunci  $f$  este un cîmp scalar subarmonic.

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{X}$  un cîmp vectorial hamiltonian pe  $\mathbb{R}^{2n}$ . Dacă fiecare vector nenul  $\mathbf{X}(x)$  satisface  $D_{J\mathbf{X}(x)}(\text{div } J\mathbf{X}) > 0$  și energia  $f$  atinge un maxim local într-un punct  $x_0$ , atunci  $\mathbf{X}$  se anulează identic pe o vecinătate a lui  $x_0$ .

**Demonstrație.** Presupunem că  $x_0$  este un punct de maxim local (necesar punct critic al lui  $f$ ) și  $\mathbf{X}(x_0) \neq 0$ . Rezultă că hessiana  $d^2f(x_0)$  este negativ semidefinită și deci  $\Delta f(x_0) \leq 0$ . Pe de altă parte,  $\Delta f > 0$  în orice punct în care  $\mathbf{X}$  nu este zero. Rămîne că  $\mathbf{X}(x_0) = 0$ . Deoarece  $f(x_0) = 0$  este un maxim, funcția  $f$  și deci  $\mathbf{X}$  trebuie să se anuleze identic într-o vecinătate a lui  $x_0$ .

Presupunem că  $H$  nu are puncte critice. Atunci  $\mathbf{X} = \|\mathbf{X}\| \mathbf{U}$ ,  $\|\mathbf{U}\| = 1$  și restricția energiei  $f$  la o linie de cîmp  $\beta(s)$ ,  $s \in I$ , a lui  $\mathbf{U}$  ( $s$  fiind abscisa curbilinie) este bine determinată de restricția lui  $\text{div } \mathbf{U}$  la această linie. Într-adevăr, notind  $l = \|\mathbf{X}\| \circ \beta$ ,  $\varphi = \text{div } \mathbf{U} \circ \beta$  și ținând seama că  $\mathbf{X}$  este un cîmp vectorial solenoidal, adică  $0 = \text{div } \mathbf{X} = D_{\mathbf{U}} \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{X}\| \text{ div } \mathbf{U}$ , găsim  $dl/ds = -l\varphi$ . Astfel

$$l(s) = l_0 e^{-\int_{s_0}^s \varphi(t) dt}, \quad l(s_0) = l_0.$$

În încheiere să considerăm hamiltonianul  $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ ,

$x \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , care se atașează unui sistem conservativ cu un grad de libertate, cu  $V$  funcție de clasă  $C^3$ . În acest caz cimpul vectorial hamiltonian este  $(-y, V'(x))$  și are energia  $f(x, y) = (V''(x) + y^2)/2$ . Energia  $f$  este mărginită inferior, dar nu este mărginită superior.

Se observă că dacă  $x_0$  este un punct critic al lui  $V$ , atunci  $(x_0, 0)$  este un punct de minim global pentru  $f$ .

Deoarece  $df(x, y) = V'(x) V''(x) dx + y dy$ , punctele critice ale energiei sunt soluțiile sistemului  $V'(x) V''(x) = 0$ ,  $y = 0$ . Printre aceste puncte se află și  $(x_0, 0)$ , unde  $x_0$  este un punct de extrem sau de inflexiune pentru  $V$ .

Utilizând diferențiala de ordinul doi,  $d^2f(x, y) = (V'(x) V''(x))' dx^2 + dy^2$ , deducem că  $f$  este convexă dacă și numai dacă funcția  $V'V''$  este crescătoare. Tot de aici rezultă  $\Delta f = 1 + (V'V'')$  și deci  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  poate fi armonică. Într-adevăr, ecuația diferențială  $1 + (V'V'') = 0$  admite soluțiile

$$V(x) = \pm \left( \frac{x-b}{2} \sqrt{-x^2 + 2bx + c} - \frac{b^2+c}{2} \arcsin \frac{b-x}{\sqrt{b^2+c}} + d \right),$$

$x \in (b - \sqrt{b^2+c}, b + \sqrt{b^2+c})$ , care sunt de clasă  $C^3$ .

Considerăm sistemul diferențial  $\frac{dx}{dt} = -y$ ,  $\frac{dy}{dt} = V'(x)$  care descrie liniile de cimp ale cimpului vectorial  $(-y, V'(x))$  și presupunem că  $(x_0, 0)$  este un punct de echilibru. Utilizând aproximarea liniară  $\frac{dx}{dt} = -y$ ,  $\frac{dy}{dt} = V''(x_0)(x - x_0)$ , ajungem la următoarele concluzii :

- 1) dacă  $V''(x_0) \geq 0$ , atunci punctul de echilibru  $(x_0, 0)$  este stabil
- 2) dacă  $V''(x_0) < 0$  (rezultă că  $x_0$  este punct de maxim pentru  $V$ ) atunci punctul de echilibru  $(x_0, 0)$  este instabil.

**Complemente. Energia unei curbe.** Fie  $D$  o mulțime deschisă și conexă din  $\mathbb{R}^n$  și  $\alpha : I \rightarrow D$  o curbă de clasă  $C^1$ . Dacă  $[a, b] \subset I$ , atunci numărul  $L_a^b(\alpha) = \frac{1}{2} \int_a^b \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|^2 dt$  se numește *energia* lui  $\alpha$  de la  $a$  la  $b$ .

Energia lui  $\alpha$  de la  $a$  la  $b$  poate fi comparată cu lungimea arcului lui  $\alpha$  de la  $a$  la  $b$  care este dată prin  $L_a^b(\alpha) = \int_a^b \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| dt$ . Într-adevăr, utilizând inegalitatea lui Cauchy-Schwarz

$$\left( \int_a^b \varphi(t) \psi(t) dt \right)^2 \leq \left( \int_a^b \varphi^2(t) dt \right) \left( \int_a^b \psi^2(t) dt \right)$$

cu  $\varphi(t) = 1$ ,  $\psi(t) = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|$ , observăm că  $[L_a^b(\alpha)]^2 \leq 2(b-a) E_a^b(\alpha)$ , cu egalitate dacă și numai dacă  $\psi$  este o constantă.

Fie  $\mathbf{X}$  un cimp vectorial de clasă  $C^1$  pe  $D$  și  $f = \|\mathbf{X}\|^2/2$  energia lui  $\mathbf{X}$ . Dacă  $\alpha$  este o linie de cimp a lui  $\mathbf{X}$ , atunci

$$E_a^b(\alpha) = \int_a^b f(\alpha(t)) dt, \quad L_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{2f(\alpha(t))} dt$$

și în consecință au loc următoarele proprietăți :

- 1)  $E_a^b(\alpha)$  este nulă dacă și numai dacă  $\alpha$  este un punct de echilibru;
- 2)  $L_a^b(\alpha)$  este nulă dacă și numai dacă  $\alpha$  este un punct de echilibru;
- 3) în ipoteza că  $\alpha$  nu este un punct de echilibru,  $[L_a^b(\alpha)]^2 = 2(b-a) E_a^b(\alpha)$  dacă și numai dacă parametrul  $t$  este proporțional cu abscisa curbiliniie a lui  $\alpha$ ;
- 4) dacă  $\alpha$  este o linie de gradient a cîmpului scalar  $V$ , atunci  $2E_a^b(\alpha) = V(\alpha(b)) - V(\alpha(a))$ .

## BIBLIOGRAFIE

1. Arnold, V. *Ecuări diferențiale ordinare*. București, Editura Științifică și Enciclopedică, 1978.
2. Arnold, V. *Metodele matematice ale mecanicii clasice*. București, Editura Științifică și Enciclopedică, 1980.
3. Arnold, V. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Berlin, Springer Verlag, 1983.
4. Bacalău, I. *Ecuări diferențiale*. Litografia Institutului Politehnic București, 1984.
5. Bibikov, Y. *Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations*. Berlin, Springer Verlag, 1979.
6. Brickell, F., Clark, R. *Differentiable manifolds*. London, Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
7. Brînzanescu, V., Stănașilă, O. *Matematici speciale*. Litografia Institutului Politehnic București, 1984.
8. Caratheodory, C. *Grundlagen der Thermodynamik*. În : Math. Ann. 67 (1909), 369.
9. Carr, J. *Applications of centre manifold theory*. Berlin, Springer Verlag, 1981.
10. Cartianu, G., s.a. *Semnale, circuite și sisteme*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1980.
11. Chilov, G. *Analyse mathématique*. Moscou, Mir, 1975.
12. Chorin, A., Marsden, J. E. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Berlin, Springer Verlag, 1979.
13. Cornfeld, I. s.a., *Ergodic theory*. Berlin, Springer Verlag, 245, 1982.
14. Craiu, M., Roșculeț, M. *Ecuări diferențiale aplicative*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1971.
15. Krasnoselskii, M., s.a., *Vektorne polea na ploskosti*. Moscova, Gosatomizdat, 1963.
16. Crețu, T. *Fizică generală, I, II*, București, Editura Tehnică, 1985.
17. *Cursul de fizică Berkeley, I–V*, București, Editura Didactică și Pedagogică, 1982–1983.
18. Dubrovin, B., s.a. *Modern Geometry, Methods and Applications*, Berlin, Springer Verlag, 1984.
19. Durand, E. *Elesctrostatische, I–III*, Paris, Masson et Cie, 1966.
20. Ebin, D. *Completeness of Hamiltonian vector fields*. În : Proc. Amer. Math. Soc. 26, Nr. 4, 1970, p. 632–634.
21. Eisenhart, L. *Continuous groups of transformations*. New York, Dover Publications, Inc., 1961.
22. Gheorghiev, Gh., Oproiu, V., *Varietăți diferențiable finite și infinit dimensionale*. București, Editura Academiei R.S.R., 1976.
23. Gioncu, V., Ivan, M. *Teoria comportării critice și posteritice a structurilor elastice*. București, Editura Academiei R.S.R., 1984.
24. Gordon, W. *On the completeness of Hamiltonian vector fields*. În : Proc. Amer. Math. Soc. 26, 1970, p. 329–331.
25. Halanay, A. *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*. București, Editura Academiei R.S.R., 1963.
26. Hartman, P., *Ordinary differential equations*. New York, John Wiley, 1965.
27. Hassard, B., s.a. *Theory and applications of Hopf bifurcation*. Cambridge University Press, Anglia, 1981.
28. Ianuș, S. *Geometrie diferențială*. București, Editura Academiei R.S.R., 1983.
29. Ionescu, D. V., *Ecuări diferențiale și integrale*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1972.

30. Gerard Ioos, Daniel Joseph. *Elementary stability and bifurcation theory*. Berlin, Springer-Verlag, 1980.
31. Ispas, St., s.a. *Cosmosul, Laborator și uzină pentru viitorul omenirii*. București, Editura Tehnică, 1984.
32. Kubicek, M. *Algorithm for evaluation of complex bifurcation points in ordinary differential equations*. În : Siam. J. Appl. Math. 38, 1980, p. 103–107.
33. Leitmann, G. *Optimization techniques with applications to aerospace systems*. New York, Academic Press, 1962.
34. Lorenz, E. *Deterministic nonperiodic flow*. În : Journal of the atmospheric sciences, 20, 1963, p. 130–141.
35. Marsden, J., McCracken, M. *The Hopf bifurcation and its applications*. Berlin, Springer-Verlag, 1976.
36. Mirică, S. *Ecuări diferențiale*. Litografia Universității București, 1979.
37. Miron, R. *Geometrizarea sistemelor Pfaff în spații riemanniene cu metrică nedefinită*. În : St. Cerc. șt. Acad. R.P.R., Iași (Matematică), 1, 1958.
38. Miron, R. *Geometria configurațiilor Myller*. București, Editura Tehnică, 1966.
39. Mocanu, C. *Teoria cimpului electromagnetic*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1981.
40. Nicolescu, L. *Lecții de grupuri Lie*. Litografia Universității București, 1984.
41. Olariu, V., Stănișălă, T. *Probleme de ecuații diferențiale și cu derivate parțiale*. București, Editura Tehnică, 1982.
42. Pontriaguine, I., s.a. *Theorie mathematique des processus optimaux*. Moscou, Mir, 1974.
43. Poor, W. *Differential geometric structures*. New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1981.
44. Postnikov, M. *Lectures in geometry*. Moscou, Mir, 1982.
45. Ramsey, A. *Newtonian attraction*. Cambridge Science Classics, Anglia.
46. Săvescu, M., s.a. *Metode de optimizare în analiza circuitelor electronice*. București, Editura Tehnică, 1982.
47. Segel, Lee. *Mathematical models in molecular and cellular biology*. Cambridge University Press, Anglia, 1980.
48. Silas, Gh., s.a. *Vibrării mecanice*. București, Editura Tehnică, 1973.
49. Singer, I., Thorpe, J. *Lecture notes on elementary topology and geometry*. Illinois, Scott, Foresman and Company, 1967.
50. Smale, S. *The mathematics of time*. Berlin, Springer Verlag, 1980.
51. Ștefănescu, S. *Open magnetic field lines*. În : Rev. Physique, 3, 1958, p. 151–166 ; *Linii de cimp magnetice ale unui dicurent directiliniu strîmb*. În : St. Cerc. Fizică, 3, 1959, p. 387–399 ; *Linile de cimp magnetic a doi curenți rectilini egali*. Ibidem, 3, 1960, p. 563–583 ; *Linile de cimp magnetic ale unui dreptunghi central de curenți rectilini egali*. Ibidem, 21, 1969, p. 21–32.
52. Stoian, Z. *Ecuări diferențiale*. Litografia Institutului Politehnic, București, 1982.
53. Teleman, C. *Asupra sistemelor mecanice neolonne*. În : Analele Univ. București, 1957, p. 43.
54. Thom, R. *Structural stability and morphogenesis*. Massachusetts, W. A. Benjamin, Inc., 1975.
55. Thorpe, J. *Elementary topics in differential geometry*. Berlin, Springer Verlag, 1979.
56. Timothy, L., Bon, B. *State space analysis*. New York, Mc Graw-Hill Book Company.
57. Teodorescu, N., Olariu, V. *Ecuări diferențiale și cu derivate parțiale*. București, Editura Tehnică, 1978–80.
58. Teodorescu, I., Teodorescu, S. *Culegere de probleme de geometrie superioară*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1975.
59. Tugulea, A., Timotin, Al., Rădulescu, R. *Teoreme de unicitate pentru regimuri variabile ale cimpului electromagnetic*. În : St. Cerc. Energetică, Electrotehnica, 21, 1971, p. 109–128.
60. Udriște, C. *Independents vector fields on orientable hypersurfaces*. București, Editura Academiei R.S.R. 1976, p. 163–164.
61. Udriște, C., Tănărescu, E. *Minime și maxime*. București, Editura Tehnică, 1980.
62. Udriște, C., s.a. *Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1981.
63. Udriște, C., s.a. *Algebră, geometrie și ecuații diferențiale*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1982.
64. Udriște, C. *Extremum points of square lengths of some vector fields*. Colloviul Național de Geometrie și Topologie Bușteni, 27–30 iunie 1981, Bull. Math. 30 (78), 4, 1986, p. 361–370.

65. Udriște, C. *Proprietăți ale cimpurilor vectoriale affine și proiective*. În : *St. Cerc. Mat.* 36, nr. 5, 1984, p. 444–452.
  66. Udriște C. *Properties of conformal vector fields*. ICM, Warsaw, Poland, 16–24 august 1983.
  67. Udriște, C. *Properties of torse forming vector fields*. Colocviul Național de Geometrie și Topologie, Piatra Neamț, 16–19 iunie 1983 ; *Tensor, N.S.* 42, 1985, p. 137–144.
  68. Udriște, C., Radu, C., Zlătescu, A. *Complexitatea cimpurilor vectoriale hamiltoniene*. Colocviul Național de Geometrie și Topologie, Piatra Neamț, 16–19 iunie 1983 ; *Buletinul IPB*, 46–47, 1984–85, p. 15–20.
  69. Udriște, C. *Properties of irrotational vector fields*. În : *Journal of Geometry and Physics*, Pitagora Editrice Bologna, 2, 1985, p. 117–125.
  70. Vrânceanu, G., *Opera matematică*. București, Editura Academiei R.S.R., 1971–1975  
*Lecții de geometrie diferențială*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1962, 1964.
  71. Yano, K., Chen, B. *On the concurrent vector fields of immersed manifolds*. În : *KodaiMath. Sem. Rep.* 23, 1971, p. 343–351.
  72. Walker, J., *Dynamical systems and evolution equations*. New York, Plenum Press, 1980.
  73. Weinstein, A., Marsden, J. *A comparison theorem for Hamiltonian vector fields*. În : *Proc. Amer. Math. Soc.* 26, nr. 4, 1970, p. 629–631.

# FIELD LINES

## Contents

### 1. Vector fields

1.1. Scalar fields . . . . .	7
1.2. Vector fields . . . . .	10
1.3. Submanifolds of $\mathbb{R}^n$ . . . . .	16
1.4. Derivative with respect to a vector . . . . .	19
1.5. Vector fields as linear operators and derivations . . . . .	23
1.6. Differential operators . . . . .	28
1.7. Problems . . . . .	30

### 2. Particular vector fields

2.1. Irrotational vector fields . . . . .	33
2.2. Vector fields with spherical symmetry . . . . .	40
2.3. Solenoidal vector fields . . . . .	42
2.4. Monge and Stokes' representations . . . . .	45
2.5. Harmonic vector fields . . . . .	46
2.6. Killing vector fields . . . . .	47
2.7. Conformal vector fields . . . . .	48
2.8. Affine and projective vector fields . . . . .	50
2.9. Torse-forming vector fields . . . . .	52
2.10. Problems . . . . .	54

### 3. Field lines

3.1. Field lines . . . . .	56
3.2. First integrals . . . . .	60
3.3. Conjecture of Sabba Stefanescu . . . . .	68
3.4. Field lines of linear vector fields . . . . .	70
3.5. Runge Kutta method . . . . .	73
3.6. Completeness of vector fields . . . . .	76
3.7. Completeness of Hamiltonian vector fields . . . . .	80
3.8. Flows and Liouville theorem . . . . .	82
3.9. Global flow generated by a Killing or affine vector field . . . . .	85
3.10. Local flow generated by a conformal vector field . . . . .	87
3.11. Local flow generated by a projective vector field . . . . .	89
3.12. Vector fields attached to local groups of diffeomorphisms . . . . .	90
3.13. Problems . . . . .	93

### 4. Stability of equilibrium points

4.1. Problem of stability . . . . .	97
4.2. Stability of zeros of linear vector fields . . . . .	99
4.3. Classification of equilibrium points in plane . . . . .	102
4.4. Stability by linear approximation . . . . .	105
4.5. Stability by Liapunov functions . . . . .	111
4.6. Problems . . . . .	115

<b>5. Potential systems and catastrophes theory</b>	
5.1. Critical points and gradient lines . . . . .	119
5.2. Potential systems and elementary catastrophes . . . . .	124
5.3. Gradient lines of fold . . . . .	126
5.4. Gradient lines of cusp . . . . .	128
5.5. Equilibrium points of gradient of swallowtail . . . . .	130
5.6. Equilibrium points of gradient of butterfly . . . . .	131
5.7. Equilibrium points of gradient of elliptic umbilic . . . . .	132
5.8. Equilibrium points of gradient of hyperbolic umbilic . . . . .	134
5.9. Equilibrium points of parabolic umbilic . . . . .	135
5.10. Problems . . . . .	136
<b>6. Field hypersurfaces</b>	
6.1. Linear equations with partial derivatives of first order . . . . .	138
6.2 Homogeneous functions and Euler equation . . . . .	142
6.3 Cylindrical and conical hypersurfaces . . . . .	144
6.4 Hypersurfaces of revolution . . . . .	147
6.5. Proper values and vectors of a vector field . . . . .	149
6.6. Grid method . . . . .	151
6.7. Problems . . . . .	153
<b>7. Bifurcation theory</b>	
7.1 Bifurcation in the equilibrium set . . . . .	156
7.2 Centre manifold . . . . .	159
7.3. Flow bifurcation . . . . .	162
7.4. Hopf theorem of bifurcation . . . . .	164
7.5. Problems . . . . .	168
<b>8. Submanifolds orthogonal to field lines</b>	
8.1. Submanifolds orthogonal to field lines . . . . .	171
8.2. Completely integrable Pfaff equations . . . . .	173
8.3. Frobenius theorem . . . . .	176
8.4. Biscalar vector fields . . . . .	177
8.5. Distribution orthogonal to a vector field . . . . .	180
8.6. Field lines as intersections of nonholonomic spaces . . . . .	182
8.7. Distribution orthogonal to an affine vector field . . . . .	184
8.8. Parameter dependence of submanifolds orthogonal to field lines . . . . .	187
8.9. Problems . . . . .	188
<b>9. Energies</b>	
9.1. Energy of an arbitrary vector field . . . . .	191
9.2. Energy of an irrotational vector field . . . . .	194
9.3. Energy of a Killing vector field . . . . .	195
9.4. Energy of a conformal vector field . . . . .	196
9.5. Energy of an affine vector field . . . . .	197
9.6. Energy of a projective vector field . . . . .	198
9.7. Energy of a torse-forming vector field . . . . .	198
9.8. Energy of a Hamiltonian vector field . . . . .	199
<i>Bibliography</i>	203