

Prof. dr. ing. N. RACOVEANU
Conf. dr. ing. G. H. DODESCU
Dr. ing. I. MINCU

METODE NUMERICE PENTRU ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP HIPERBOLIC

Grigore Drăgăneș

1976, April 23



EDITURA TEHNICĂ
București — 1976

Multe probleme practice din domeniul tehnicii, biologiei, economiei etc. se modelează matematic prin ecuații cu derivate parțiale cu condiții inițiale și la limită. Rezolvarea acestor probleme cu ajutorul calculatoarelor electronice necesită înlocuirea lor prin scheme cu diferențe.

Teoria schemelor cu diferențe finite constituie o parte integrantă a matematicii moderne, care se ocupă de metode numerice. Presupunindu-se că cititorilor le sînt cunoscute principiile de bază ale acestor metode, se prezintă metodele practice de discretizare cu algoritmi și scheme logice pentru ecuații de tip hiperbolic, pentru sisteme de ecuații de tip hiperbolic, ecuații de ordin superior liniare și neliniare. O atenție deosebită se acordă metodei caracteristicilor și metodei denumite tehnica valorilor limită.

Lucrarea se adresează inginerilor, fizicienilor, precum și altor categorii de specialiști, care utilizează metode numerice pentru rezolvarea problemelor practice cu ajutorul calculatoarelor electronice.

Control științific: Prof. dr. ing. **LEON LIVOVSCI**
Redactor: **VALENTINA BUCUR**
Tehnoredactor: **VALERIU MORĂRESCU**
Coperta: **CONSTANTIN GULUȚĂ**

Bun de tipar: 30.3. 1976; coli de tipar: 17,25
Tiraj: 4 700 + 70 ex. broșate
C.Z.: 517. 94



c. 2543 I.P. „INFORMAȚIA”
Str. Brezoianu, nr. 2325
București

În cadrul cincinalului 1975—1980, aflat sub semnul revoluției științifice și tehnice, apariția unei lucrări despre metode numerice aplicabile pe calculator se înscrie pe linia generală de promovare a calculului automat. În întâmpinarea unei tendințe manifestate pe plan general în țara noastră, metodele de calcul numeric s-au răspândit în variate domenii, de la tehnică la economie, biologie, sociologie etc.

Lucrarea de față se adresează celor care caută soluții numerice ale ecuațiilor cu derivate parțiale de tip hiperbolic, independent de domeniul particular de aplicativitate. Exemplele de calcul sînt însă luate din domeniul tehnic iar limbajul utilizat este cel matematico-ingineresc.

Lucrarea cuprinde o introducere generală asupra calculului cu diferențe, derivării, integrării numerice și asupra interpolării, ceea ce este foarte util pentru prezentarea ulterioară.

Urmărindu-se un caracter unitar și totodată de cuprindere mai largă, la trecerea de la ecuații cu derivate parțiale la ecuații cu derivate ordinare s-a introdus o prezentare condensată a principalelor metode numerice pentru ecuațiile diferențiale ordinare.

Deși obiectivul lucrării este prezentarea unor metode numerice de calcul, ideile cu caracter fundamental nu sînt absente, astfel încît, pentru cei interesați, sînt dezvoltate conceptele de consistență, stabilitate și convergență într-un limbaj specific teoriei generale. De asemenea este prezentată o justificare cu caracter fundamental a calculului operațional utilizat în calculul cu diferențe, prin proprietățile distribuției Dirac.

Metodele referitoare la ecuațiile de tip hiperbolic ocupă locul central și sînt însoțite de organigrame și aplicații numerice ilustrative.

În spiritul documentelor de partid și de stat, care ne călăuzesc activitatea, autorii nutresc speranța că au reușit să realizeze concret, prin conținutul lucrării, o îmbinare armonioasă a teoriei cu practica.

Autorii

| | |
|---|-----|
| 1. Calculul cu diferențe | 7 |
| 1.1. Operatorul de translație | 7 |
| 1.2. Diferența la dreapta (înainte) | 9 |
| 1.3. Alți operatori diferență | 11 |
| 1.4. Proprietăți algebrice | 14 |
| 1.5. Polinoame de interpolare | 15 |
| 1.6. Derivarea numerică | 19 |
| 1.7. Integrarea numerică | 22 |
| 1.8. Funcții de mai multe variabile | 24 |
| 1.9. Operatori șablon | 27 |
| 1.10. Aplicații | 34 |
| 1.11. Calculul numeric al gradientului, divergenței și rotorului | 38 |
| 1.12. Precauțiile necesare la calculul cu diferențe | 43 |
| 1.13. O interpretare în distribuții a operatorilor diferență | 47 |
| 1.14. Noțiuni teoretice asupra aproximării prin discretizare | 49 |
| 1.15. Metode statistice utilizate la rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale | 62 |
| 2. Metode de discretizare | 75 |
| 2.1. Introducere | 75 |
| 2.2. Aproximații cu diferențe finite | 78 |
| 2.3. Noțiunea de consistență | 80 |
| 2.4. Eroarea de trunchiere | 80 |
| 2.5. Noțiunea de convergență | 80 |
| 2.6. Noțiunea de stabilitate | 81 |
| 2.7. Metode de discretizare pentru ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi | 82 |
| 2.8. Scheme cu diferențe | 83 |
| 2.9. Stabilitatea schemelor explicite | 90 |
| 2.10. Scheme implicite cu diferențe | 93 |
| 2.11. Stabilitatea schemelor implicite cu diferențe | 99 |
| 2.12. Cazul în care c este o funcție de x | 101 |
| 2.13. Cazul în care c este o funcție de u | 102 |
| 3. Metode cu diferențe pentru sisteme de ecuații de tip hiperbolic și ecuații de tip hiperbolic de ordinul al doilea | 106 |
| 3.1. Metode cu diferențe pentru sisteme de ecuații de tip hiperbolic | 106 |
| 3.2. Stabilitatea schemelor cu diferențe pentru sisteme de ecuații de tip hiperbolic | 109 |
| 3.3. Sisteme de ecuații diferențiale cu matricea C variabilă | 115 |
| 3.4. Sisteme de ecuații de tip hiperbolic de ordinul întâi în plan | 122 |

| | | |
|-----------|---|-----|
| 3.5. | Metode cu diferențe pentru ecuații de tip hiperbolic de ordinul doi | 129 |
| 3.6. | Stabilitatea schemei explicite cu diferențe pentru ecuația de ordinul doi | 133 |
| 3.7. | Scheme implicite cu diferențe pentru ecuația de tip hiperbolic de ordinul doi | 137 |
| 3.8. | Stabilitatea schemelor implicite cu diferențe pentru ecuația de ordinul doi | 139 |
| 3.9. | Scheme cu diferențe pentru cazul neliniar | 141 |
| 3.10. | Scheme cu diferențe pentru ecuații de tip hiperbolic de ordinul doi în plan | 145 |
| 3.11. | Metoda aproximațiilor succesive | 148 |
| 4. | Metoda caracteristicilor | 154 |
| 4.1. | Noțiunea de caracteristică | 155 |
| 4.2. | Prezentarea metodei caracteristicilor pentru un sistem de două ecuații cvasiliniare | 167 |
| 4.3. | Aproximații cu diferențe finite | 171 |
| 4.4. | Rețele de caracteristici | 172 |
| 4.5. | Metoda caracteristicilor în cazul unor rețele rectangulare cu specificarea intervalului de timp | 176 |
| 4.6. | Determinarea nodurilor de pe frontieră | 181 |
| 4.7. | Descrierea diagramei logice de calcul | 189 |
| 5. | Tehnica valorilor limită | 194 |
| 5.1. | Introducere | 194 |
| 5.2. | Problema cu condiții inițiale și la limită | 195 |
| 5.3. | Aproximarea cu diferențe | 196 |
| 5.4. | Metoda numerică | 200 |
| 5.5. | Algoritmul de calcul al metodelor | 201 |
| 5.6. | Descrierea diagramei logice de calcul | 205 |
| 6. | Reducerea ecuațiilor cu derivate parțiale de tip hiperbolic la ecuații diferențiale ordinare | 210 |
| 6.1. | Introducere | 210 |
| 6.2. | Metoda lui Euler | 211 |
| 6.3. | Metode de tipul Runge-Kutta | 217 |
| 6.4. | Alte metode uzuale | 221 |
| 6.5. | Sisteme de ecuații diferențiale ordinare | 225 |
| 6.6. | Probleme bilocale | 227 |
| 6.7. | Stabilitatea și consistență | 234 |
| 7. | Aplicații | 241 |
| 7.1. | Prezentarea exemplurilor considerate | 241 |
| 7.2. | Exemplul 1 | 250 |
| 7.3. | Exemplul 2 | 254 |
| 7.4. | Exemplul 3 | 258 |
| 7.5. | Exemplul 4 | 259 |
| 7.6. | Exemplul 5 | 261 |
| 7.7. | Exemplul 6 | 269 |
| | <i>Bibliografie</i> | 271 |

CALCULUL CU DIFERENȚE

1.1. Operatorul de translație

Să presupunem că în fig. 1.1 este reprezentat un conductor filiform, parcurs de curent. Se stabilesc anumite puncte, numerotate cu $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ în care se măsoară potențialele electrice corespunzătoare

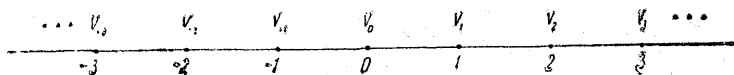


Fig. 1.1.

$\dots, V_{-3}, V_{-2}, V_{-1}, V_0, V_1, V_2, V_3, \dots$ Același exemplu poate fi transpus pe alte experiențe similare ca : temperatura în lungul unei conducte de termoficare, presiunea în lungul unei conducte de transport gaze, tensiunea sau curentul într-o linie bifilară lungă, amplitudinea vibrației unei corzi la un anumit moment t , cotele reliefului într-o secțiune plană, numărul de elevi în clase succesive, dinamica populației în ani succesivi, volumul producției unei întreprinderi în ani succesivi etc. Această listă ar putea fi prelungită indefinit; în toate aceste cazuri, se poate alcătui un tabel, după cum urmează :

$$X \dots x_{-3} \ x_{-2} \ x_{-1} \ x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \dots$$

$$Y \dots y_{-3} \ y_{-2} \ y_{-1} \ y_0 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \dots$$

Să presupunem că punctele x_i sînt echidistante, distanța dintre două puncte succesive fiind h , denumită *pas*. În acest caz

$$x_i = x_0 + ih, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (1.1)$$

unde cu Z s-a notat mulțimea numerelor întregi. Tabelul poate fi acum reprezentat astfel :

$$\begin{array}{cccccccc} Z & \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ X & \dots & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ Y & \dots & y_{-2} & y_{-1} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \dots \end{array}$$

Introducem *operatorul de translație* E definit prin relația

$$Ef(x_k) = f(x_k + h). \quad (1.2)$$

Se observă că operatorul E reprezintă o aplicație $Y \rightarrow Y$ unde cu Y s-a notat șirul ordonat $\{y_i\}_{i \in Z}$. Operatorul E poate fi repetat de i ori și atunci

$$E^i f(x_k) = f(x_k + ih) \quad (1.3)$$

sau

$$E^i y_k = y_{k+ih}.$$

Această ultimă scriere poate duce la ambiguități, cînd f nu este injectivă și se renunță la scrierea indicelui.

Exemplu. Din tabelul

$$\begin{array}{cccccccc} Z & \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ X & \dots & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ Y & \dots & 4 & 3 & 5 & 4,5 & 6 & 4 & 5,3 & \dots \end{array}$$

se deduce

$$E^2 f(x_{-1}) = f(x_1) = 6; \quad E^{-5} f(x_2) = f(x_{-3}) = 4.$$

Ambiguitate apare dacă scriem valorile lui y fără indici: $E^{-5}(4) = 4$, deoarece și $E^5(4) = 4$. Se observă că funcția f nu este injectivă.

Întrucît operatorul E aplică Y în Y , numărul întreg i poate fi considerat ca puterea de ordinul i al lui E , dată de formula $E^i = EE^{i-1}$. Operatorul identitate este definit ca $E^0 f(x) = f(x)$.

Relația (1.3) poate fi extinsă și la cazul

$$E^\alpha f(x) = f(x + \alpha h), \quad (1.4)$$

unde α este un număr rațional: $\alpha \in Q$. Această extindere este un mod de a pune problema interpolării (respectiv

extrapolării) în puncte care nu sînt date prin tabel. După cum vom vedea, acest procedeu presupune introducerea unor ipoteze asupra aplicației f , extinsă pentru valori care nu sînt conținute în tabel.

1.2. Diferența la dreapta (înainte)

Operatorul *diferența la dreapta*, notat cu Δ , este definit prin relația

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x). \quad (1.5)$$

Se poate introduce o scriere formală, introducînd în dreapta operatorul E :

$$\Delta(f(x)) = Ef(x) - E^0f(x).$$

Deoarece în întreaga expresie apare $f(x)$, se poate renunța la scrierea acestei funcții, astfel încît

$$\Delta = E - E^0. \quad (1.6)$$

Repetarea operatorului Δ este interpretată ca un produs, după formula

$$\Delta^n = \Delta\Delta^{n-1}, \text{ unde } n \in \mathbb{Z}.$$

De exemplu :

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[f(x + h) - f(x)] = \\ &= f(x + 2h) - f(x + h) - f(x + h) + f(x) = \\ &= f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x) \end{aligned}$$

sau, în scriere prescurtată :

$$\Delta^2 = (E - E^0)^2 = E^2 - 2E + E^0. \quad (1.7)$$

În general se poate scrie

$$\Delta^n = (E - E^0)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Dezvoltîndu-se binomul, se obțin astfel formulele pentru diferențe la dreapta de orice ordin :

$$\Delta^n = E^n - \binom{n}{1}E^{n-1} + \binom{n}{2}E^{n-2} - \dots, \quad (1.9)$$

unde cu $\binom{n}{k}$ s-au notat combinațiile de n obiecte luate câte k .

Tabelul 1.1

| Z | X | Y | Δy | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ | $\Delta^5 y$ | $\Delta^6 y$ |
|---|----|---------|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 20 | 1,30103 | 0,17609 | | | | | |
| 2 | 30 | 1,47712 | 0,12194 | -0,05115 | 0,02312 | -0,01282 | 0,00802 | |
| 3 | 40 | 1,60206 | 0,09691 | -0,02803 | 0,01030 | -0,00480 | 0,00257 | -0,000545 |
| 4 | 50 | 1,69897 | 0,07918 | -0,01773 | 0,00550 | -0,00223 | | |
| 5 | 60 | 1,77815 | 0,06695 | -0,01223 | 0,00327 | | | |
| 6 | 70 | 1,84510 | 0,05799 | -0,00896 | | | | |
| 7 | 80 | 1,90309 | | | | | | |

Exemplu. În tabelul 1.1 sint calculate toate diferențele la dreapta posibile. De exemplu :

$$\Delta^2 y_4 = -0,01223; \quad \Delta^4 y_2 = -0,0048; \quad \Delta^6 y_1 = 0,0545.$$

1.3. Alți operatori diferență

Diferența la stînga (înapoi) se definește prin relația

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h) \quad (1.10)$$

sau, în scriere prescurtată :

$$\nabla = E^0 - E^{-1}. \quad (1.11)$$

Într-un mod similar cu diferența la dreapta, se calculează diferențele la stînga de ordin superior :

$$\nabla^n = (E^0 - E^{-1})^n. \quad (1.12)$$

și se dezvoltă binomul pentru n număr natural

$$\nabla^n = E^0 - \binom{n}{1}E^{-1} + \binom{n}{2}E^{-2} - \binom{n}{3}E^{-3} + \dots \quad (1.13)$$

Pentru $n = 2$ avem.

$$\nabla^2 = E^0 - 2E^{-1} + E^{-2}. \quad (1.14)$$

Într-adevăr

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x) &= \nabla(\nabla f(x)) = \nabla(f(x) - f(x - h)) = \\ &= f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h). \end{aligned}$$

Din (1.6) și (1.11) rezultă o relație între Δ și ∇ :

$$\Delta - \nabla = E - 2E^0 + E^{-1} = (E^{1/2} - E^{-1/2})^2. \quad (1.15)$$

Într-adevăr :

$$\begin{aligned} \Delta f(x) - \nabla f(x) &= f(x + h) - f(x) - f(x) + \\ &+ f(x - h) = Ef(x) - 2E^0 f(x) + E^{-1} f(x). \end{aligned}$$

Diferența simetrică (centrată) se definește prin relația

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right) \quad (1.16)$$

sau, în scriere prescurtată :

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}. \quad (1.17)$$

Pentru diferența simetrică de ordinul doi avem

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (E^{1/2} - E^{-1/2})^2 = E - 2E^0 + E^{-1} = \\ &= \Delta - \nabla. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Pentru diferențele simetrice de ordin superior formulele se obțin calculînd binomul

$$\delta^n = (E^{1/2} - E^{-1/2})^n. \quad (1.19)$$

Operatorul medie se definește prin relația

$$\mu f(x) = \frac{1}{2} \left[f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right) \right] \quad (1.20)$$

sau, în scriere prescurtată :

$$\mu = \frac{1}{2} (E^{1/2} + E^{-1/2}). \quad (1.21)$$

Următoarele formule sînt utile pentru calcule :

$$\Delta = E - E^0 = E(E^0 - E^{-1}) = E\nabla, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{1}{4} (E^{1/2} + E^{-1/2})^2 = \frac{1}{4} (E + 2E^0 + E^{-1}) = \\ &= E^0 + \frac{1}{4} \delta^2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Din tabelul 1.1 avem

$$\nabla^2 y_7 = -0,00896; \quad \nabla^5 y_6 = 0,00802,$$

$$\delta^2 y_4 = 0,07918 - 0,09691 = -0,01773,$$

$$\mu^2 y_4 = 1,69897 - \frac{1}{4} 0,01773 = 1,69897 - 0,00443 = 1,69454.$$

Cu privire la modul cum sînt citite diferențele simetrice sau mediile, dăm următoarele exemple :

$$\delta E^{1/2} = (E^{1/2} - E^{-1/2}) E^{1/2} = E - E^0 = \Delta,$$

deci se citește diferența la dreapta;

$$\delta E^{-1/2} = (E^{1/2} - E^{-1/2})E^{-1/2} = E^0 - E^{-1} = \nabla,$$

deci se citește diferența la stînga;

$$\delta^2 = (E^{1/2} - E^{-1/2})^2 = E^{-1}(E - E^0)^2 = E^{-1}\Delta^2;$$

de asemenea :

$$\delta E^{1/2}\delta^2 = E^{1/2}\delta^3 = E^{-1}\Delta^3;$$

$$\delta^4 = E^{-2}(E - E^0)^4 = E^{-2}\Delta^4 \text{ etc.}$$

Cu referire la tabelul 1.1 avem de exemplu

$$\delta^2 f(50) = \Delta f(50) - \nabla f(50) = 0,07918 - 0,09691 = -0,01773.$$

Dar aceasta este totodată și $\Delta^2 f(40)$ sau $\nabla^2 f(60)$.

Alt exemplu :

$$E^{1/2}\delta^3 f(50) = E^{-1}\Delta^3(50) = 0,0055.$$

Se observă mai departe că diferențele simetrice (translatate la dreapta pentru ordin impar) se citesc pe linia punctului considerat (cele pare) și translatate la dreapta cu un pas (cele de ordin impar).

Pentru operatorul medie μ avem

$$\mu E^{1/2} = \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2})E^{1/2} = \frac{1}{2}(E^0 + E),$$

adică media valorilor vecine. Alt exemplu :

$$\mu^2 = \frac{1}{4}(E + 2E^0 + E^{-1}),$$

ceea ce se poate calcula direct din tabel. De asemenea :

$$\begin{aligned} \mu\delta &= \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2})(E^{1/2} - E^{-1/2}) = \\ &= \frac{1}{2}(E - E^{-1}) \end{aligned} \quad (1.23)$$

sau, mai departe,

$$\mu\delta = \frac{1}{2}(E - E^0 + E^0 - E^{-1}) = \frac{1}{2}(\Delta + \nabla). \quad (1.24)$$

Din cele de mai sus rezultă imediat

$$\mu\delta^3 = \frac{1}{2}(\Delta + \nabla)(\Delta - \nabla) = \frac{1}{2}(\Delta^2 - \nabla^2).$$

Prin urmare, sînt de preferat formule cu diferențe simetrice care conțin termeni de forma $\mu\delta^{2n+1}$ și δ^{2n} , întrucît se deduc direct din tabele de tipul 1.1. Observăm, de exemplu, că

$$\begin{aligned} \delta^4 = E^{-2}\Delta^4 = E^2\nabla^4 \quad \text{și} \quad \mu\delta^5 = \frac{1}{2}(E^{-2}\Delta^5 + \\ + E^2\nabla^5) = \frac{1}{2}(E^{-1}\Delta^4 - E\nabla^4). \end{aligned}$$

1.4. Proprietăți algebrice

Probabil că cititorul a observat deja existența unor structuri algebrice a mulțimii operatorilor diferență. Dacă notăm mulțimea operatorilor diferență cu $\Omega = \{\omega\}$, avem următoarea proprietate de asociativitate (a sumei):

$$\omega_1 + (\omega_2 + \omega_3) = (\omega_1 + \omega_2) + \omega_3,$$

unde ω_i este oricare din operatorii diferență $\omega_i \in \Omega$. Proprietatea de comutativitate se verifică:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_2 + \omega_1.$$

Aceste proprietăți se referă și la produs:

$$\omega_1(\omega_2\omega_3) = (\omega_1\omega_2)\omega_3, \quad \omega_1\omega_2 = \omega_2\omega_1.$$

Se verifică și proprietatea de distributivitate a produsului în raport cu suma:

$$\omega_1(\omega_2 + \omega_3) = \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3.$$

Există element neutru față de adunare:

$$\omega + 0 = \omega$$

și orice element din Ω este simetrizabil:

$$\omega + (-\omega) = (-\omega) + \omega = 0.$$

Am văzut de asemenea că referitor la produs există element neutru, ca de exemplu :

$$E^0 \omega = \omega$$

și că E este inversabil :

$$EE^{-1} = E^0.$$

De asemenea, observăm că operatorii ω sînt aditivi și omogeni, deci rezultă că sînt operatori liniari.

Enumerarea acestor proprietăți va permite cititorului să efectueze calcule cu operatorii diferență, pentru obținerea unor formule practice, ca de exemplu formulele (1.22), (1.23), (1.24) etc.

1.5. Polinoame de interpolare

Prin datele din tabelul de forma 1.1 se definește o aplicație $X \rightarrow Y$. Problema interpolării constă în aflarea valorilor lui $f(x)$ în puncte care nu sînt specificate în tabelul inițial. Aceasta înseamnă a extinde aplicația f astfel încît să fie continuă în întreg domeniul de definiție. Aceasta presupune însă cunoașterea legității fenomenului descris prin datele din tabel, pentru a putea evalua erorile introduse prin extinderea funcției f . Avînd în vedere astfel de precauții, formulele de interpolare pot avea aplicații practice utile.

Aplicînd operatorul E^α în punctul x_0 , se obține relația

$$E^\alpha f(x_0) = f(x_0 + \alpha h). \quad (1.25)$$

Pentru diferite valori ale lui α se află valoarea lui y în punctul corespunzător, exprimată prin formule cu diferențe la dreapta, la stînga sau simetrice. De exemplu,

$$E^\alpha = (E_0 + \Delta)^\alpha.$$

Se presupune că $f(x)$ este dezvoltabilă în serie Taylor :

$$E^\alpha = E^0 + \alpha \Delta + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} \Delta^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} \Delta^3 + \dots, \quad \alpha > 0. \quad (1.26)$$

Aceasta este formula de interpolare a lui Newton, exprimată prin diferențe la dreapta. Într-un mod similar poate fi obținută formula de interpolare prin diferențe la stînga :

$$E^{-1} = E^0 - \nabla, \text{ de unde } E^\alpha = (E^0 - \nabla)^{-\alpha}.$$

După dezvoltare rezultă

$$E^\alpha = E^0 + \alpha \nabla + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2!} \nabla^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{3!} \nabla^3 + \dots, \quad \alpha < 0. \quad (1.27)$$

Pentru valori situate spre începutul tabelului, formula cu diferențe la stînga este mai indicată, deoarece utilizează mai multe puncte. Pentru valori de la sfîrșitul tabelului, este mai indicată formula cu diferențe la dreapta, din același motiv. Pentru valori din centrul tabelului, sînt mai utile formulele cu diferențe simetrice. Pentru aceasta observăm că

$$2\mu\delta = E - E^{-1}, \quad 4\mu^2 = E + 2E^0 + E^{-1},$$

de unde deducem

$$E + E^0 = 2\mu^2 + \mu\delta$$

sau

$$E = E^0 + \frac{1}{2} \delta^2 + \mu\delta.$$

Ridicînd la puterea α , se obține

$$E^\alpha = \left(E^0 + \frac{1}{2} \delta^2 + \mu\delta \right)^\alpha.$$

Prin dezvoltare obținem

$$E^\alpha = E^0 + \alpha \left(\mu\delta + \frac{1}{2} \delta^2 \right) + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} \left(\mu\delta + \frac{1}{2} \delta^2 \right)^2 + \dots \quad (1.28)$$

Observînd cã $\mu\delta + \frac{1}{2}\delta^2 = E - E^0 = \Delta$, rezultã cã formula (1.28) este identicã cu formula (1.26). De asemenea, întrucît

$$\Delta = E^0 - E^{-1} + E - E = \mu\delta - \frac{1}{2}\delta^2,$$

din (1.27) se obține

$$E^\alpha = E^0 + \alpha \left(\mu\delta - \frac{1}{2}\delta^2 \right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} \left(\mu\delta - \frac{1}{2}\delta^2 \right)^2 + \dots \quad (1.29)$$

Dezvoltînd, se obțin formule care conțin pe μ și δ . Evident, astfel de formule mai pot fi obținute în continuare prin procedee similare.

O formulã utilã de interpolare este formula lui Gauss :

$$\begin{aligned} E^\alpha = E^0 + \binom{\alpha}{1} \delta E^{1/2} + \binom{\alpha}{2} \delta^2 + \binom{\alpha+1}{3} \delta^3 E^{1/2} + \\ + \binom{\alpha+1}{4} \delta^4 + \dots + \binom{\alpha+r-1}{2r} \delta^{2r} + \\ + \binom{\alpha+r}{2r+1} \delta^{2r+1} E^{1/2} + \dots \end{aligned} \quad (1.30)$$

Pentru cazul cînd punctele de pe axa x nu sînt echi-distante, se poate utiliza formula lui Lagrange :

$$L_j(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)'}{\prod_{i=1}^{n+1} (x_j - x_i)'} , \quad j = 1, 2, \dots, n+1, \quad (1.31)$$

unde semnul „prim” al lui Π indicã excluderea cazului $i = j$.

Exemple. 1. Cu formula lui Lagrange, să se găsească polinomul care are ca rădăcini valorile din tabelul următor :

| | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 0 | 1 | 4 | 9 |

Rezultă parabola :

$$y = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} +$$

$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)},$$

deci

$$y = 1 - 2x + x^2.$$

2. Construim un tabel (tabelul 1.2) care satisface ecuația

$$y = 1 + 2x - x^2 + x^3.$$

Tabelul 1.2

| x | y | Δy | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ |
|-----|-----|------------|--------------|--------------|--------------|
| 0 | 1 | 2 | | | |
| 1 | 3 | 6 | 4 | | |
| 2 | 9 | 16 | 10 | 6 | 0 |
| 3 | 25 | 32 | 16 | 6 | 0 |
| 4 | 57 | 54 | 22 | 6 | |
| 5 | 111 | | | | |

Calculăm valoarea lui y pentru $x_0 = 0$ și $\alpha = 6$. Din (1.26) se obține

$$E^6 f(0) = 1 + 6 \cdot 2 + \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 6 = 193 = f(6),$$

ceea ce se verifică cu ecuația dată. Din datele tabelului se află că polinomul care are ca rădăcini punctele tabelate este de gradul trei, deoarece diferențele de ordinul trei sînt constante. Polinomul se află din (1.26), punînd $h = 1$ și $x_0 = 0$:

$$E^\alpha f(0) = 1 + \alpha \cdot 2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot 4 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \cdot 6 =$$

$$= 1 + 2\alpha - \alpha^2 + \alpha^3.$$

Cu formula (1.27), pentru $\alpha = -6$ și $x_0 = 5$, calculele sînt :

$$E^{-6}f(5) = 111 - 6 \cdot 54 + \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 22 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 6 = -3,$$

ceea ce se verifică prin ecuația dată (valoarea dată de $x = -1$). Cu formula (1.30), luînd $x_0 = 3$ și $\alpha = 3$, avem :

$$E^3f(3) = 25 + 3 \cdot 32 + \frac{3 \cdot 2}{2!} (32 - 16) + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} (22 - 16) = 193,$$

adică regăsim valoarea lui $f(6)$.

1.6. Derivarea numerică

Dacă $f(x)$ este dată printr-un tabel, a calcula derivata într-un punct înseamnă a dota f cu proprietatea de derivabilitate, adică a admite că $f(x)$ este o funcție derivabilă de un număr convenabil de ori. Rezultă că prin calculul derivatei cu date din tabel vom obține valoarea derivatei, în punctul considerat, a funcției reprezentate de polinomul de interpolare determinat de punctele luate în considerare. Iată deci că revine ideea însemnătății pe care o are cunoașterea legității fenomenului reprezentat prin datele din tabel.

Dacă $f(x)$ este dezvoltabilă în serie Taylor, avem

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \quad (1.31)$$

Această expresie poate fi pusă într-o formă de scriere operațională, dacă introducem operatorul liniar $D = \frac{d}{dx}$.

Observăm că D admite scrierea produsului sub forma

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n},$$

definit prin relația

$$D^n = DD^{n-1}. \quad (1.32)$$

Cu acestea formula (1.31) devine

$$E = E^0 + \frac{hD}{1} + \frac{(hD)^2}{2!} + \frac{(hD)^3}{3!} + \dots = e^{hD}.$$

De aici deducem

$$D = \frac{1}{h} \ln E. \quad (1.33)$$

Aceasta este expresia generală a operatorului de derivare, din care se obțin diverse formule în funcție de diferența la dreapta, la stânga, simetrică etc. De exemplu :

$$D = \frac{1}{h} \ln (E^0 + \Delta).$$

Dezvoltând în serie, se obține

$$D = \frac{1}{h} \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots \right). \quad (1.34)$$

Din relația $E^{-1} = e^{-hD}$ obținem

$$D = -\frac{1}{h} \ln (E^0 - \nabla).$$

Se deduce imediat că

$$D = \frac{1}{h} \left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots \right). \quad (1.35)$$

Observând că

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} = e^{\frac{hD}{2}} - e^{-\frac{hD}{2}} = 2 \operatorname{sh} \frac{hD}{2},$$

avem mai departe

$$D = \frac{2}{h} \operatorname{arg sh} \frac{\delta}{2};$$

Prin dezvoltare în serie obținem

$$D = \frac{2}{h} \left[\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{2} \right)^3 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{1}{5} \left(\frac{\delta}{2} \right)^5 - \dots \right]; \quad (1.36)$$

și înmulțind la dreapta cu expresia $E^0 = \mu \left(E^0 + \frac{\delta^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}}$; după efectuarea calculului se obține

$$D = \frac{\mu}{h} \left(\delta - \frac{1}{6} \delta^3 + \frac{1}{30} \delta^5 - \frac{1}{400} \delta^7 + \dots \right) \quad (1.37)$$

Pentru derivatele de ordin superior se utilizează (1.32), obținându-se

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12} \Delta^4 - \frac{5}{6} \Delta^5 + \dots \right), \\ D^2 &= \frac{1}{h^2} \left(\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12} \nabla^4 + \frac{5}{6} \nabla^5 + \dots \right), \quad (1.38) \\ D^2 &= \frac{1}{h^2} \left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + \frac{\delta^6}{90} - \frac{\delta^8}{560} + \dots \right). \end{aligned}$$

Într-un mod similar se procedează și pentru derivatele de ordinul 3, 4, ...

Exemplu. Să se calculeze $f'(50)$ din tabelul 1.1 și să se compare cu rezultatul obținut, ținând seama că $y = \lg x$. Avem $h = 10$; cu formula (1.34) se obține

$$Df(50) = \frac{1}{10} \left(0,07918 + \frac{1}{2} \cdot 0,01223 + \frac{1}{3} \cdot 0,00327 \right) = 0,0086385.$$

De asemenea

$$f'(x) = \frac{\lg e}{x}, \quad \text{de unde } f'(50) = \frac{0,43425}{50} = 0,008685,$$

deci eroarea apare la a cincea zecimală.

Cu formulele (1.37) și (1.24) se obține următorul rezultat :

$$\begin{aligned} Df(50) &= \frac{1}{10} \left[\frac{1}{2} \cdot (0,07918 + 0,09691) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot (0,01223 - \right. \\ &\left. - 0,02803) + \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-0,00223 + 0,01282) \right] = 0,00869045. \end{aligned}$$

Eroarea este mai mică, deoarece s-au luat în considerare și diferențele de ordinul cinci, grație utilizării formulei cu diferențe simetrice, pentru o valoare din centrul tabelului.

1.7. Integrarea numerică

Aplicația $f(x)$ dată prin tabel o extindem la o funcție integrabilă pe intervalul $[x_0, x_0 + nh]$. Introducem operatorul liniar

$$I_n f(x) = \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x) dx = F(x_0 + nh) - F(x_0),$$

unde cu $F(x)$ s-a notat primitiva funcției $f(x)$. În scriere operatorială

$$I_n = (E^n - E^0)D^{-1}, \quad (1.39)$$

unde s-a considerat că $f(x) = DF(x)$ și că operatorul D este inversabil. Expresia (1.39) reprezintă forma generală a formulelor de integrare numerică. Luând în considerare (1.33), avem

$$I_n = h(E^n - E^0)(\ln E)^{-1}. \quad (1.40)$$

Introducînd diferența la dreapta, se obține

$$I_n = \frac{(E^0 + \Delta)^n - E^0}{\ln(E^0 + \Delta)}.$$

Pentru dezvoltarea în serie utilizăm forma de scriere

$$I_n = h \frac{(E^0 + \Delta)^n - E^0}{\Delta} \cdot \frac{\Delta}{\ln(E^0 + \Delta)}.$$

Se dezvoltă în serie cei doi factori ai produsului și apoi se efectuează produsul. Rezultatul este

$$I_n = nh \left[E^0 + \frac{n}{2} \Delta + \frac{n(2n-3)}{12} \Delta^2 + \frac{n(n-2)^2}{24} \Delta^3 + \right. \\ \left. + \frac{n(6n^3 - 45n^2 + 110n - 90)}{720} \Delta^4 + \dots \right]. \quad (1.41)$$

Aceasta este formula de integrare numerică, folosind diferențele la dreapta. Din această formulă se deduc direct formulele Newton-Cotes. De exemplu, pentru $n = 1$, reținînd numai termenul cu diferențe de ordinul

întii, se obține formula trapezelor. Pentru $n = 2$, reținând și termenul în Δ^2 , se obține formula lui Simpson etc.

Redăm mai jos formulele Newton — Cotes, pînă la ordinul șase inclusiv :

$$I_1 = \frac{h}{2} (E^0 + E) \quad (\text{formula trapezelor}),$$

$$I_2 = \frac{h}{3} (E^0 + 4E + E^2) \quad (\text{formula lui Simpson}),$$

$$I_3 = \frac{3}{8} h (E^0 + 3E + 3E^2 + E^3),$$

$$I_4 = \frac{2}{45} h (7E^0 + 32E + 12E^2 + 32E^3 + 7E^4),$$

$$I_5 = \frac{5}{288} h (19E^0 + 75E + 50E^2 + 50E^3 + 75E^4 + 19E^5),$$

$$I_6 = \frac{1}{140} h (41E^0 + 216E + 27E^2 + 272E^3 + 27E^4 + \\ + 216E^5 + 41E^6).$$

Exemplu. Să se calculeze numeric $\int_0^1 e^{-x} dx$ și să se compare cu rezultatul analitic.

Avem

$$n = 2; \quad h = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{6} (1 + 4e^{-\frac{1}{2}} + e^{-1}) = 0,63235;$$

analitic :

$$- e^{-x} \Big|_0^1 = 0,63212.$$

Pentru $n = 4$ avem

$$h = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{90} \left(7 + 32e^{-\frac{1}{4}} + 12e^{-\frac{1}{2}} + 32e^{-\frac{3}{4}} + 7e^{-1} \right) = 0,63214.$$

După cum era de așteptat, eroarea pentru $n = 4$ este mai mică decît cea rezultată cu $n = 2$.

1.8. Funcții de mai multe variabile

Consecvent scopului practic urmărit de această lucrare, vom exemplifica metode și formule ale calculului cu diferențe pe cazul unei funcții reale de două variabile reale :

$$z = f(x, y).$$

Ca exemplu, în cazul unei corzi vibrante (mișcare plană) amplitudinea este funcție de coordonata unui punct al corzii și de timp. Presupunind că timpul este determinat la intervale egale și coordonata este dată prin puncte echidistante, se realizează un masiv de date care definesc o aplicație $X \times Y \rightarrow Z$. Operatorul de translație se definește în acest caz prin relațiile

$$E_x f(x, y) = f(x + h, y), \quad (1.42)$$

$$E_y f(x, y) = f(x, y + k),$$

unde h este pasul pe axa x , iar k este pasul pe axa y . Avem de asemenea

$$E_x E_y f(x, y) = f(x + h, y + k); \quad (1.43)$$

se observă că

$$E_x E_y = E_y E_x.$$

Extinzînd aceste idei, se poate arăta că operatorii diferență pot fi afectați de indicii x și y , calculele efectuîndu-se după aceleași reguli ale algebrei elementare. De exemplu :

$$\Delta_x \Delta_y = (E_x - E^0) (E_y - E^0) = E_x E_y - E_x - E_y + E^0.$$

Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \Delta_x \Delta_y f(x, y) &= \Delta_x [f(x, y + k) - f(x, y)] = \\ &= f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + \\ &\quad + f(x, y) = \Delta_y \Delta_x f(x, y). \end{aligned}$$

Polinoamele de interpolare sînt date de expresia generală $E_x^\alpha E_y^\beta$.

De exemplu, pentru formulele cu diferențe la dreapta avem

$$E_x^\alpha E_y^\beta = (\Delta_x + E^0)^\alpha (\Delta_y + E^0)^\beta,$$

de unde obținem

$$E_x^\alpha E_y^\beta = \left[E^0 + \binom{\alpha}{1} \Delta_x + \binom{\alpha}{2} \Delta_x^2 + \dots \right] \left[E^0 + \binom{\beta}{1} \Delta_y + \binom{\beta}{2} \Delta_y^2 + \dots \right].$$

Efectuind produsul, se obține

$$E_x^\alpha E_y^\beta = E^0 + \binom{\alpha}{1} \Delta_x + \binom{\beta}{1} \Delta_y + \binom{\alpha}{2} \Delta_x^2 + \binom{\alpha}{1} \binom{\beta}{1} \Delta_x \Delta_y + \binom{\beta}{2} \Delta_y^2 + \dots \quad (1.44)$$

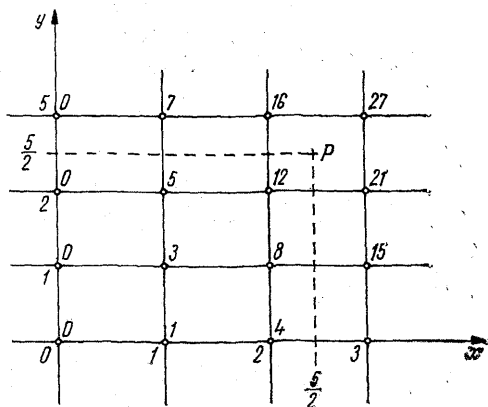


Fig. 1.2.

Exemplu. Se dă $z = x^2 + 2xy$ și se cere să se afle $f\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$,

utilizând polinomul de interpolare (1.44) cu punctul inițial $(1, 1)$ și cu pasul $h = k = 1$.

Reprezentăm valorile lui z în fig. 1.2.

Valoarea lui z în punctul P se află aplicind formula (1.44), cu $\alpha = \beta = 3/2$:

$$z_{\frac{5}{2}} \cdot \frac{5}{2} = 3 + \frac{3}{2} \cdot 5 + \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{3 \cdot 1}{2!} \cdot 0 = \frac{75}{4}.$$

Din ecuație rezultă

$$z_{\frac{5}{2}} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} + 2 \cdot \frac{25}{4} = \frac{75}{4}.$$

Pentru derivatele în raport numai cu x , respectiv în raport numai cu y , sînt valabile formulele (1.34) — (1.38) afectate de indicii corespunzători. Pentru derivatele mixte ținem seama de dezvoltarea în serie Taylor, considerată cu pasul h pe ambele axe:

$$\begin{aligned} E_x E_y f(x, y) &= f(x + h, y + h) = f(x, y) + \\ &+ \frac{h D_x}{1!} f(x, y) + \frac{h D_y}{1!} f(x, y) + \frac{h^2 D_x^2}{2!} f(x, y) + \\ &+ 2 \frac{h^2 D_x D_y}{2!} f(x, y) + \frac{h^2 D_y^2}{2!} f(x, y) + \dots \end{aligned}$$

De aici deducem

$$E_x E_y = E^0 + \frac{h}{1!} (D_x + D_y) + \frac{h^2}{2!} (D_x + D_y)^2 + \dots \quad (1.45)$$

și mai departe

$$E_x E_y = e^{h(D_x + D_y)} = e^{h D_x} e^{h D_y}, \quad (1.46)$$

de unde

$$D_x + D_y = \frac{1}{h} \ln (E_x E_y) = \frac{1}{h} (\ln E_x + \ln E_y),$$

astfel încît formulele (1.34) și (1.38) își păstrează valabilitatea. Pentru a afla derivata $D_x D_y$ exprimată prin diferența la dreapta observăm că

$$D_x D_y = \frac{1}{h^2} \left(\Delta_x - \frac{\Delta_x^2}{2} + \frac{\Delta_x^3}{3} - \dots \right) \left(\Delta_y - \frac{\Delta_y^2}{2} + \frac{\Delta_y^3}{3} - \dots \right),$$

de unde

$$D_x D_y = \frac{1}{h^2} \left[\Delta_x \Delta_y - \frac{1}{2} (\Delta_x \Delta_y^2 + \Delta_y \Delta_x^2) + \dots \right]. \quad (1.47)$$

Exemplu. Se dă $f(x, y) = x^2 y$. Să se calculeze numeric $D_x D_y$ în punctul $(1, 0)$ și să se compare cu rezultatul analitic.

Sînt suficiente diferențele de ordinul întâi, deci :

$$D_x D_y = \frac{1}{h^2} \left[(E_x - E^0)(E_y - E^0) - \frac{1}{2} (E_x - E^0)(E_y - E^0)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (E_y - E^0)(E_x - E^0)^2 \right]$$

sau

$$D_x D_y = \frac{1}{h^2} \left[3 E_x E_y - \frac{5}{2} (E_x + E_y) + \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (E_x E_y^2 + E_x^2 E_y) + 2 E^0 \right].$$

Pentru $h = 1$ și $f(0, 0)$ avem

$$D_x D_y f(1, 0) = 3 \cdot 4 - \frac{5}{2} (0 + 1) + \frac{1}{2} (0 + 2) - \frac{1}{2} (8 + 9) = 2.$$

Analitic :

$$D_x D_y f(x, y) = 2x,$$

deci

$$D_x D_y f(1, 0) = 2.$$

Formula cu diferențe simetrice se obține într-un mod similar :

$$D_x D_y = \frac{\mu_x \mu_y}{h^2} \left[\delta_x \delta_y - \frac{1}{6} (\delta_x \delta_y^3 + \delta_y \delta_x^3) + \right. \\ \left. + \frac{1}{30} (\delta_x \delta_y^5 + \delta_x^5 \delta_y) - \dots \right]. \quad (1.48)$$

1.9. Operatori șablon

În aplicațiile practice sînt de o reală utilitate reprezentările operatorilor diferență prin șabloane, care indică fiecare coeficient din formulă, plasat în nodul respectiv

al rețelei. Pentru exemplificare, vom avea în vedere numai formulele de derivare, deoarece acestea sînt utile la calculul soluțiilor numerice ale ecuațiilor diferențiale.

Pentru o funcție $f(x)$, derivarea numerică se obține utilizînd formulele (1.34) și următoarele. Pentru formula cu diferențe la dreapta avem

$$D = \frac{1}{h} \Delta = \frac{1}{h} (E - E^0).$$

În reprezentarea cu operator șablon aceasta devine

$$D = \frac{1}{h} \left[\begin{array}{c|c} -E^0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.49)$$

În acest șablon am fixat pe E^0 ; orientînd axa x de la stînga la dreapta, E se află în prima căsuță din dreapta. S-a scris numai coeficientul lui E , pentru economie de scriere. Dacă în formula (1.34) reținem doi termeni, atunci se obține

$$D = \frac{1}{h} \left[\begin{array}{c|c|c} -\frac{3}{2} E^0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \quad (1.50)$$

Pentru a se specifica ordinul de mărime al erorii introduse (prin raport cu polinomul de interpolare) se obișnuiește să se scrie lîngă formulele respective $o(h^2)$ etc., menționîndu-se în acest exemplu că eroarea are „ordinul lui h^2 ” etc.

Pentru formulele cu diferență la stînga avem

$$D = \frac{1}{h} \left[\begin{array}{c|c} -1 & E^0 \end{array} \right] \quad (1.51)$$

S-au reținut doi termeni din formula (1.35):

$$D = \frac{1}{h} \left[\begin{array}{c|c|c} +\frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} E^0 \end{array} \right] \quad (1.52)$$

Adesea pentru calcule practice este importantă formula derivatei dată de diferența simetrică, deoarece

reținând numai primul termen, eroarea are ordinul $o(h)^2$.
Din (1.37) rezultă

$$D = \frac{1}{2h} \left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 \cdot E^0 & +1 \end{array} \right] \quad (1.53)$$

Pentru un sistem cartezian de referințe, în probleme plane, derivatele parțiale se scriu cu operatorii șablon orientați după axele x și y . De exemplu, dacă sistemul

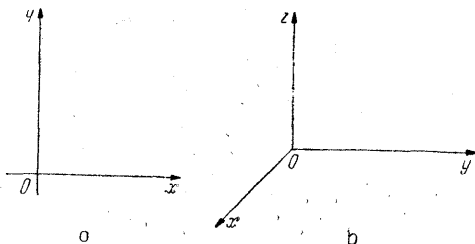


Fig. 1.3.

de referințe este cel din fig. 1.3, *a*, iar pasul rețelei este același pe cele două axe, atunci derivatele parțiale se scriu în modul următor:

$$D_x = \frac{1}{2h} \left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 \cdot E^0 & 1 \end{array} \right]$$

$$D_y = \frac{1}{2h} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \cdot E^0 \\ \hline -1 \end{array} \right] \quad (1.54)$$

În cazul unui sistem de referințe pe trei axe, pentru $f(x, y, z)$ trebuie introdusă o convenție suplimentară. Propunem cititorului următorul mod de reprezentare: fie sistemul de referințe din fig. 1.3, *b*.

Operatorul șablon îl reprezentăm prin trei secțiuni plane, paralele cu planul xOy . În modul acesta, șablonul din mijloc cuprinde o reprezentare identică cu cele din problemele plane, șablonul din stînga reprezintă secțiunea translatată cu E_z^{-1} , iar cea din dreapta translatată cu E_z .

Tabelul 1.3

| | | | | | |
|----------------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|---------------|------------------|
| $E_x^{-1}E_yE_z^{-1}$ | $E_yE_z^{-1}$ | $E_xE_yE_z^{-1}$ | $E_x^{-1}E_yE_z$ | E_yE_z | $E_xE_yE_z$ |
| $E_x^{-1}E_z^{-1}$ | E_z^{-1} | $E_xE_z^{-1}$ | $E_x^{-1}E_z$ | E_z | E_xE_z |
| $E_x^{-1}E_y^{-1}E_z^{-1}$ | $E_y^{-1}E_z^{-1}$ | $E_xE_y^{-1}E_z^{-1}$ | $E_x^{-1}E_y^{-1}E_z$ | $E_y^{-1}E_z$ | $E_xE_y^{-1}E_z$ |

Pentru o rețea care cuprinde nodurile translatate cu același pas în toate direcțiile, operatorul șablon se referă la punctele din tabelul 1.3. În fiecare căsuță se scrie coeficientul termenului respectiv în E_x , E_y și E_z , fără a mai menționa operatorii de translație.

În căsuțele care lipsesc, sau care sînt goale, se citește coeficientul zero. Cu aceste precizări rezultă următoarele formule de derivare, la o rețea cu pasul h pe cele trei direcții ale sistemului cartezian de referință :

$$\begin{aligned}
 D_x &= \frac{1}{2h} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 0 \cdot E^0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right) \\
 D_y &= \frac{1}{2h} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline 0 & 0 \cdot E^0 & 0 \\ \hline & -1 & \\ \hline \end{array} \right) \\
 D_z &= \frac{1}{2h} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 \cdot E^0 & 1 \\ \hline \end{array} \right)
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Aceste expresii sînt deduse din formula cu diferențe simetrice.

Utilizînd formula cu diferențe simetrice (1.38) pentru derivatele de ordinul doi și $o(h^2)$, rezultă :

$$\begin{aligned}
 D_{xx} &= \frac{1}{h^2} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & -2E^0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right) \\
 D_{yy} &= \frac{1}{h^2} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline 0 & -2E^0 & 0 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} \right) \\
 D_{zz} &= \frac{1}{h^2} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2E^0 & 1 \\ \hline \end{array} \right)
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

Cu formula (1.48) se obține :

$$\begin{aligned}
 D_{xy} &= \frac{1}{4h^2} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & -1 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdot E^0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \\ \hline & & & & \end{array} \right) \\
 D_{yz} &= \frac{1}{4h^2} \left(\begin{array}{c|c|c|c} -1 & & & 1 \\ \hline 0 & & 0 \cdot E^0 & 0 \\ \hline 1 & & & -1 \\ \hline \end{array} \right) \\
 D_{xz} &= \frac{1}{4h^2} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 \cdot E^0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right)
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

Astfel de formule pot fi obținute în continuare, în funcție de particularitățile problemei studiate și cu un ordin de eroare corespunzător.

Operatorii șablon mențin proprietățile algebrice ale operatorului de translație E , ca de exemplu adunarea și înmulțirea. Regula de adunare rezultă direct din tabelul 1.3. Se observă că un coeficient se adună algebric cu coeficientul din căsuța cu același indice, în cazul sumei a doi operatori. Să luăm ca exemplu expresia laplacianului

$$\Delta = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}.$$

Din (1.56) se obține

$$\Delta = \frac{1}{h^2} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & & 1 & & \\ \hline 1 & 1 & -6E^0 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & & \\ \hline \end{array} \right). \tag{1.58}$$

Această formulă este frecvent utilizată pentru rezolvarea ecuației Laplace

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & 1 & & \\ \hline 1 & 1 & -6 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & & \\ \hline \end{array} = 0.$$

Înmulțirea operatorilor șablon rezultă de asemenea din tabelul 1.3 și din faptul că produsul operatorilor de translație a fost definit anterior. De exemplu, avem

$$D_{xy} = D_x \cdot D_y = \frac{1}{(2h)^2} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Produsul se obține prin înmulțirea fiecărui coeficient din căsuțele primului factor, cu fiecare coeficient din căsuțele celui de-al doilea factor. Locul rezultatului fiecărei înmulțiri se află din tabelul 1.3, ca de exemplu

$(-1)E_x^{-1} \cdot (1)E_y = -E_x^{-1}E_y$, se scrie -1 în această căsuță,

$(-1)E_x^{-1} \cdot (-1)E_y^{-1} = E_x^{-1}E_y^{-1}$, se scrie $+1$ în această căsuță,

ș.a.m.d. Rezultă

$$D_{xy} = \frac{1}{4h^2} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -1 & & 1 \\ \hline 0 & & 0 & \\ \hline & 1 & -1 & \\ \hline \end{array} \right),$$

adică se verifică prima formulă din (1.57).

Cititorul poate verifica fără dificultate că suma și produsul sînt comutative; de asemenea, poate verifica și extinderea celorlalte proprietăți algebrice ale operatorului E asupra operatorului șablon.

1.10. Aplicații

1. Să se deducă o formulă cu diferențe pentru ecuația Laplace, cu $o(h^4)$. Avem

$$\Delta = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 = 0. \quad (1.59)$$

Utilizând diferențele simetrice cu $o(h^4)$, se obține

$$12(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) - (\delta_x^4 + \delta_y^4 + \delta_z^4) = 0.$$

Diferențele de ordinul patru pot fi exprimate prin produse de diferențe de ordinul doi, folosind următoarele relații, care se obțin din (1.59) prin derivări convenabile :

$$D_x^4 = -D_x^2 D_y^2 - D_x^2 D_z^2,$$

$$D_y^4 = -D_y^2 D_x^2 - D_y^2 D_z^2,$$

$$D_z^4 = -D_z^2 D_x^2 - D_z^2 D_y^2.$$

De aici obținem

$$\delta_x^4 = -\delta_x^2 \delta_y^2 - \delta_x^2 \delta_z^2,$$

$$\delta_y^4 = -\delta_y^2 \delta_x^2 - \delta_y^2 \delta_z^2,$$

$$\delta_z^4 = -\delta_z^2 \delta_x^2 - \delta_z^2 \delta_y^2.$$

Rezultă deci

$$6(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) + \delta_x^2 \delta_y^2 + \delta_y^2 \delta_x^2 + \delta_z^2 \delta_x^2 = 0.$$

Exprimind diferențele cu ajutorul operatorilor șablon, se obțin succesiv :

$$6 \delta_x^2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 6 & -12 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

$$6 \delta_y^2 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline -12 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

$$6 \delta_z^2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & -12 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\delta_x^2 \delta_y^2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\delta_y^2 \delta_z^2 \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline 4 \\ \hline -2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\delta_z^2 \delta_x^2 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline -2 & 4 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Efectuind suma, rezultă

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & -24 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} = 0. \quad (1.60)$$

Pentru o problemă plană (xOy) se obține

$$6(\delta_x^2 + \delta_y^2) + \delta_x^2 \delta_y^2 = 0.$$

Introducând operatorii șablon, rezultă

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 1 \\ \hline 4 & -20 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} = 0.$$

Aceasta este formula cu diferențe pentru nouă puncte, cu $o(h^4)$, despre care s-a demonstrat că reprezintă formula optimă (în sensul minimizării

erorii) pentru nouă puncte în plan. Cu aceste formule se calculează în interiorul domeniului studiat. Condițiile de pe frontieră cer alte formule.

2. Procesul de difuzie a căldurii într-o bară subțire poate fi descris de ecuația

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = C \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

unde C este o constantă, θ este temperatura într-un punct de abscisa x și la timpul t . În scriere operațională :

$$D_x^2 = CD_t.$$

Axele de coordonate sînt orientate ca în fig. 1.4. Cu $o(h^2)$ avem

$$D_x^2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

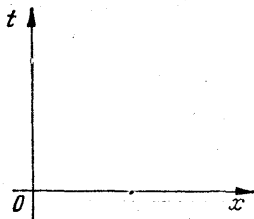


Fig. 1.4.

Pentru derivata în raport cu timpul este necesar să se ia formula de derivare cu diferențe la dreapta, din motive care privesc stabilitatea calculului (se va vedea la studiul ecuațiilor de tip parabolic). Deci :

$$D_t = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Introducînd în ecuația dată, se obține

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} + \frac{C}{k} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} = 0.$$

Cu această formulă se calculează în interiorul domeniului studiat.

Formula cu diferențe Crank-Nicolson se obține în modul următor : derivata de ordinul întâi în raport cu timpul se exprimă reținînd și termenul de ordinul trei :

$$D_t = \frac{\mu}{h} \left(\delta - \frac{1}{6} \delta^3 \right).$$

Derivând ecuația dată de două ori în raport cu t , se obține

$$\frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} = C \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3}.$$

Se elimină acum δ^3 folosind această ecuație; introducând operatorii șablon și efectuând produsul, se obține în final (pentru $C = 1$)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & -2 & -2 & \frac{h^2}{k} \\ \hline 1 & -2 & +2 & \frac{h^2}{k} \\ \hline 0 & & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = 0$$

Accastă formulă are eroarea de ordinul lui h^2 atât pentru x cât și pentru t .

3. Amplitudinile vibrațiilor plane ale unei coarde perfect elastice pot fi descrise de ecuația

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = C^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

unde φ este amplitudinea unui punct de abscisa x și la timpul t , C reprezentând o constantă de propagare. În scriere operațională rezultă

$$D_x^2 = C^2 D_t^2.$$

Orientînd sistemul de coordonate ca în aplicația precedentă, se trasează o rețea cu pasul h pe axa x și cu pasul k pe axa t . Derivatele se calculează cu formulele cu diferențe simetrice și $o(h^2)$. Avem deci

$$D_x^2 = \frac{1}{h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$D_t^2 = \frac{1}{k^2} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Introducindu-le în ecuația dată, rezultă

$$\begin{array}{c} \frac{C^2}{k^2} \\ \frac{1}{h^2} \left[\begin{array}{ccc} \frac{2C^2}{k^2} & - & 2 \\ & & \end{array} \right] \frac{1}{h^2} \\ - \frac{C^2}{k^2} \end{array} = 0. \quad (1.63)$$

Aceasta este formula cu care se poate calcula în interiorul rețelei. Pentru contur sînt necesare alte formule.

1.11. Calculul numeric al gradientului, divergenței și rotorului

Raportat la un sistem de axe trirectangulare, expresia operatorului diferențial „nabla” este

$$\nabla = D_x \mathbf{i} + D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k}. \quad (1.64)$$

Rezultă de aici că pentru gradient, divergență și rotor calculul numeric se reduce la calculul derivatelor D_x , D_y și D_z . De exemplu, putem calcula cu formula

$$\nabla = \frac{1}{2h} \left[\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \mathbf{i} + \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ 0 & 0 & 0 \\ & & 1 \end{array} \right) \mathbf{j} + \right. \\ \left. + \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \mathbf{k} \right].$$

Ca exemplu aplicativ, să calculăm gradientul unui câmp scalar φ exprimat ca derivată spațială^{1*)}:

$$(\text{grad } \varphi)_{P_0} = \lim_{\delta(\Omega) \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Sigma} (\mathbf{n}\varphi) d\sigma}{\Omega}, \quad P_0 \in \Omega, \quad (1.66)$$

unde suprafața închisă Σ mărginește domeniul de volum Ω , iar diametrul domeniului $\delta(\Omega)$ tinde către zero. Cu \mathbf{n} s-a notat vectorul unitate, normal pe suprafața Σ și orientat spre exteriorul suprafeței.

Să considerăm punctul P_0 și valorile lui φ în punctele vecine prezentate în fig. 1.5.

Considerind valoarea lui φ în punctul E_x , înmulțită cu vectorul arie a feței unui cub determinat de toate punctele translate cu un pas, avem

$$E_x \varphi 4h^2 \mathbf{i},$$

deoarece am considerat același pas h pe cele trei direcții iar punctul E_x în centrul unei fețe de arie $4h^2$. Pentru fața opusă a cubului, vom avea evident

$$-E_x^{-1} \varphi 4h^2 \mathbf{i}.$$

Procedînd în același mod pentru fețele cubului normale pe direcția y , respectiv z , și ținînd seamă că volumul cubului este egal cu $8h^3$, rezultă în final

$$(\text{grad } \varphi)_{P_0} \approx \frac{1}{2h} [(E_x - E_x^{-1})\mathbf{i} + (E_y - E_y^{-1})\mathbf{j} + (E_z - E_z^{-1})\mathbf{k}] \varphi$$

1*) Șabac I. Gh., *Matematici speciale*. Vol. 2, București, Editura didactică și pedagogică, 1964.

sau, mai departe :

$$\begin{aligned}
 (\text{grad } \varphi)_{P_0} = & \frac{1}{2h} \left[\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \dot{0} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right) \mathbf{i} + \right. \\
 & + \left. \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline \end{array} \right) \right. \\
 & + \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right) \mathbf{j} + \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right) \mathbf{k} \right] \varphi, \\
 & \left. \left(\begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline \end{array} \right) \right]
 \end{aligned}$$

adică s-a obținut formula ce rezultă din aplicarea lui (1.65). Din această aplicație decurg și unele precauții cu privire la calculul gradientului, ca de exemplu alegerea pasului astfel încît considerarea lui φ constant pe fiecare față a cubului să nu introducă erori inacceptabile. Pe de altă parte, cum se va vedea ulterior, micșorarea pasului h poate conduce la operații aritmetice cu numere mici, în care caz erorile generate de trunchieri și rotunjiri pot deveni importante.

Pentru calculul divergenței, să considerăm un vector câmp \mathbf{V} și să utilizăm ca punct de plecare expresia ei ca derivată spațială :

$$(\text{div } \mathbf{V})_{P_0} = \lim_{\delta(\Omega) \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Sigma} (\mathbf{nV}) d\sigma}{\Omega}, \quad P_0 \in \Omega. \quad (1.67)$$

Construind același cub ca în exemplul precedent, pentru fața care conține punctul E_x avem

$$4h^2 \mathbf{i}(E_x \mathbf{V}) = 4h^2 E_x (\mathbf{iV}) = 4h^2 E_x V_x,$$

iar pentru fața opusă

$$-4h^2 E_x^{-1} (\mathbf{iV}) = -4h^2 E_x^{-1} V_x.$$

Procedînd în același mod pentru celelalte două direcții și ținînd seamă că volumul cubului este egal cu $8h^3$, se obține

$$\begin{aligned}
 (\text{div } \mathbf{V})_{P_0} = & \frac{1}{2h} [(E_x - E_x^{-1}) (\mathbf{iV}) + (E_y - E_y^{-1}) (\mathbf{jV}) + \\
 & + (E_z - E_z^{-1}) (\mathbf{kV})].
 \end{aligned}$$

Se observă fără dificultate că aceasta este formula ce rezultă din aplicarea lui (1.65).

Același procedeu îl vom aplica și pentru calculul numeric al rotorului în punctul P_0 , considerînd ca punct de plecare expresia cu derivata spațială:

$$(\text{rot } \mathbf{V})_{P_0} = \lim_{\delta(\Omega) \rightarrow 0} \frac{\oint (\mathbf{n} \times \mathbf{V}) d\sigma}{\Omega}, \quad P_0 \in \Omega. \quad (1.68)$$

Pentru fața care conține punctul E_x avem

$$4h^2 E_x (\mathbf{i} \times \mathbf{V}),$$

iar pentru fața opusă rezultă

$$-4h^2 E_x^{-1} (\mathbf{i} \times \mathbf{V}).$$

Cu același procedeu pentru celelalte direcții și ținînd seama că volumul Ω este egal cu $8h^3$, rezultă

$$(\text{rot } \mathbf{V})_{P_0} = \frac{1}{2h} [(E_x - E_x^{-1}) (\mathbf{i} \times \mathbf{V}) + (E_y - E_y^{-1}) (\mathbf{j} \times \mathbf{V}) + (E_z - E_z^{-1}) (\mathbf{k} \times \mathbf{V})],$$

adică s-a obținut rezultatul aplicării formulei (1.65) la calculul rotorului vectorului câmp \mathbf{V} .

Exerciții. 1. Să se calculeze numeric gradientul în punctul de coordonate $(1, 1, 1)$ al cimpului scalar

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Notăm $\varphi(1, 1, 1)$ cu φ_1 , alegem pasul $h = 0,1$ și avem

$$E_x \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3,21}}, \quad E_y \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3,21}}, \quad E_z \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3,21}},$$

$$E_x^{-1} \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2,81}}, \quad E_y^{-1} \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2,81}}, \quad E_z^{-1} \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2,81}},$$

de unde rezultă

$$\text{grad } \varphi_1 = \frac{1}{0,2} \left(\frac{1}{\sqrt{3,21}} - \frac{1}{\sqrt{2,81}} \right) (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -0,19 (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Rezultatul calculului analitic este

$$\text{grad } \varphi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2,27}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -0,192(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

2. Să se calculeze numeric divergența câmpului vectorial

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

în punctul de coordonate (1, 1, 1). Luând pasul $h = 0,1$ pe toate direcțiile, avem

$$\text{div } \mathbf{R} = \frac{1}{0,2} [(1,1 - 0,9) + (1,1 - 0,9) + 1,1 - 0,9] = 3,$$

adică rezultatul exact. Acesta se explică prin faptul că derivata calculată numeric se aplică unei forme liniare în x, y și z .

3. Să se calculeze numeric rotorul în punctul (1, 1, 1) al vectorului $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, unde \mathbf{R} este vectorul de poziție, \mathbf{V} viteza periferică, iar $\boldsymbol{\omega}$ viteza unghiulară, la un corp care se rotește cu viteza unghiulară constantă în jurul axei fixe Oz . Avem

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Deci :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{V} = & \frac{1}{0,2} \{ \mathbf{i} \times [\mathbf{k}\omega \times (1,1\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) - \omega\mathbf{k} - (0,9\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})] + \\ & + \mathbf{j} \times [\mathbf{k}\omega \times (\mathbf{i} + 1,1\mathbf{j} + \mathbf{k}) - \omega\mathbf{k} \times (\mathbf{i} + 0,9\mathbf{j} + \mathbf{k})] + \\ & + \mathbf{k} \times [\mathbf{k}\omega \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 1,1\mathbf{k}) - \omega\mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0,9\mathbf{k})] \} \end{aligned}$$

sau

$$\text{rot } \mathbf{V} = \frac{1}{0,2} \{ \mathbf{i}\omega \times [(1,1\mathbf{j} - \mathbf{i}) - (0,9\mathbf{j} - \mathbf{i})] +$$

$$+ \omega\mathbf{j} \times [(\mathbf{j} - 1,1\mathbf{i}) - (\mathbf{j} - 0,9\mathbf{i})] + \omega\mathbf{k} \times [(\mathbf{j} - \mathbf{i}) - (\mathbf{j} - \mathbf{i})] \}$$

sau

$$\text{rot } \mathbf{V} = \frac{\omega}{0,2} (0,2\mathbf{k} + 0,2\mathbf{k}) = 2\omega\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

S-a obținut rezultatul exact, ca efect al liniarității.

Atragem atenția asupra faptului că operatorul de translație E_x aplicat unui vector \mathbf{V} deplasează acest vector cu pasul h după x , adică

$$E_x \mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{V}(x + h, y, z).$$

Cu alte cuvinte, se extinde definiția pentru o funcție scalară.

1.12. Precauțiile necesare la calculul cu diferențe

Un tabel cu date de forma 1.1 nu dă alte informații decât cele rezultate din aplicația $f: X \rightarrow Y$ definită prin acest tabel. Aplicarea calculului cu diferențe la interpolare, derivare, integrare etc. presupune introducerea unor ipoteze care să permită extensia lui f . De fapt, în toate aceste cazuri se face uz de polinomul de interpolare, reținându-se numai un anumit număr de termeni ai polinomului. Deci este important a evalua restul neglijat prin această trunchiere.

Un caz particular important este acela când diferențele calculate cu datele din tabel se anulează la ordinul n . Aceasta înseamnă că polinomul de interpolare admite ca rădăcini toate datele tabelului, deci restul este nul. În general însă, mai ales pentru extrapolare, utilizarea unui polinom de grad mic nu este recomandabilă.

Exemple. Să considerăm tabelul 1.4 cu diferențe realizat pentru funcția

$$y = \frac{1}{1 + x^2} \quad (1.69)$$

cu $x_i = i$, în intervalul $(0, 7)$. Atunci

$$E^{-7} f(7) = 1,37975.$$

Dar $f(0) = 1$. De asemenea :

$$E^{-8} f(7) = 3,65128,$$

dar din formula (1.69) rezultă $f(-1) = 0,5$. De asemenea :

$$f^{-4}(3) = 1,7 \text{ în loc de } f(-1) = 0,5.$$

Într-adevăr, dacă dezvoltăm funcția (1.69) în serie în vecinătatea punctului $x = 0$, se obține

$$f(x) = 1 - x^2 + \frac{8}{3} x^4 - \dots$$

astfel încît neglijarea lui $R(x)$ la un grad mic nu este acceptabilă. Sub aspect practic este de observat că citirea diferențelor de ordinul întâi din tabel sugerează o comportare asimptotică a lui $f(x)$, ceea ce este evident în (1.69). Așadar, utilizarea unui polinom de interpolare de grad mic pentru cazul cînd tabelul sugerează o comportare asimptotică este nerecomandabilă.

Tabelul 1.4

| x | y | Δ | Δ^2 | Δ^3 | Δ^4 | Δ^5 | Δ^6 | Δ^7 |
|-----|---------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 0,5 | -0,5 | 0,2 | 0 | -0,14118 | +0,24436 | -0,32143 | |
| 2 | 0,2 | -0,3 | 0,2 | -0,14118 | +0,10318 | -0,07707 | +0,05832 | +0,37975 |
| 3 | 0,1 | -0,1 | 0,05882 | -0,038 | 0,02611 | -0,01875 | | |
| 4 | 0,05882 | -0,04118 | 0,02082 | -0,01189 | 0,00736 | | | |
| 5 | 0,03846 | -0,02036 | 0,00893 | -0,00453 | | | | |
| 6 | 0,02703 | -0,01143 | 0,00440 | | | | | |
| 7 | 0,02 | -0,00703 | | | | | | |

Un alt exemplu ilustrativ este cazul funcțiilor periodice. În tabelul 1.5 se dau datele;

Tabelul 1.5

| | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|----|----|---|---|---|---|----|----|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| y_i | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 |

aici interpolarea polinomială este inutilizabilă, astfel încît se caută o funcție periodică. De exemplu :

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} x$$

verifică datele din tabel.

Alt exemplu îl expunem scriind tabelul cu diferențe pentru șirul lui Fibonacci dat de funcția recursivă

$$y_{i+2} = y_{i+1} + y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$

Calculînd diferențele, rezultă tabelul 1.6.

Tabelul 1.6

| x | y | Δ | Δ^2 | Δ^3 | Δ^4 | Δ^5 | Δ^6 | Δ^7 | Δ^8 | Δ^9 | Δ^{10} |
|-----|-----|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|
| 0 | 0 | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 0 | -1 | | | | | | | | |
| 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | | | | | | | |
| 4 | 3 | 1 | 0 | -1 | -3 | | | | | | |
| 5 | 5 | 2 | 1 | 1 | 2 | 5 | | | | | |
| 6 | 8 | 3 | 2 | 1 | 0 | -3 | -8 | | | | |
| 7 | 13 | 5 | 3 | 1 | 1 | 2 | 5 | 13 | | | |
| 8 | 21 | 8 | 5 | 2 | 0 | -1 | -3 | -8 | -21 | | |
| 9 | 34 | 13 | 8 | 1 | 1 | 2 | 5 | 13 | 34 | | |
| 10 | 55 | 21 | | 3 | 1 | 0 | -1 | -3 | -8 | -21 | -55 |

Se observă că diferențele diverg, astfel încât polinoamele de interpolare nu sînt recomandabile. Astfel, de exemplu avem

$$E^{10}f(0) = 110, \text{ dar } f(10) = 55,$$

$$E^{11}f(0) = 0, \text{ dar } f(11) = 89 \text{ ș.a.m.d.}$$

În fine, un ultim exemplu îl constituie cazul funcțiilor date pe intervale. De exemplu :

$$y = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0, \\ x & \text{pentru } x \geq 0 \end{cases}$$

conduce la tabelul cu diferențe 1.7.

Tabelul 1.7

| x | y | Δ | Δ^2 | Δ^3 | Δ^4 | Δ^5 | Δ^6 | Δ^7 | Δ^8 | Δ^9 | Δ^{10} |
|-----|-----|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|
| -5 | 0 | | | | | | | | | | |
| -4 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| -3 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | |
| -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | |
| -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | |
| | | 0 | 1 | 1 | 1 | -3 | -4 | -5 | 15 | | |
| | | 1 | 1 | -1 | -2 | 3 | 6 | 10 | -20 | -35 | 70 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 | -4 | -10 | 15 | 35 | |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 | -4 | 5 | | | |
| 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | |
| 4 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| 5 | 5 | 1 | | | | | | | | | |

Calculînd cu polinomul de interpolare, se obține

$$E^{-11}f(5) = 126$$

sau

$$E^{11}f(-5) = 132.$$

Exemplele date pun în evidență necesitatea utilizării formulelor de interpolare cu precauțiile care decurg din modul cum sînt construite aceste formule.

1.13. O interpretare în distribuții a operatorilor diferență

Notăm cu δ_i distribuția lui Dirac cu suportul în punctul $i \in \mathbb{R}$. Pentru orice distribuție $f(t)$ cu $t \in \mathbb{R}$, avem

$$\delta_i * f = f(t - i).$$

Pentru definirea operatorului de translație E avem

$$\delta_{-h} * f = f(t + h).$$

Din proprietățile produsului de convoluție rezultă

$$\delta_i * \delta_j = \delta_{i+j}.$$

Elementul neutru al produsului de convoluție este

$$\delta * f = f,$$

unde cu δ s-a notat distribuția Dirac cu suportul în zero.

Se observă că δ_i este un convolutor care are toate proprietățile unui operator de translație; prin urmare, toate formulele referitoare la E^α pot fi reconstituite pe această cale.

Deoarece

$$\Delta = E - E^0,$$

putem scrie

$$\Delta \hat{=} \delta_{-h} - \delta \quad (, \hat{=} \text{'' se citește ,,corespunde cu''}).$$

Într-adevăr,

$$(\delta_{-h} - \delta) * f = f(t + h) - f(t).$$

În mod similar pot fi reconstituite toate celelalte formule. Pentru derivare, considerăm seria Taylor sub forma

$$\delta_{-h} * f = \delta * f + \frac{h\delta^1}{1!} * f + \frac{h^2\delta^2}{2!} * f + \dots = e^{h\delta^1} * f,$$

unde f este o funcție analitică, iar δ^j este derivata de ordinul j a distribuției Dirac.

Rezultă

$$\delta_{-h} = e^{h\delta^1},$$

s-a obținut deci formula operatorului de derivare din 1.6. Observăm că

$$\delta^i * \delta^j = \delta^{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Așadar, operațiile cu operatorul D^i pot fi înlocuite prin operații cu δ^i (cu produsul de convoluție), obținându-se formulele de derivare și integrare dorite. Pentru $i < 0$ și $i \in \mathbb{Z}$ rezultă primitiva de ordinul i a lui δ ; într-adevăr, avem

$$\delta^1 * h = \delta,$$

unde h este treapta Heaviside, și deci în general

$$\delta^i * \delta^{-i} = \delta.$$

„Puterea” i a lui δ se consideră (evident) în sensul produsului de convoluție.

Ideea este extensibilă și la cazul derivatelor parțiale, deoarece distribuția lui Dirac este definită și pentru suportul în R^n .

În consecință, proprietățile operatorilor șablon pot fi deduse și pe această cale. De exemplu, pentru sumă avem

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a\delta_1 & b\delta & c\delta_{-1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'\delta_1 & b'\delta & c'\delta_{-1} \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline (a + a')\delta_1 & (b + b')\delta & (c + c')\delta_{-1} \\ \hline \end{array}$$

De asemenea, pentru produs avem (pentru o problemă plană):

$$\delta_{i,k} * \delta_{j,l} = \delta_{i+j,k+l} \quad (\text{în ordinea } \delta_{x,y}).$$

Așadar, produsul $(aE_x^1)(bE_y^{-1}) = abE_x^1E_y^{-1}$ poate fi înlocuit cu $a\delta_{-1,0} * b\delta_{0,1} = ab\delta_{-1,1}$.

De exemplu,

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \delta_{1,0} & -2\delta_{0,0} & \delta_{-1,0} \\ \hline \end{array}} * \boxed{\begin{array}{|c|} \hline \delta_{0,-1} \\ \hline -2\delta_{0,0} \\ \hline \delta_{0,1} \\ \hline \end{array}} = \\
 \\
 = \boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \delta_{1,-1} & -2\delta_{0,-1} & \delta_{-1,-1} \\ \hline -2\delta_{1,0} & 4\delta_{0,0} & -2\delta_{-1,0} \\ \hline \delta_{1,1} & -2\delta_{0,1} & \delta_{-1,1} \\ \hline \end{array}}
 \end{array}$$

Regula care rezultă este identică cu cea expusă în 1.9. Toate aceste constatări se bazează * pe proprietăți ale produsului de convoluție.

1.14. Noțiuni teoretice asupra aproximării prin discretizare

În acest paragraf notațiile Δ și E au alte semnificații decât în paragrafele anterioare.

În [7] se introduc conceptele de discretizare, consistență, convergență, stabilitate etc., pornind de la un exemplu simplu. Fie

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = Z_0, \quad t \in [0, 1],$$

cu condițiile lui Lipschitz îndeplinite, astfel încât soluția există și este unică. Avem

$$Z_0 \in R, \quad f \in C(R \rightarrow R).$$

Considerăm spațiile E și E^0 și aplicația $F: E \rightarrow E^0$, unde $y \in E$ și $Fy \in E^0$. Semnificația lui Fy este

$$Fy = \begin{pmatrix} y(0) - Z_0 \\ y'(t) - f(y(t)) \end{pmatrix} \in E^0 \text{ pentru } y \in E.$$

* Cristescu, R. *Elemente de analiza funcțională și introducere în teoria distribuțiilor*. București, Editura tehnică, 1966.

Definim o normă* în E astfel :

$$\|y\|_E := \max |y(t)|, \quad t \in [0, 1].$$

De asemenea definim o normă în E^0 :

$$E^0 = R \times C [0, 1]; \quad \left\| \begin{pmatrix} d_0 \\ d \end{pmatrix} \right\|_{E^0} := |d_0| + \max |d(t)|, \quad t \in [0, 1].$$

În modul acesta, definim o „problemă” prin tripletul

$$\mathcal{P} = \{E, E^0, F\}. \quad (1.70)$$

În continuare, prin propoziția „s-a dat problema” înțelegem că s-a dat tripletul (1.70).

Discretizarea se definește în modul următor. O metodă de discretizare \mathcal{M} , aplicabilă la o problemă dată \mathcal{P} , constă dintr-un șir infinit de cvintuple $\{E_n, E_n^0, \Delta_n, \Delta_n^0, \varphi_n\}_{n \in N}$, unde E_n și E_n^0 sînt spații Banach finit dimensionale (reamintim că un spațiu Banach este un spațiu vectorial, complet și normat), $\Delta_n: E \rightarrow E_n$ și $\Delta_n^0: E^0 \rightarrow E_n^0$ sînt aplicații liniare cu condițiile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n y\|_{E_n} = \|y\|_E \text{ pentru orice } y \in E \text{ fixat};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n^0 d\|_{E_n^0} = \|d\|_{E^0} \text{ pentru orice } d \in E^0 \text{ fixat};$$

$\varphi_n: (E \rightarrow E^0) \rightarrow (E_n \rightarrow E_n^0)$ cu F în domeniul** tuturor φ_n ;

N' este o submulțime infinită a lui N .

Cu acestea, se poate defini *discretizarea*: o discretizare D este un șir infinit de triplete $\{E_n, E_n^0, F_n\}_{n \in N'}$ unde E_n și E_n^0 sînt spații Banach finit dimensionale, iar $F_n: E_n \rightarrow E_n^0$. O *soluție* a discretizării D este un șir $\{\zeta_n\}_{n \in N'}$, $\zeta_n \in E_n$, astfel încît

$$F_n \zeta_n = 0, \quad n \in N',$$

*: = se citește „egal prin definiție”.

** Notăția $(E \rightarrow E^0)$ reprezintă mulțimea aplicațiilor $E \rightarrow E^0$.

N'' fiind de asemenea o submulțime infinită a lui N . Discretizarea $D = \{\bar{E}_n, \bar{E}_n^0, \bar{F}_n\}_{n \in N''}$ este denumită discretizarea problemei originale $\mathcal{P} = \{E, E^0, F\}$, generată de metoda de discretizare $\mathcal{M} = \{E_n, E_n^0, \Delta_n, \Delta_n^0, \varphi_n\}_{n \in N'}$ dacă \mathcal{M} este aplicabilă lui \mathcal{P} și dacă

$$N'' \subset N',$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_n &= E_n; & \bar{E}_n^0 &= E_n^0 \\ \bar{F}_n &= \varphi_n(F) \end{aligned} \right\} \text{ pentru orice } n \in N''$$

În acest caz D poate fi notat $\mathcal{M}(\mathcal{P})$.

Fără a pierde din generalitate, în cele ce urmează vom presupune că $N'' = N'$ și că șirurile $\{E_n\}$ și $\{E_n^0\}$ ale lui m , respectiv ale lui $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ sînt identice; de asemenea vom presupune $\dim E_n = \dim E_n^0$, pentru ca ζ_n să fie unic.

Vom exemplifica discretizarea prin metoda lui Euler, aplicată ecuației diferențiale date. Punem $n \in N' = N$ și formăm mulțimea

$$G_n := \left\{ \frac{v}{n} \right\}, \quad v = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Considerăm acum

$$E_n = (G_n \rightarrow R) \text{ cu norma } \|\eta\|_{E_n} := \max \left| \eta \left(\frac{v}{n} \right) \right|,$$

$$v = 0, 1, 2, \dots, n,$$

și de asemenea $E_n^0 = (G_n \rightarrow R)$ cu norma

$$\|\delta\|_{E_n^0} := |\delta(0)| + \max \left| \delta \left(\frac{v}{n} \right) \right|, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Conform cu definiția dată discretizării, trebuie definite acum Δ_n și Δ_n^0 . Considerăm

$$(\Delta_n y) \left(\frac{\nu}{n} \right) = y \left(\frac{\nu}{n} \right) \quad \text{pentru } y \in E,$$

$$(\Delta_n^0 d) \left(\frac{\nu}{n} \right) = \begin{cases} d_0, & \nu = 0, \\ d \left(\frac{\nu-1}{n} \right); & \nu = 1, \dots, n, \end{cases} \text{ pentru } d = \begin{pmatrix} d_0 \\ d(t) \end{pmatrix} \in E^0.$$

În fine, pentru φ_n considerăm

$$[\varphi_n(F)\eta] \left(\frac{\nu}{n} \right) = \begin{cases} \eta(0) - z_0, & \nu = 0, \\ \frac{\eta \left(\frac{\nu}{n} \right) - \eta \left(\frac{\nu-1}{n} \right)}{1/n} - f \left(\eta \left(\frac{\nu-1}{n} \right) \right); & \nu = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Reamintim că pentru această problemă metoda lui Euler constă în alegerea unui pas, pe intervalul dat, $t \in [0, 1]$, astfel încît ecuația diferențială conduce la formula recursivă dată mai sus. Se observă că pentru $n \rightarrow \infty$ (adică pentru un pas tinzînd la zero) se obține ecuația diferențială dată.

Unicitatea soluției discretizării rezultă direct din faptul că ζ_n se determină prin recursivitate.

După cum se observă, spațiile E_n și E_n^0 sînt spații de funcții care aplică mulțimi discrete și finite (rețelele) în E^s . Aplicațiile Δ_n și Δ_n^0 discretizează funcțiile continue din E și E^0 în funcții discrete (se spune și funcții-rețele). Aplicațiile $F_n = \varphi_n(F)$ sînt definite prin operatorii diferență stabiliți pentru rețelele respective.

Observăm de asemenea că existența și unicitatea soluției Z a problemei originale date nu implică neapărat existența și unicitatea soluției discrete ζ_n ; într-adevăr, aceasta din urmă depinde de metoda de discretizare aleasă.

Relațiile între spațiile și aplicațiile intervenite în discuție pînă acum sînt puse mai clar în evidență prin următoarea diagramă :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\quad} & E^0 \\
 \Delta_n \downarrow & & \downarrow \Delta_n^0 \\
 & F & \\
 & \downarrow \varphi_n & \\
 E_n & & E_n \\
 & \xrightarrow{\quad} &
 \end{array}$$

Pe baza ideilor introduse, se poate defini acum consistența unei metode de discretizare.

O metodă de discretizare $\mathcal{M} = \{E_n, E_n^0, \Delta_n, \Delta_n^0, \varphi_n\}_{n \in N'}$ aplicabilă problemei $\mathcal{P} = \{E, E^0, F\}$ este denumită *consistentă* cu \mathcal{P} , pentru $y \in E$, dacă y aparține domeniului lui F și al lui $\varphi_n(F)\Delta_n$, $n \in N'$, și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n(F)\Delta_n y - \Delta_n^0 F y\|_{E_n^0} = 0.$$

Dacă \mathcal{M} este consistentă cu \mathcal{P} , pentru orice $y \in E$, atunci se spune că \mathcal{M} este consistentă cu \mathcal{P} ; aceeași exprimare se folosește și pentru consistența discretizării $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ cu \mathcal{P} .

\mathcal{M} și $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ sînt consistente cu \mathcal{P} de ordinul p , pentru y , dacă

$$\|\varphi_n(F)\Delta_n y - \Delta_n^0 F y\|_{E_n^0} = o(n^{-p}) \text{ cînd } n \rightarrow \infty.$$

Aceste concepte pot fi ilustrate printr-o diagramă; consistența pentru y necesită ca următoarea diagramă să fie asimptotic comutativă (adică pentru orice n și pentru $n \rightarrow \infty$):

$$\begin{array}{ccc}
 & F & \\
 E & \xrightarrow{\quad} & E^0 \\
 \Delta_n \downarrow & & \downarrow \Delta_n^0 \\
 E_n & \xrightarrow{\quad} & E_n^0 \\
 & \varphi_n(F) &
 \end{array}$$

Observăm că un element $(\varphi_n(F)\Delta_n - \Delta_n^0 F)y$ aparține unui spațiu diferit E_n^0 pentru fiecare n .

Aplicarea acestor idei la exemplul dat inițial conduce la următoarele :

$$\begin{aligned} & [\varphi_n(F)\Delta_n y - \Delta_n^0 Fy] \left(\frac{\nu}{n} \right) = \\ & = \begin{cases} [y(0) - z_0] - [y(0) - z_0], & \nu = 0; \\ \frac{y\left(\frac{\nu}{n}\right) - y\left(\frac{\nu-1}{n}\right)}{1/n} - f\left(y\left(\frac{\nu-1}{n}\right)\right) - \\ - \left[y'\left(\frac{\nu-1}{n}\right) - f\left(y\left(\frac{\nu-1}{n}\right)\right) \right] \end{cases} \\ & \text{pentru } \nu = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Efectuînd calculele, rezultă deci

$$\begin{aligned} & [\varphi_n(F)\Delta_n y - \Delta_n^0 Fy] \left(\frac{\nu}{n} \right) = \\ & = \begin{cases} 0, & \nu = 0; \\ y'(\tilde{t}_\nu) - y'\left(\frac{\nu-1}{n}\right); & \nu = 1, \dots, n; \quad \tilde{t}_\nu \in \left(\frac{\nu-1}{n}, \frac{\nu}{n} \right). \end{cases} \end{aligned}$$

Consistența rezultă acum din faptul că

$$\max_{\nu=1, \dots, n} \left| y'(\tilde{t}_\nu) - y'\left(\frac{\nu-1}{n}\right) \right| \rightarrow 0 \text{ cînd } n \rightarrow \infty,$$

pentru orice $y \in C^1$. Metoda Euler este deci consistentă cu problema dată, iar metoda de discretizare este consistentă de ordinul întâi (deoarece $n^{-1} \rightarrow 0$ cînd $n \rightarrow \infty$, deci $p = 1$).

Pentru a avea o imagine clară asupra noțiunii de aproximare, se definește eroarea locală de discretizare în modul următor: fie metoda de discretizare $\mathcal{M} = \{E_n, E_n^0, \Delta_n, \Delta_n^0, \varphi_n\}_{n \in N'}$, consistentă cu \mathcal{P} și cu soluția exactă z . Șirul $\{l_n\}_{n \in N'}$, $l_n \in E_n^0$, cu

$$l_n := \varphi_n(F)\Delta_n z, \quad n \in N',$$

se numește *eroarea locală de discretizare* a lui \mathcal{M} și $\mathcal{M}(\mathcal{P})$, pentru \mathcal{P} . Observăm că dacă \mathcal{M} este consistentă de ordinul

p cu \mathcal{P} , atunci eroarea locală de discretizare este $o(n^{-2})$ cînd $n \rightarrow \infty$. Din definiția dată consistenței, rezultă că nu se poate multiplica φ_n cu diverse puteri ale lui n , ceea ce ar conduce la o comportare asimptotică (pentru $n \rightarrow \infty$) fără sens.

Să calculăm eroarea locală de discretizare pentru exemplul dat. Avem $z(0) = z_0$ și $z'(t) = f(z(t))$, deci

$$l_n\left(\frac{v}{n}\right) = \left[\frac{z\left(\frac{v}{n}\right) - z\left(\frac{v-1}{n}\right)}{1/n} - f\left(z\left(\frac{v-1}{n}\right)\right) \right] =$$

$$= \begin{cases} 0, & v = 0, \\ \frac{1}{2n} z''(\tilde{t}_v), & v = 1, \dots, n, \end{cases}$$

cu $\tilde{t}_v \in \left(\frac{v-1}{n}, \frac{v}{n}\right)$ și $z \in C^2 [0, 1]$. Iată deci că se con-

firmă faptul știut, că eroarea locală de discretizare este determinată de derivata a doua a soluției, la metoda Euler (fără predicție și corecție).

Pentru definirea convergenței, ideea de aproximație se bazează pe compararea soluției exacte z cu ζ_n , dar numai în punctele rețelei (nu se specifică nimic asupra a ceea ce s-ar putea compara între punctele rețelei, deoarece această comparație este o problemă de interpolare).

Fie metoda de discretizare $\mathcal{M} = \{E_n, E_n^0, \Delta_n, \Delta_n^0, \varphi_n\}_{n \in N'}$ aplicabilă problemei \mathcal{P} cu soluția exactă z ; presupunem că discretizarea $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ posedă ca soluție unică șirul $\{\zeta_n\}_{n \in N'}$. Șirul $\{\varepsilon_n\}_{n \in N'}$ cu

$$\varepsilon_n = \zeta_n - z_n, \quad \varepsilon_n \in E_n, \quad n \in N',$$

se numește *eroarea globală* de discretizare a lui \mathcal{M} și a lui $\mathcal{M}(\mathcal{P})$. Atunci \mathcal{M} și $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ sînt denumite *convergente*, dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varepsilon_n\|_{E_n} = 0.$$

Dacă $\|\varepsilon_n\|_{E_n} = o(n^{-p})$ cînd $n \rightarrow \infty$, atunci \mathcal{M} și $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ sînt denumite *convergente de ordinul p*. Aceste concepte sînt reprezentate în diagrama următoare, în ipoteza că F^{-1} și F_n^{-1} (ca aplicații inverse) există :

$$\begin{array}{ccc}
 & & F^{-1} \\
 & E \longleftarrow & E^0 \\
 \Delta_n \downarrow & & \downarrow \Delta_n^0 \\
 & E_n \longleftarrow & E_n^0 \\
 & & F_n^{-1}
 \end{array}$$

Convergența înseamnă comutativitatea asimptotică a acestei diagrame. Comparînd această diagramă cu diagrama consistenței, rezultă următoarea echivalență : convergența lui $\{E_n, E_n^0, F_n\}_{n \in \mathbb{N}'}$ pentru $\{E, E^0, F\}$ este echivalentă cu consistența în zero a lui $\{E_n^0, E_n, F_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}'}$ pentru $\{E^0, E, F^{-1}\}$.

Ca exemplu, să reluăm metoda lui Euler aplicată la problema dată. Presupunem $f(y) = gy$, unde $g = \text{const.}$

Atunci soluția exactă în punctele rețelei este $z\left(\frac{\nu}{n}\right) = z_0 \exp\left(g \frac{\nu}{n}\right)$, iar soluția obținută prin discretizare

este $\zeta_n\left(\frac{\nu}{n}\right) = z_0\left(1 + \frac{g}{n}\right)^\nu$. Așadar :

$$\varepsilon_n\left(\frac{\nu}{n}\right) = z_0\left[\left(1 + \frac{g}{n}\right)^\nu - \exp\left(g \frac{\nu}{n}\right)\right], \quad \nu = 0, 1, \dots, n,$$

$$\begin{aligned}
 \|\varepsilon_n\|_{E_n} &= |\varepsilon_n(1)| = |z_0| \left| \left(1 + \frac{g}{n}\right)^n - e^g \right| = \\
 &= \frac{g^2}{2n} |z_0| e^g + o(n^{-1}) \quad \text{pentru } n \rightarrow \infty \text{ și } g > 0.
 \end{aligned}$$

Deci metoda lui Euler este convergentă de ordinul întii (deoarece primul termen tinde la zero).

Noțiunea de stabilitate apare în mod natural, deoarece o metodă de discretizare, care este consistentă pentru o problemă dată, nu este în mod implicit și convergentă.

Esența ideii de stabilitate este de fapt insensibilitatea la perturbații, în sensul ca efectul unei perturbații să poată fi limitat independent de n . Din cele de mai sus avem

$$- \varepsilon_n = \Delta_n z - \zeta_n = F_n^{-1} F_n \Delta_n z - F_n^{-1} 0 = F_n^{-1} l_n - F_n^{-1} 0.$$

Anularea lui l_n cînd $n \rightarrow \infty$ implică anularea lui ε_n numai dacă F_n^{-1} satisface condițiile lui Lipschitz uniform în n (deci consistența pentru z nu este suficientă pentru convergență).

Să considerăm o discretizare $D = \{E_n, E_n^0, F_n\}_{n \in N'}$ și un șir $\eta = \{\eta_n\}_{n \in N'}$, $\eta \in E_n$. Discretizarea D este denumită stabilă pentru η dacă există constantele S și $r > 0$, astfel încît, uniform pentru orice $n \in N'$,

$$\|\eta_n^{(1)} - \eta_n^{(2)}\|_{E_n} \leq S \|F_n \eta_n^{(1)} - F_n \eta_n^{(2)}\|_{E_n^0}$$

pentru toți η_n , ($i = 1, 2$), astfel încît

$$\|F_n \eta_n^{(i)} - F_n \eta_n\|_{E_n^0} < r.$$

S se numește *limita de stabilitate*, iar r *prag de stabilitate*. Să considerăm acum o metodă de discretizare \mathcal{M} , aplicabilă la o problemă \mathcal{P} cu soluția exactă z ; dacă discretizarea $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ este stabilă pentru $\{\Delta_n z\}$, atunci \mathcal{M} și $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ sînt ambele stabile pentru \mathcal{P} . Pentru o discretizare $\{E_n, E_n^0, F_n\}_{n \in N'}$, care este stabilă pentru $\{\eta_n\}$, se poate proceda în modul următor: presupunem dat un element $\tilde{\eta}_n \in E_n$; dacă se știe că $\|F_n \tilde{\zeta}_n - F_n \zeta_n\| < \delta < r$, atunci rezultă $\|\tilde{\eta}_n - \eta_n\| \leq S\delta$, valabilă pentru n oricît de mare.

În exemplul dat pînă acum, să presupunem că f admite o constantă Lipschitz L , astfel încît:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \text{ pentru orice } x_i \in R.$$

Alegem $\eta_n^{(1)}, \eta_n^{(2)} \in E_n$ și punem $\delta_n := F_n \eta_n^{(1)} - F_n \eta_n^{(2)}$. Atunci $\varepsilon_n := \eta_n^{(1)} - \eta_n^{(2)}$ satisface condiția $\varepsilon_n(0) = \delta_n(0)$

și avem

$$\varepsilon_n\left(\frac{\nu}{n}\right) = \varepsilon_n\left(\frac{\nu-1}{n}\right) + \frac{1}{n} \left[f\left(\gamma_n^{(1)}\left(\frac{\nu-1}{n}\right) - f\left(\gamma_n^{(2)}\left(\frac{\nu-1}{n}\right)\right) \right] + \frac{1}{n} \delta_n\left(\frac{\nu}{n}\right), \quad \nu = 1, \dots, n.$$

De aici rezultă

$$\left| \varepsilon_n\left(\frac{\nu}{n}\right) \right| \leq \left| \varepsilon_n\left(\frac{\nu-1}{n}\right) \right| \left(1 + \frac{L}{n}\right) + \frac{1}{n} \left| \delta_n\left(\frac{\nu}{n}\right) \right|, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

ceea ce implică

$$\begin{aligned} \|\gamma_n^{(1)} - \gamma_n^{(2)}\|_{E_n} &= \max_{\nu=0, 1, \dots, n} \left| \varepsilon_n\left(\frac{\nu}{n}\right) \right| \leq |\delta_n(0)| \left(1 + \frac{L}{n}\right)^n + \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \left| \delta_n\left(\frac{\nu}{n}\right) \right| \left(1 + \frac{L}{n}\right)^{n-\nu} < e^L \left[|\delta_n(0)| + \right. \\ &\left. + \max_{\nu=1, \dots, n} \left| \delta_n\left(\frac{\nu}{n}\right) \right| \right] = e^L \|\delta_n\|_{E_n^0}. \end{aligned}$$

Deci discretizarea din acest exemplu este stabilă pentru orice șir $\{\gamma_n\}$, cu limita de stabilitate $S = e^L$ și cu $r = \infty$.

Conceptele expuse pînă acum fac posibilă rezolvarea unor importante probleme ca: existența și unicitatea soluției discretizării, liniarizare, interpolare, analiza erorilor, estimarea erorilor etc.; pentru aprofundare, a se vedea [1].

În legătură cu analiza erorilor, reținem unele idei mai importante, după cum urmează; pînă acum s-a considerat că șirul soluției $\{\zeta_n\}$ a unei discretizări poate fi obținut exact. În realitate se recurge la un calculator numeric, astfel încît rezultatul va fi afectat de erori de trunchiere și rotunjire (după cum am arătat anterior, lungimea finită a registrului impune calculul cu numere raționale). Pe de altă parte, operațiile nearitmetice sînt efectuate prin aproximare cu o secvență finită de operații aritmetice, prin alegerea unui algoritm. Dacă s-a ales un algoritm

pentru determinarea soluției ζ_n a unei discretizări $D = \{E_n, E_n^0, F_n\}_{n \in N'}$, atunci elementul $\zeta_n \in E_n$, care este rezultatul efectuării algoritmului pe un calculator numeric, se numește *soluția de calcul* a lui D . Elementul $\rho_n := F_n \zeta_n \in E_n^0$ se numește *eroare locală de calcul* a soluției de calcul ζ_n a lui D . Deci ρ_n este restul care apare cînd F_n se aplică lui ζ_n în loc de ζ_n , deoarece F_n este aplicația exactă și nu efectuarea ei pe calculator.

Elementul $r_n := \zeta_n - \zeta_n \in E_n$ este denumit *eroarea globală de calcul* a soluției de calcul ζ_n a lui D .

Analiza erorilor se face în două moduri distincte. De exemplu, dacă se urmăresc efectele fiecărei cauze de eroare, pînă cînd se ajunge la o estimare a devierii soluției aproximative ζ , obținută pe calculator, față de x , definită prin problema originală, atunci aceasta este analiza directă a erorii. Eroarea poate fi analizată și indirect, considerînd erorile locale ca perturbații ale datelor problemei originale. Valoarea aproximativă ζ a lui x apare acum ca soluție exactă a unei probleme cu alte date; diferența dintre date, notată cu \hat{d} , poate fi utilizată ca o estimare a erorii, dar determinarea lui \hat{d} nu reprezintă, în general, o analiză indirectă, completă a acesteia.

Dacă se găsesc elementele $\hat{\rho}_n$ și \hat{l}_n în E_n^0 astfel încît

$$\rho_n \approx \hat{\rho}_n, \quad l_n \approx \hat{l}_n$$

și dacă se determină $\hat{\varepsilon}_n \in E_n$ din

$$F'_n(\hat{\zeta}_n) \hat{\varepsilon}_n = \hat{\rho}_n - \hat{l}_n,$$

atunci estimația erorii totale, prin analiza directă, este

$$r_n - \Delta_n z \approx \varepsilon_n.$$

De obicei, relațiile între ρ și l se scriu astfel :

$$\rho_n = \hat{\rho}_n(1 - o(n^{-1})),$$

$$l_n = \hat{l}_n(1 + o(n^{-1})).$$

Pentru analiza indirectă, se alege un $\hat{d} \in E^0$, astfel încît

$$\|\Delta_n^0 \hat{d}\| \geq \|\rho_n\| + \|l_n\|$$

și se determină $\tilde{z} \in E$ prin

$$F\tilde{z} = d.$$

Estimația se poate obține în forma

$$\|\tilde{z} - z\|_E \geq s \|d\|_{E^0}, \quad s = \text{const},$$

și împreună cu

$$\|\Delta_n^0 d\|_{E_n^0} \leq \|d\|_{E^0}$$

se obține

$$\|\hat{\zeta}_n - \Delta_n z\|_{E_n} \leq \frac{S}{s} \|\tilde{z} - z\|_E.$$

De obicei, analiza erorii nu este posibilă decât prin obținerea unor informații suplimentare prin urmărirea procesului de calcul al lui $\hat{\zeta}_n$.

Prezintă utilitate practică și analiza statistică a erorilor, ceea ce este posibil, deoarece erorile de calcul la efectuarea unui algoritm depind de datele inițiale și de succesiunea operațiilor într-un mod extrem de complicat. De aceea erorile de rotunjire pot fi considerate variabile aleatoare, unele fiind în mod firesc considerate variabile aleatoare independente.

Fie E_n^0 un spațiu Banach finit dimensional, izomorf cu R^N , astfel încât orice element din E_n^0 este un vector cu N componente. Atunci eroarea locală de calcul $\rho_n = F_n \tilde{\zeta}_n \in E_n^0$ a unei soluții de calcul $\tilde{\zeta}_n$ a unei discretizări este o variabilă aleatoare, dacă toate cele N componente sînt variabile aleatoare (cu valori reale). Valoarea medie este în acest caz un N -vector, ale cărui componente sînt medii; o notăm prin $\mu(\rho_n)$. În mod corespunzător $\sigma^2(\rho_n)$ este o matrice de ordinul N , adică matricea covarianței componentelor lui ρ_n .

Presupunem că există posibilitatea determinării aproximative ale lui $\mu(\rho_n)$ și $\sigma^2(\rho_n)$.

Anterior s-a definit eroarea globală de calcul $r_n \in E_n$; admitînd că r_n este suficient de mic, el poate fi reprezentat ca o transformare liniară a lui ρ_n :

$$r_n = F'_n(\zeta_n)^{-1} \rho_n \approx F'_n(\Delta_n z)^{-1} \rho_n.$$

Dat fiind că transformării liniare îi corespunde o matrice, introducem matricea Γ_n ca reprezentare a aplicației liniare $F'_n(\Delta_n z)^{-1}$. Considerînd r_n ca variabilă aleatoare, avem

$$\mu(r_n) = \Gamma_n \mu(\rho_n), \quad \sigma^2(r_n) = \Gamma_n \sigma^2(\rho_n) \Gamma_n^T.$$

Cînd $n \rightarrow \infty$, transformarea liniară $r_n = \Gamma_n \rho_n$ satisface legea numerelor mari; dacă r_n este un vector aleator care se aproximează bine printr-o repartiție normală, atunci cunoscînd $\mu(r_n)$ și $\sigma^2(r_n)$ pot fi determinate intervale în care componentele lui r_n există cu o anumită probabilitate. Aceste intervale sînt estimările statistice ale erorii globale r_n . De obicei, aceste estimări sînt mai favorabile decît cele obținute prin metodele anterior expuse. De exemplu, cu algoritmi obișnuiți pentru ecuații diferențiale ordinare de ordinul întii, estimările nestatistice dau $\|r_n\| = o(n)$, iar estimările statistice dau $o(n^{1/2})$ pentru intervale în care componentele lui r_n au o probabilitate de 0,99.

În practică, analiza erorilor este utilă numai asociată cu criteriile de optim ale calculului cu mașina, minimizarea efortului de calcul și maximizarea preciziei rezultatului. Problema se complică și prin aceea că analiza erorilor necesită calcule, care trebuie și ele luate în considerare la evaluarea efortului total de calcul. Din aceste motive, la calculul cu mașina este necesar a fi luate în considerație următoarele:

— pentru fiecare clasă de probleme se stabilesc metodele de discretizare cele mai potrivite. Aceasta necesită experimente la scară mare, pentru stabilirea eficienței fiecărei metode de discretizare, pentru fiecare clasă de ecuații diferențiale;

— pentru fiecare clasă de probleme se stabilesc anumiți parametri cu care se controlează și se verifică volumul de calcul și precizia rezultatelor, se alege pasul etc.;

— prin program se asigură informații suplimentare asupra mersului calculului, astfel încît criteriile de optim să poată fi urmărite pe parcurs. Aceasta nu asigură realizarea variantei optime, dar poate conduce la procese de calcul aproape optimale.

1.15. Metode statistice utilizate la rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale

Una din metodele statistice, frecvent întâlnite în studiul calculului numeric al soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale este metoda Monte Carlo. Această metodă se poate utiliza pentru obținerea soluției $U(M)$ într-un singur punct M , fără a fi necesară determinarea soluției în alte puncte. În problemele practice, când se cere soluția într-unul sau în câteva puncte, metoda Monte Carlo poate fi foarte avantajoasă.

Un exemplu de aplicație este cazul determinării temperaturii, în regim staționar, în puncte suspectate de încălzire excesivă.

Pentru acest paragraf, referințele bibliografice reprezentative sînt [2, 3, 4, 5].

Pentru o expunere cu caracter general a metodei, să observăm că prin discretizare se trece de la ecuația diferențială dată la o ecuație algebrică de forma

$$Ax = c,$$

unde A este o matrice diagonală de ordinul N , nesingulară. Metoda Monte Carlo permite inversarea matricii A , sau determinarea unui singur element, sau a unui vector al matricii A^{-1} . Notăm

$$D = I - A,$$

unde I este matricea unitate. Se aleg cantitățile p_{ij} și v_{ij} astfel încît elementele lui D să fie

$$d_{ij} = p_{ij}v_{ij},$$

cu restricțiile $p_{ij} \geq 0$ și $\sum_{j=1}^N p_{ij} < 1$.

Se definește de asemenea o matrice B cu elementele

$$b_{ij} = p_{ij}v_{ij}^2.$$

Pentru ca metoda să fie aplicabilă este necesar ca

$$\max_i |\lambda_i(D^*)| < 1,$$

unde D^* este matricea ale cărei elemente sînt $|d_{ij}|$, iar $\lambda_i(D^*)$ este valoarea proprie i a matricei D^* .

Pentru ca estimarea elementelor lui A^{-1} să aibă o dispersie finită, este necesar ca

$$\max_i |\lambda_i(B)| < 1.$$

Vom da acum o descriere mai detaliată a metodei : drumul aleator începe într-un punct i și parcurge punct cu punct un domeniu de N puncte. Mișcarea la fiecare pas are probabilitatea p_{ij} , iar la terminarea drumului în punctul k are probabilitatea $p_k = 1 - \sum_{j=1}^N p_{kj}$. Drumul se termină după n pași. Se calculează

$$G_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } j \neq k, \\ \frac{v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{n-1}j}}{p_j}, & \text{dacă } j = k, \end{cases}$$

unde $i, i_1, \dots, i_{n-1}, j$ este drumul parcurs de la i la j . Dar

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (I - D)^{-1} = I + D + D^2 + \dots + D^n + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} D^n. \end{aligned}$$

Prin urmare :

$$(A^{-1})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} (D^k)_{ij}.$$

Acum trebuie arătat că media lui G_{ij} este $(A^{-1})_{ij}$; pentru aceasta, să scriem probabilitatea de a urma un traseu ρ care să se oprească în punctul j :

$$P_\rho p_j = p_{ii}, p_{ii_2}, \dots, p_{i_{n-1}j}, p_j.$$

Se calculează acum media

$$E(G_{ij}) = \sum_{\rho} (P_\rho p_j) (V_\rho p_j^{-1}) = \sum_{\rho} P_\rho V_\rho,$$

unde $V = v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{n-1}j}$. Suma \sum_p se efectuează pentru toate drumurile de la i la j . Deoarece $p_{ij}v_{ij} = d_{ij}$, avem

$$\begin{aligned} E(G_{ij}) &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_{n-1}=1}^m d_{i_1} \cdot d_{i_2} \dots d_{i_{n-1}j} = \\ &= I_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} (D^n)_{ij} = (A^{-1})_{ij}. \end{aligned}$$

Termenii δ_{ij} apar atunci cînd drumul se termină imediat.

În metoda Monte Carlo, erorile de trunchiere și rotunjire au un efect redus asupra preciziei; de aceea estimarea erorilor se face calculînd dispersia lui G_{ij} . Avem

$$\sigma_{ij}^2 = (I - B)_{ij}^{-1} p_j - (A^{-1})_{ij}^2.$$

Dispersia depinde de alegerea lui p_{ij} și v_{ij} . Dacă toate elementele $d_{ij} \geq 0$, atunci se poate alege $v_{ij} = 1$, iar dispersia corespunzătoare este dispersia repartiției binomiale.

De asemenea, se poate lua $p_{ij} = p < \frac{1}{N} = \text{const.}$

Să considerăm matricea

$$H = (I - B)^{-1} = \left[I - \frac{1}{p} W \right]^{-1},$$

unde W este matricea ale cărei elemente sînt d_{ij}^2 . Avem

$$b_{ij} = p_{ij}v_{ij}^2 = d_{ij}v_{ij} = \frac{d_{ij}^2}{p_{ij}}.$$

Condiția $\max_i |\lambda_i(B)| < 1$ implică

$$\max_i \left| \lambda_i \left(\frac{W}{p} \right) \right| = \frac{1}{p} \max_i |\lambda_i(W)| < 1$$

sau

$$\max_i |\lambda_i(W)| < p.$$

Prin urmare, pentru a asigura o dispersie finită, este necesar (dacă este posibil) să avem

$$\max_i |\lambda_i(W)| < p < \frac{1}{N}.$$

Procedeul de calcul poate fi rezumat în modul următor :

1. Se aleg p_{ij} și v_{ij} , numărul de trasee efectuate înainte de a calcula varianța, linia i ale cărei elemente trebuie calculate, și limita maximă admisă pentru varianță.

2. Se calculează p_i^{-1} .

3. Se alege un număr aleator ξ cuprins între 0 și 1.

4. Pentru a satisface condițiile definite anterior, se alege cel mai mic k pentru care probabilitatea $\sum_{r=1}^k p_{jr}$ (mergînd de la j la k) este mai mare decît ξ . Se calculează termenul pentru drumul de la j la k , iar dacă $\sum_{r=1}^N p_{jr} \leq \xi$, drumul se oprește.

5. Se repetă 3 și 4 pînă cînd apare un „stop”.

6. Cînd apare un stop, se calculează termenul aceluia drum.

7. Se repetă punctele de la 3 la 6 pînă cînd se realizează numărul de drumuri ales la punctul 1.

8. Se calculează dispersia pentru fiecare element al liniei i .

9. Dacă dispersia este suficient de mică, rezultatul se tipărește; dacă nu, se repetă punctele de la 3 pînă la 8.

De obicei, după un număr relativ mic de drumuri, apare un rezultat aproximativ, dar cu o precizie redusă; pentru a mări precizia este însă posibil a fi necesar un număr considerabil de drumuri aleatoare.

Exemplificarea utilizării metodei Monte Carlo se va face pornind de la ecuația Poisson

$$\nabla^2 U(r) = F(r), \quad (1.71)$$

unde r este vectorul de poziție iar funcția F se dă în interiorul unui contur închis Γ (în plan) sau în interiorul unei suprafețe închise Σ (în spațiu).

Se pune problema Dirichlet, adică se dă U pe contur, și se caută soluția în interiorul domeniului.

Pentru rezolvarea acestei probleme cu metoda Monte Carlo sînt necesare următoarele etape (se ia ca exemplu cazul plan, extinderile fiind, în general, fără dificultăți):

1. Se trasează o rețea rectangulară, în tot domeniul Γ . Curba Γ este reprezentată prin puncte, situate în nodurile rețelei, alegîndu-se nodurile cele mai apropiate de conturul dat. Eventualele corecții pot fi introduse prin procedee de interpolare.

2. De la ecuația dată se trece la o ecuație cu diferențe, care exprimă o relație între valorile lui U în puncte adiacente ale rețelei. Coeficienții din ecuația cu diferențe sînt interpretați ca probabilități de trecere de la un nod al rețelei la nodurile adiacente.

3. Pentru determinarea soluției într-un nod M din interiorul lui Γ , se construiește o mulțime de drumuri aleatoare, toate pornind din nodul M și ajungînd pe conturul Γ după un număr finit de pași. Drumul de la un nod adiacent se alege prin generarea unui proces aleator, în care probabilitățile de trecere sînt deduse din ecuația cu diferențe. Pentru fiecare drum în parte se efectuează un calcul, din care rezultă o estimăție pentru $U(M)$.

În acest calcul se ia în considerare probabilitățile de trecere, valorile lui $F(x_1, x_2)$ în nodurile întîlnite și valoarea lui U din punctul final al drumului, care se află pe conturul Γ .

Pentru o tratare mai generală, vom considera o problemă în plan, descrisă prin ecuația cu derivate parțiale

$$(b_{11}D_{x_1}^2 + 2b_{12}D_{x_1x_2}^2 + b_{22}D_{x_2}^2 + 2a_1D_{x_1} + 2a_2D_{x_2}) U = \\ = F(x_1, x_2). \quad (1.72)$$

Alegînd același pas h și pe direcția lui x_1 (reprezentată orizontal) și pe direcția lui x_2 (reprezentată vertical), se aproximează derivatele prin diferențe, după cum urmează:

$$D_{x_1} = \frac{1}{h} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

unde sensul pe direcția lui x_1 este luat de la stînga la dreapta;

$$D_{x_2} = \frac{1}{h} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

unde sensul pe direcția lui x_2 este luat de jos în sus.

Efectuînd produsul acestor doi operatori, se obține

$$D_{x_1 x_2}^2 = \frac{1}{h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Pentru derivatele de ordinul doi în x_1 și x_2 luăm

$$D_{x_1}^2 = \frac{1}{h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

și

$$D_{x_2}^2 = \frac{1}{h^2} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Introducînd aceste formule în (1.72) și efectuînd calculele, se obține

$$U(M) = \sum_{i=1}^5 p_i(M) U(M_i) - h^2 \frac{F(M)}{A(M)}, \quad (1.73)$$

unde nodurile au fost numerotate în modul următor:

| | | |
|---|---|---|
| | 2 | 5 |
| 3 | M | 1 |
| | 4 | |

În formula (1.73), $p_i(M)$ sînt coeficienții termenilor din ecuația cu diferențe; corespunzător numerotării introduse:

$$p_1(M) = \frac{1}{A} (b_{11} - 2b_{12} + 2ha_1),$$

$$p_2(M) = \frac{1}{A} (b_{22} - 2b_{12} + 2ha_2),$$

$$p_3(M) = \frac{1}{A} b_{11},$$

$$p_4(M) = \frac{1}{A} b_{22},$$

$$p_5(M) = \frac{2}{A} b_{12},$$

ei sînt interpretați ca probabilități de trecere din punctul M în unul din punctele $1, \dots, 5$. Coeficientul notat cu A are expresia

$$A(M) = 2b_{11} + 2b_{22} - 2b_{12} + 2h(a_1 + a_2).$$

Pentru ca p_i să poată fi interpretați drept probabilități, este necesar ca p_i să fie pozitivi și ca suma lor să fie egală cu unitatea. Rezultă următoarele condiții suficiente:

$$b_{12} = 0,$$

$$b_{11}b_{22} > 0 \quad (\text{ecuația eliptică}),$$

$$\sum_{i=1}^5 p_i(M) = 1.$$

Problema convergenței se pune în modul uzual: cînd pasul h tinde către zero, soluția ecuației cu diferențe tinde către soluția ecuației diferențiale; o demonstrație se găsește în [4], iar fundamentele teoretice sînt expuse în 1.14.

Cu condițiile de mai sus satisfăcute, procedeul de calcul este următorul: se pornește din punctul M , pe un drum aleator (este necesară deci o subrutină de generare de numere aleatoare). Se acceptă ipoteza că orice drum se termină la un moment dat pe contur, unde U este cu-

noscute. După un număr suficient de mare de drumuri, se calculează media rezultatelor obținute la fiecare drum, estimându-se astfel soluția în punctul M . Eroarea de estimare se determină cu ajutorul dispersiei, considerând o repartiție normală.

Mai detaliat, procedeul constă în următoarele: dacă ne aflăm la un moment dat într-un punct M , probabilitățile de trecere în M_1, M_2, M_3, M_4 sau M_5 (cu numerotarea indicată în operatorul șablon) sînt respectiv $p_1(M), p_2(M), p_3(M), p_4(M)$ și $p_5(M)$.

Cînd traseul întîlnește un punct de pe conturul Γ , drumul se termină.

Pentru drumul numerotat cu i , suma după j se efectuează pentru toate opririle, incluzînd punctul inițial M_0 , dar fără a considera punctul de pe frontieră. Soluția $U(M_0)$ este media variabilei aleatoare, notate cu Z_i , după multe drumuri parcurse; avem

$$Z_i = - \sum_j \frac{h^2 F(M_j)}{A(M_j)} + \Phi(Q_i),$$

unde cu Q_i s-a notat un punct de pe conturul Γ , iar $\Phi(Q_i)$ este condiția dată pe frontieră. Demonstrația acestui rezultat este dată în [2].

Se poate obține o precizie mai bună, pentru un număr dat de drumuri aleatoare, dacă se utilizează un procedeu de estimare statistică, descris în continuare. Se presupune că o particulă pleacă din punctul M cu probabilitățile de trecere în punctele adiacente $p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*$ și p_5^* . Aceste probabilități sînt toate nenule, iar suma lor este egală cu unitatea. Ecuația cu diferențe (1.73) se pune sub forma

$$U(M) = \sum_{i=1}^5 \left[p_i^*(M) \frac{p_i(M)}{p_i^*(M)} U(M_i) \right] - h^2 \frac{F(M)}{A(M)}. \quad (1.74)$$

Interpretarea este următoarea: particula capătă o pondere

$$\omega_i(M) = \frac{p_i(M)}{p_i^*(M)}.$$

Cu alte cuvinte, după fiecare pas, fiecare particulă devine $\omega_j (M)$ particule. Ponderile se multiplică de la un pas la altul, iar ponderea totală la pasul numerotat cu k este

$$\omega(K) = \prod_{j=1}^K \omega_{i_j} (M_j),$$

unde i_j este punctul adiacent în care s-a dus particula prin pasul j .

Se demonstrează că estimarea lui $U(M_0)$ este media variabilei :

$$Z_m = - \sum_{j=1}^m \frac{h^2 F(M_j)}{A(M_j)} \omega(j) + \omega(K_m) \Phi(Q_m), \quad (1.75)$$

unde K_m este numărul de pași necesari pentru atingerea frontierei, pe drumul numerotat cu m și care se termină în Q_m .

În ipoteza că în toate punctele rețelei dispunem de o soluție aproximativă $U(M)$, o alegere bună pentru p_i^* este

$$p_i^*(M) = p_i(M) \frac{U(M_i)}{U(M)} ; \quad i = 1, \dots, 5.$$

Se demonstrează că dacă $U(M)$ este soluția exactă, atunci dispersia $\sigma^2(Z)$, cu probabilitățile p_i^* astfel alese, este egală cu zero. Pe parcursul calculului, avînd deja la dispoziție valori aproximative pentru $U(M)$, acest procedeu poate fi aplicat la ecuații îmbunătățite.

Utilizînd procedeul de estimare descris, mersul calculului ar fi următorul, pentru o problemă plană (ecuația lui Poisson, domeniul Γ convex) :

Inițializare

1. Punctele rețelei și punctele de pe frontieră ; originea axelor se alege în punctul M_0 , în care se caută soluția. Notăm :

n_+ = numărul maxim al coordonatei după y ($n_+ > 0$),

n_- = numărul minim al coordonatei după y ($n_- < 0$),

(i, j) = coordonatele unui punct al rețelei,

$m_R(j)$ = numărul maxim al coordonatei x pentru o fișie j dată,

$m_L(j)$ = numărul minim al coordonatei x pentru o fișie j dată.

Punctele rețelei sînt deci mărginite de

$$n_- \leq j \leq n_+, \quad m_L(j) \leq i(j) \leq m_R(j).$$

Pentru stabilirea frontierei, trebuie date n_+ , n_- , $m_L(j)$, $m_R(j)$, adică în total $2(n_+ + |n_-| + 2)$ valori.

2. Se dau valorile funcției pe frontieră : $\Phi(m, n)$, în toate cele $2(n_+ + |n_-| + 2)$ puncte.

3. Se dau valorile termenului $-\frac{h^2}{4}F(i, j)$ pentru toate punctele rețelei ; pe frontieră avem deci $F(i, j)_F = 0$.

4. Se dă numărul N de drumuri aleatoare, de efectuat.

Etapele de calcul sînt acum următoarele :

1. Se șterg și se pun la zero registrele drumurilor aleatoare.

2. Se adună $-\frac{h^2}{4}[F(0,0)]$ în registrul Z .

3. Se generează două numere aleatoare (se apelează la subrutina respectivă).

4. Se alege $\Delta_i = \pm 1$ sau 0 și $\Delta_j = \pm 1$ sau 0 , după numerele aleatoare generate ; se exclude cazul $\Delta_i = \Delta_j = 0$.

5. Se trece în registrul (i, j) punctul din rețea ales prin 4.

6. Se adună $-\frac{h^2}{4}[F(i, j)]$ în registrul Z .

7. Se verifică dacă punctul curent este pe frontieră ; dacă nu, se trece la 3. Dacă da, se adună $\Phi(m, n)$ în registrul Z ($m = i, n = j$). Se trece la drumul aleator următor. În registrul W se numără drumurile aleatoare. În registrul T se cumulează conținutul lui Z , iar în registrul G se cumulează pătratul numărului din Z .

8. Se compară numărul de drumuri efectuat, cu N . Dacă $W = N + 1$, se calculează media și dispersia, și se tipărește rezultatul. Dacă $W < N + 1$, se reia de la 1.

Organigrama este arătată în fig.1.6.

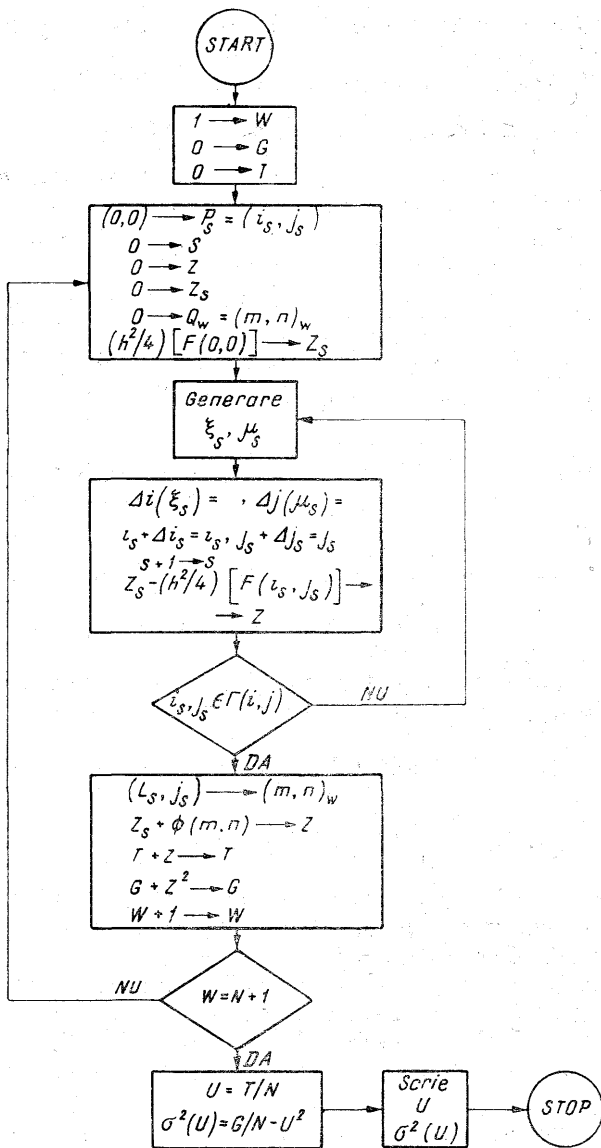


Fig. 1.6.

Pentru încercarea programului se recomandă o problemă simplă, cu soluția analitică cunoscută.

Numerele aleatoare pot fi alese dintre 0, 1, 2, ..., 9. Generarea a două numere ξ și μ din aceste zece posibile se poate folosi după cum urmează :

| ξ_s | μ_s | Δ_{i_s} | Δ_{j_s} |
|----------|----------|----------------|----------------|
| ≥ 5 | ≥ 5 | 1 | 0 |
| < 5 | ≥ 5 | 0 | 1 |
| ≥ 5 | < 5 | 0 | -1 |
| < 5 | < 5 | -1 | 0 |

De exemplu, pentru $\xi = 5$ și $\mu = 3$, pasul următor duce din i, j în $i, j - 1$.

Rămîne acum să arătăm pentru ce alte tipuri de ecuații, în afară de cele de tip eliptic, se poate, sau nu, aplica metoda Monte Carlo.

Să considerăm o ecuație de ordinul doi într-o formă mai generală

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(F \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial U}{\partial t},$$

unde F și G sînt funcții numai de x și y (deci ecuația este liniară). Aplicînd o metodă de discretizare, se urmărește obținerea unui sistem algebric, a cărui matrice A să fie diagonal dominantă, așa cum s-a arătat în introducerea acestui paragraf. Din acest motiv, recurgem la diferențe simetrice, cu pasul h pe direcția x și y și cu pasul t pe axa timpului. Dezvoltînd în jurul unui punct α într-o rețea cu $m \times n$ noduri, se obține

$$\begin{aligned} & \left[G_{\alpha+1} (U_{\alpha+1} - U_{\alpha}) \frac{1}{h} - G_{\alpha} (U_{\alpha} - U_{\alpha-1}) \frac{1}{h} \right] \frac{1}{h} + \\ & + \left[F_{\alpha+n} (U_{\alpha+n} - U_{\alpha}) \frac{1}{h} - F_{\alpha} (U_{\alpha} - U_{\alpha-n}) \frac{1}{h} \right] \frac{1}{h} = \\ & = \frac{U_{\alpha} - U_{\alpha}^{t-1}}{t}. \end{aligned}$$

Pentru comoditate, s-a ales $h^2/t = 1$, și ecuația devine

$$G_{\alpha+1} U_{\alpha+1} + G_{\alpha} U_{\alpha-1} + F_{\alpha+n} U_{\alpha+n} + F_{\alpha} U_{\alpha-n} + U_{\alpha}^{t-1} - \\ - (G_{\alpha+1} + G_{\alpha} + F_{\alpha+n} + F_{\alpha} + 1) U_{\alpha} = 0.$$

Notăm

$$C = G_{\alpha+1} + G_{\alpha} + F_{\alpha+n} + F_{\alpha} + 1.$$

Coefficienții din această ecuație sînt situați pe o linie în matricea bandă diagonală A . Cînd drumul aleator ajunge în punctul A , probabilitățile de trecere într-un punct vecin sînt :

$$\frac{G_{\alpha+1}}{2C}; \quad \frac{G_{\alpha-1}}{2C}; \quad \frac{F_{\alpha+n}}{2C}; \quad \frac{F_{\alpha-n}}{2C}.$$

Pentru stabilirea drumului aleator este necesar un generator de numere aleatoare; se observă deci că metoda Monte Carlo se aplică și ecuațiilor de tip parabolic, evident în cazurile în care condițiile pentru matricea A sînt satisfăcute.

Se poate arăta că pentru ecuația biarmonică

$$\nabla^4 \varphi = 0,$$

în plan, ecuațiile cu diferențe sînt, de exemplu :

$$\varphi_{\alpha+2n} + 2\varphi_{\alpha+n+1} - 8\varphi_{\alpha+n} + 2\varphi_{\alpha+n-1} + \varphi_{\alpha+2} - 8\varphi_{\alpha+1} - \\ - 20\varphi_{\alpha} - 8\varphi_{\alpha-1} + \varphi_{\alpha-2} + 2\varphi_{\alpha-n+1} - 8\varphi_{\alpha-n} + \\ + 2\varphi_{\alpha-n-1} + \varphi_{\alpha-2n} = 0.$$

Efectuînd calculele [4], rezultă că procesul nu converge, deci metoda nu este aplicabilă la discretizarea prin diferențe ca mai sus.

În schimb, este aplicabilă pentru cazuri cu condiții la limită variabile (în spațiu), de exemplu pentru ecuații eliptice. De asemenea, metoda Monte Carlo poate fi utilă la unele aplicații pe calculatoare hibride.

METODE DE DISCRETIZARE

2.1. Introducere

În rezolvarea numerică a problemelor cu condiții inițiale și la limită variabilă timp t joacă un rol special. La orice moment t un proces ce are ca model matematic o ecuație sau un sistem de ecuații cu derivate parțiale este definit prin una sau mai multe funcții, care depind de o serie de variabile spațiale și de variabila t , descriind starea procesului la acel moment. La variația timpului, starea procesului se schimbă, lucru ce se reflectă în ecuația diferențială și în valorile funcțiilor care descriu procesul în acel moment. Funcția care descrie starea procesului se notează cu u . Fiecare punct din spațiul funcțiilor u , pe care îl notăm cu \mathcal{U} , reprezintă o stare a procesului, iar succesiunea stărilor procesului cu variația timpului este reprezentată prin mișcarea unui punct reprezentativ în spațiul funcțiilor. Pentru a putea face o analiză în ceea ce privește modul de alegere al operatorilor diferență, precizia metodelor de discretizare, stabilitatea, convergența, consistența și modul de propagare și control al erorilor, se va introduce o serie de elemente pe spațiul \mathcal{U} .

Pentru problemele cu condiții inițiale se presupune că spațiul funcțiilor care descriu starea procesului satisface proprietățile unui spațiu Banach [79].

Cu această presupunere se va prezenta în continuare o serie de rezultate [16] asupra analizei metodelor cu diferențe, utilizate la aproximarea problemelor cu condiții inițiale și la limită. Înainte de a se aplica metodele numerice unei probleme cu condiții inițiale și la limită, trebuie verificat dacă problema este corect pusă.

Încercăm o reprezentare abstractă a problemei cu ajutorul spațiului Banach \mathcal{U} . Se urmărește determinarea

unei familii de funcții $u(t)$ din \mathcal{U} , unde t este real, astfel ca

$$\frac{d}{dt} u(t) = Bu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

și

$$u(0) = u_0, \quad (2.2)$$

unde B este un operator liniar și u_0 este un element al spațiului \mathcal{U} , ce descrie starea inițială a procesului. Relația (2.1) nu este restrictivă numai la ecuațiile de ordinul întâi, ci și la ecuații de ordin superior care pot fi reduse la ecuații de ordinul întâi, dar cu o creștere a numărului de variabile și respectiv de ecuații.

Se numește o *soluție naturală* a problemei cu valori inițiale o familie de funcții $u(t)$, astfel încât $u(t)$ să aparțină domeniului operatorului B pentru orice $t \in [0, T]$ și să satisfacă relația

$$\left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - Bu(t) \right\| \rightarrow 0 \text{ pentru } \Delta t \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

$$0 \leq t \leq T.$$

O *problemă* este considerată *corect pusă*, dacă familia de soluții naturale este suficient de largă și dacă soluțiile depind în mod unic și continuu de datele inițiale. Dacă \mathcal{V} este o mulțime de elemente u_0 din \mathcal{U} , atunci pentru orice u_0 există o soluție naturală $u(t)$, astfel încât $u(0) = u_0$ și (2.3) converge uniform în t . Pentru orice t fixat, corespondența între u_0 și $u(t)$ definește o transformare în \mathcal{U} cu \mathcal{V} ca domeniu. Presupunând că această transformare este liniară și notînd-o prin $A_0(t)$, obținem următoarea ecuație :

$$u(t) = A_0(t) u_0, \quad u_0 \in \mathcal{V}. \quad (2.4)$$

Ecuația (2.4) dă soluția problemei cu condiții inițiale pentru acele stări inițiale, pentru care există soluție naturală.

O problemă cu condiții inițiale determinată prin operatorul liniar B va fi corect pusă, dacă următoarele două condiții sînt satisfăcute :

1° domeniul \mathcal{V} al lui $A_0(t)$ este dens în \mathcal{U} ;

2° familia de operatori $A_0(t)$ este uniform mărginită, adică există un K astfel ca $\|A_0(t)\| < K$ pentru $0 \leq t \leq T$. A doua condiție scoate în evidență dependența continuă a soluției de datele inițiale ale problemei. De exemplu, dacă $u(t)$ și $v(t)$ sînt două soluții naturale corespunzătoare stărilor inițiale u_0 și v_0 , atunci

$$\|u(t) - v(t)\| \leq K \|u_0 - v_0\|. \quad (2.5)$$

Relația (2.5) arată următoarele : dacă stările inițiale u_0 și v_0 sînt apropiate, atunci stările corespunzătoare la un alt moment vor fi de asemenea apropiate.

Prima condiție evidențiază faptul că, chiar dacă pentru o anumită alegere a elementului inițial nu există o soluție naturală u_0 , se poate aproxima acest element inițial cu ajutorul altuia pentru care soluția naturală există.

Fie $A_0(t)$ o transformare liniară mărginită cu domeniu dens în \mathcal{U} . Această transformare are o extensie $A(t)$, numită *operator soluție generalizată*, definită pentru întreg spațiul \mathcal{U} , avînd aceeași limită ca și $A_0(t)$.

Ecuția (2.5) este interpretată ca o relație care dă soluția generalizată pentru un element inițial arbitrar u_0 .

Presupunem că operatorul soluție are proprietatea de semigrup

$$A(t_1 + t_2) = A(t_1)A(t_2) \text{ pentru } t_1 > 0, t_2 > 0. \quad (2.6)$$

În cazul unei probleme cu condiții inițiale și la limită, condițiile la limită influențează domeniul lui B și deci al lui $A_0(t)$, iar dacă aceste condiții la limită nu sînt apropiate, atunci \mathcal{V} nu mai este dens în \mathcal{U} și deci prima condiție nu mai este satisfăcută.

Din (2.3) rezultă că o soluție naturală este continuă în sensul normei din \mathcal{U} :

$$\|u(t + \Delta t) - u(t)\| \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, \text{ pentru } 0 \leq t \leq T. \quad (2.7)$$

Atunci din utilizarea inegalității triunghiului rezultă că orice soluție generalizată este de asemenea continuă pentru $0 \leq t \leq T$. Considerînd că $u_0 \in \mathcal{U}$ și $(1/\delta) [A(\delta) - I]u_0$ aproximează Bu_0 , iar $B(t)$ comută cu $A(\delta)$, se poate arăta că

$$A(t)Bu_0 = BA(t)u_0. \quad (2.8)$$

De aici se vede că relația (2.3) care definește soluția naturală poate fi scrisă astfel:

$$\left\| A(t) \left\{ \frac{A(\Delta t) - I}{\Delta t} - B \right\} u_0 \right\| \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Deoarece $\|A(t)\| < K$ pentru $0 \leq t \leq T$, convergența în (2.3) este uniformă în t pentru o soluție naturală a unei probleme cu valori inițiale corect puse.

Cînd B depinde explicit de timp, operatorul soluție devine o funcție de două variabile $A(s, t)$; dacă se cunoaște starea inițială a sistemului la timpul t_0 , atunci $u(t) = A(t, t_0)u_0$ și, din presupunerea făcută asupra proprietății de semigrup, se obține ecuația

$$A(t_2, t_0) = A(t_2, t_1) A(t_1, t_0).$$

2.2. Aproximații cu diferențe finite

Aproximațiile obținute din ecuația cu diferențe finite, asociată ecuației diferențiale, pot fi considerate ca reprezentînd puncte în spațiul stărilor sistemului \mathcal{U} . În acest caz în locul unei familii de funcții $u(t)$, care depind de un parametru t , se va obține o mulțime de puncte $u^0, u^1, \dots, u^{(n)}$, unde $u^{(n)}$ este aproximația lui $u(n\Delta t)$, Δt fiind pasul de discretizare, iar u este o funcție de t (timpul) și x_1, x_2, \dots (variabile spațiale). Schemele de discretizare sînt prezentate prin ecuații cu diferențe de forma

$$C_1 u^{(n+1)} = C_0 u^{(n)}. \quad (2.10)$$

unde $C_0 = C_0(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots)$ și $C_1 = C_1(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots)$ sînt operatori diferențe finite, liniari ce depind de creșterile sau parametrii rețelei în direcțiile timpului și variabilelor spațiale.

Se presupune că operatorii diferențe finite C_0 și C_1 sînt independenți de t ca și operatorul B din (2.1). Cu această presupunere putem afirma că în fiecare punct al spațiului, fiecare membru al ecuației (2.10) va consta dintr-o sumă liniară de valori de funcții, calculate într-un șir de puncte vecine.

Se presupune că prin anumite procedee valorile funcției $U^{(n+1)}$ pot fi calculate pentru orice $U^{(n)}$, de care ele depind continuu. Astfel, se presupune că C_1^{-1} și $C_1^{-1}C_0$ există și sînt transformări liniare mărginite în \mathcal{U} , domeniul lui $C_1^{-1}C_0$ fiind întreg spațiul Banach \mathcal{U} considerat.

Aceste presupuneri sînt satisfăcute pentru majoritatea schemelor cu diferențe utilizate în calcul.

Relația (2.10) este numită *schemă cu diferențe cu două nivele*, deoarece sînt implicate două nivele de timp $t^{(n)}$ și $t^{(n+1)}$.

În general, numărul de nivele al unei scheme cu diferențe este o funcție de ordinul ecuației diferențiale.

O schemă cu diferențe cu mai multe nivele, asociată unei ecuații diferențiale de ordin superior, poate fi înlocuită cu o schemă cu diferențe cu două nivele, dacă ecuația diferențială de ordin superior implicată se transformă într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi.

Din cele prezentate anterior relația (2.10) se poate scrie astfel :

$$U^{(n+1)} = G(\Delta t) U^{(n)}, \quad (2.11)$$

unde

$$G(\Delta t) = C_1^{-1}(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots) C_0(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots). \quad (2.12)$$

Dacă se introduc notațiile

$$\Delta x_i = f_i(\Delta t), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2.13)$$

atunci expresia (2.12) devine

$$G(\Delta t) = C_1^{-1}(\Delta t, f_1(\Delta t), f_2(\Delta t), \dots) C_0(\Delta t, f_1(\Delta t), f_2(\Delta t), \dots). \quad (2.14)$$

$G(\Delta t)$ se numește *factor de amplificare* sau matrice de amplificare pentru schema cu diferențe utilizată. Factorul

de amplificare joacă un rol important în analiza convergenței și stabilității.

2.3. Noțiunea de consistență

Considerînd expresia (2.1) și aproximînd prin diferențe derivata funcției $u(t)$ în raport cu timpul, se obține

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} \approx \frac{d}{dt} u(t). \quad (2.15)$$

Atunci partea dreaptă a ecuației (2.1) poate fi aproximată astfel :

$$Bu(t) \approx \frac{G(\Delta t)u - u}{\Delta t}. \quad (2.16)$$

Această expresie (2.16) nu poate fi corectă pentru toate funcțiile u din \mathcal{U} , pentru că în general B nu este definit pentru toate funcțiile u din \mathcal{U} .

Familia de operatori $G(\Delta t)$ realizează o aproximație consistentă pentru o problemă cu valori inițiale, dacă pentru orice $u(t)$ din o anumă clasă \mathcal{F} de soluții naturale, ale căror elemente inițiale $u(0)$ sînt dense în \mathcal{U} , este satisfăcută relația

$$\left\| \left\{ \frac{G(\Delta t) - I}{t} - B \right\} u(t) \right\| \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, 0 \leq t \leq T, \quad (2.17)$$

unde I este operatorul identic.

Relația (2.17) reprezintă *condiția de consistență* a unei scheme cu diferențe.

2.4. Eroarea de trunchiere

Pentru a evidenția eroarea de trunchiere se consideră relația (2.3) în care se înlocuiește termenul $Bu(t)$ prin valoarea sa din relația (2.17). Rezultă că

$$\left\| \frac{u(t + \Delta t) - G(\Delta t)u(t)}{\Delta t} \right\| \rightarrow 0, \text{ cînd } \Delta t \rightarrow 0, \\ 0 \leq t \leq T. \quad (2.18)$$

Cantitatea din normă dată în relația (2.18) reprezintă eroarea de trunchiere care măsoară gradul în care o soluție naturală a unei probleme cu condiții inițiale și la limită satisface schema cu diferențe finite. Dacă se presupune că limitele din (2.17) și (2.18) sînt uniforme în t , atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$, astfel încît

$$\| \{ G(\Delta t) - A(\Delta t) \} u(t) \| < \varepsilon \cdot \Delta t \quad (2.19)$$

pentru $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \Delta t \leq \delta$.

2.5. Noțiunea de convergență

Operîndu-se asupra unei soluții naturale u_0 de n ori cu operatorul $G(\Delta t)$, se obține

$$U^{(n)} = G^{(n)}(\Delta t) u_0, \quad U^{(n)} = U(n\Delta t), \quad u(t) = A(t) u_0.$$

O familie de operatori $G(\Delta t)$ realizează o aproximație convergentă pentru o problemă cu valori inițiale, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :

șirul $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ de creșteri în direcția timpului tinde la zero,

pentru t fixat în domeniul $0 \leq t \leq T$ și j întreg apropiat ca valoare de raportul $t/\Delta_j t$ pentru fiecare j , adică $n_j \Delta_j t \rightarrow t$ pentru $j \rightarrow \infty$ are loc relația

$$\| G^{(n_j)}(\Delta_j t) u_0 - A(t) u_0 \| \rightarrow 0, \quad \text{pentru } j \rightarrow \infty$$

pentru orice u_0 din \mathcal{U} .

2.6. Noțiunea de stabilitate

Considerînd că se efectuează calcule cu $\Delta_j t \rightarrow 0$, fiecare calcul executîndu-se de la $t = 0$ la $t = T$, operatorii utilizați definesc un șir infinit

$$G^{(n)}(\Delta_j t), \quad 0 \leq n\Delta_j t \leq T, \quad j \in N_0,$$

ce se aplică lui u_0 . Aproximația cu diferențe se numește *stabilă*, dacă pentru un anumit $\tau > 0$ șirul infinit de operatori

$$G^{(n)}(\Delta t), \quad 0 < \Delta t < \tau, \quad 0 \leq n\Delta t \leq T, \quad (2.20)$$

este uniform mărginit.

Esența stabilității constă în faptul că există o margine finită pentru orice inițială ce se folosește în metoda cu diferențe utilizată.

Se presupune, prin urmare, că operatorul diferență finită $G(\Delta t)$ depinde continuu de Δt , pentru $\Delta t > 0$ și $\Delta t < \tau$. Cu alte cuvinte, coeficienții operatorului diferență finită, ca și norma sa, sînt funcții continue de Δt . În aceste condiții șirul din (2.20) va fi în mod automat uniform mărginit pentru orice Δt cu $\Delta t \in [\tau', \tau]$, unde și $\tau' > 0$. Condiția stabilității este satisfăcută dacă șirul de operatori diferență rămîne uniform mărginit cînd $\tau' \rightarrow 0$. Conceptul de stabilitate nu se referă în nici un fel la ecuația diferențială de rezolvat, dar este proprie șirului de operatori diferențe.

Dacă se consideră o problemă cu valori inițiale corect pusă și o schemă cu diferențe finite pentru aproximarea numerică ce satisface condiția de consistență, atunci stabilitatea este necesară și suficientă pentru ca schema cu diferențe considerată să fie convergentă.

2.7. Metode de discretizare pentru ecuații cu derivate parțiale de ordinul întii

Scurgerea unui fluid printr-un tub fără pierderi, generare sau transfer, poate fi modelată matematic printr-o ecuație de forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c > 0, \quad (2.21)$$

unde c este o constantă, cu condițiile inițiale

$$u(x, 0) = f(x) \text{ pentru } 0 < x < \pi. \quad (2.22)$$

Soluția analitică a ecuației (2.1) este de forma

$$u(x, t) = f(x - ct). \quad (2.23)$$

Ecuației (2.21) i se poate asocia o familie de caracteristici, ce reprezintă linii drepte înclinate față de axa Ox cu un unghi θ dat de relația

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{c}. \quad (2.24)$$

Pentru rezolvarea numerică a problemei (2.21) se construiește pe domeniul $t > 0$, $0 < x < \pi$ o rețea rectangulară formată din drepte paralele cu axa Ox și drepte paralele cu axa Ot (fig. 2.1). În această rețea segmentul

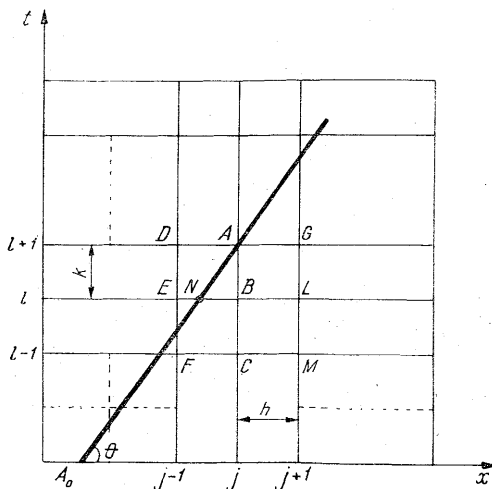


Fig. 2.1.

$\overline{AA_0}$ reprezintă o caracteristică din familia de caracteristici asociate problemei (2.21). Un punct A al rețelei din fig. 2.1 este dat prin $x = jh$, $t = lk$, unde h este pasul în direcția x , iar k este pasul în direcția t .

Unei probleme cu valori inițiale i se poate asocia în urma discretizării o schemă explicită cu diferențe.

2.8. Scheme cu diferențe

Considerînd dezvoltarea în serie Taylor a funcției $u(x, t)$ în raport cu variabila t în vecinătatea punctului A din fig. 2.1, se obține

$$u_A = \left(1 + k \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \right) u_B. \quad (2.25)$$

Dacă în relația (2.25) se neglijează toți termenii începînd cu termenul de ordinul al doilea, se obține

$$u_A = \left(1 + k \frac{\partial}{\partial t}\right) u_B. \quad (2.26)$$

Ținînd seamă de ecuația (2.21), relația (2.26) se poate scrie astfel :

$$u_A = \left(1 - ck \frac{\partial}{\partial x}\right) u_B. \quad (2.27)$$

Utilizînd operatorul diferență la stînga ∇ , rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x} u_B = \frac{1}{h} (u_B - u_E) = \frac{1}{h} \nabla_x u_B,$$

de unde se obține

$$\begin{aligned} u_A &= (1 - \alpha c \nabla_x) u_B = u_B - \alpha c (u_B - u_E) = \\ &= (1 - \alpha c) u_B + \alpha c u_E, \end{aligned}$$

sau în mod explicit :

$$U_j^{l+1} = (1 - \alpha c) U_j^l + \alpha c U_{j-1}^l, \quad U_j^0 = f_j, \quad l, j \in N, \quad (2.28)$$

unde indicele superior reprezintă ordinul iterației în raport cu timpul, iar indicele inferior ordinul iterației în raport cu spațiul. Această schemă cu diferențe este cu două nivele de timp și oferă soluția numerică într-un nod al rețelei la nivelul $l + 1$, dacă se cunoaște soluția în două noduri la nivelul l (fig. 2.2). Relațiile (2.28) implică trei noduri ale rețelei :

$$A(jh, (l + 1)k), \quad B(jh, lk), \quad E((j + 1)h, lk).$$

Dacă în dezvoltarea în serie Taylor a funcției $u(x, t)$ în raport cu timpul se reține și termenul de ordinul al doilea, ea devine

$$u_A \approx \left(1 + k \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u_B. \quad (2.29)$$

Derivând ecuația (2.21) în raport cu timpul, se obține

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0 \text{ sau } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \\ &= -c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

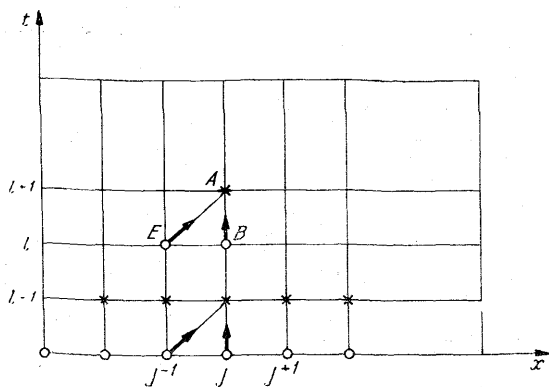


Fig. 2.2.

Dezvoltarea în serie a funcției de două variabile este

$$\begin{aligned} u(x+h, t+k) &= u(x, t) + 1 \left(h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

Utilizând ecuația (2.21) și relațiile (2.30) și (2.31), relația (2.29) se poate scrie sub următoarea formă :

$$u_A = \left(1 - ck \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} c^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_B. \quad (2.32)$$

Cu operatorul diferențe centrate δ avem

$$\frac{\partial}{\partial x} u_B = \frac{1}{h} \delta_x u_B : \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_B = \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_B,$$

deci (2.32) se poate scrie astfel :

$$u_A = \left(1 - c \frac{k}{h} \delta_x + \frac{1}{2} c^2 \frac{k^2}{h^2} \delta_x^2 \right) u_B. \quad (2.33)$$

Deoarece se poate considera că

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \delta_x u_B &= \frac{1}{h} (U_{j+1/2}^l - U_{j-1/2}^l) = \frac{1}{h} \left(\frac{U_{j+1}^l + U_j^l}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{U_j^l + U_{j-1}^l}{2} \right) = \frac{1}{h} \frac{U_{j+1}^l - U_{j-1}^l}{2}, \end{aligned}$$

(2.33) devine

$$u_A = u_B - \frac{\alpha c}{2} (u_L - u_E) + \frac{1}{2} \alpha^2 c^2 (u_L - 2u_B + u_E)$$

sau sub altă formă :

$$u_B = (1 - \alpha^2 c^2) u_B - \frac{1}{2} \alpha c (1 - \alpha c) u_L + \frac{1}{2} \alpha c (1 + \alpha c) u_E. \quad (2.33a)$$

Din această ultimă relație se vede că este o schemă cu două nivele și implică patru noduri din rețea :

$$\begin{aligned} &A(jh, (l+1)k), \quad L((j+1)h, lk), \quad B(jh, lk), \\ &E((j-1)h, lk). \end{aligned}$$

Utilizînd acest mod de reprezentare a nodurilor, schema cu diferențe se poate scrie astfel :

$$\begin{aligned} U_j^{l+1} &= (1 - \alpha^2 c^2) U_j^l - \frac{1}{2} \alpha c (1 - \alpha c) U_{j+1}^l + \frac{1}{2} \alpha c (1 + \\ &\quad + \alpha c) U_{j-1}^l, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$U_j^0 = f_j, \quad j, l \in N.$$

Secvența după care se desfășoară calculele este dată în fig. 2.3, unde prin * s-a reprezentat nodul ce se calculează, iar prin ° nodurile ce sînt implicate în calcul. Schema cu diferențe dată în (2.34) este întilnită în literatură sub

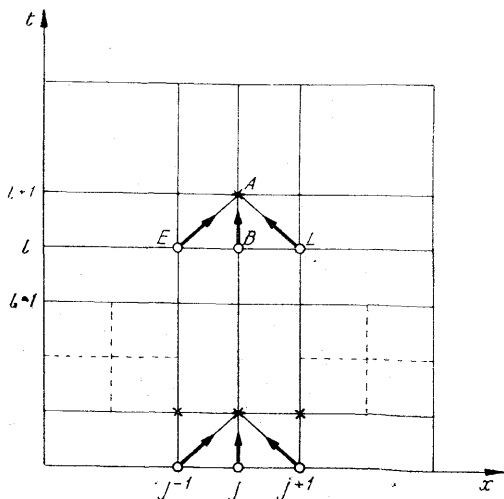


Fig. 2.3.

denumirea de schema Lax-Wendroff și este una dintre cele mai utilizate scheme pentru rezolvarea ecuațiilor hiperbolice cu ajutorul calculatorului.

Eroarea de trunchiere în cazul schemei cu diferențe (2.34) se poate calcula folosind următoarele dezvoltări în serie:

$$u_A = \left(u + k \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{6} k^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots \right)_B,$$

$$u_L = \left(u + h_j \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} h_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{6} h_j^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \right)_B,$$

$$u_E = \left(u - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \right)_B.$$

Dacă se înlocuiesc aceste dezvoltări în (2.33 a), se obține

$$\begin{aligned} & \left(u + k \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{6} k^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots \right)_B = \\ & = (1 - \alpha^2 c^2) u_B - \frac{1}{2} \alpha c (1 - \alpha c) \left(u + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots \right)_B + \frac{1}{2} \alpha c (1 + \alpha c) \left(u - h \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_B. \end{aligned}$$

După simplificările corespunzătoare eroarea este de forma

$$\frac{1}{6} \left(k^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + c k h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right).$$

Dacă se consideră dezvoltarea în serie Taylor (2.29) și ecuația (2.21), atunci (2.29) se poate scrie sub forma

$$u_A = \left(1 - c k \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dots \right)_B. \quad (2.35)$$

Utilizând operatorul diferență centrată δ pentru derivata în raport cu x și pentru derivata în raport cu timpul, rezultă

$$u_A = \left(1 - c \frac{k}{h} \delta x + \frac{1}{2} k^2 \cdot \frac{1}{k^2} \delta^2 t \right) u_B,$$

de unde

$$u_A = \left[U_j^i - c \frac{k}{h} (U_{j+1/2}^i - U_{j-1/2}^i) + (U_j^{i+1} - 2U_j^i + U_j^{i-1}) \right]$$

sau

$$\begin{aligned} U_j^{i+1} = & \left[U_j^i - \alpha c \left(\frac{U_{j+1}^i + U_j^i}{2} - \frac{U_j^i + U_{j-1}^i}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (U_j^{i+1} - 2U_j^i + U_j^{i-1}) \right]. \end{aligned}$$

După calculele de rigoare expresia lui U_j^{l+1} devine

$$U_j^{l+1} = U_j^l - \alpha c \frac{U_{j+1}^l - U_{j-1}^l}{2} + \frac{U_j^{l+1} + U_j^{l-1}}{2} - U_j^l.$$

Considerînd și condițiile inițiale, se obține schema cu diferențe definită pe rețeaua din fig. 2.4 :

$$U_j^{l+1} = U_j^{l-1} - \alpha c (U_{j+1}^l - U_{j-1}^l),$$

$$U_j^0 = f_j, \quad U_j^l = hg_j + f_j; \quad j = 0, 1, 2; \quad l \in N. \quad (2.36)$$

Această schemă cu diferențe este o schemă cu trei nivele $(l+1)t$, lt și $(l-1)t$; calculele se desfășoară în mod secvențial ca în fig. 2.4, implicînd nodurile : $A(jh, (l+1)k)$, $C(jh, (l-1)k)$, $L((j+1)h, lk)$ și $E((j-1)h, lk)$. Condiția de stabilitate pentru această schemă cu diferență

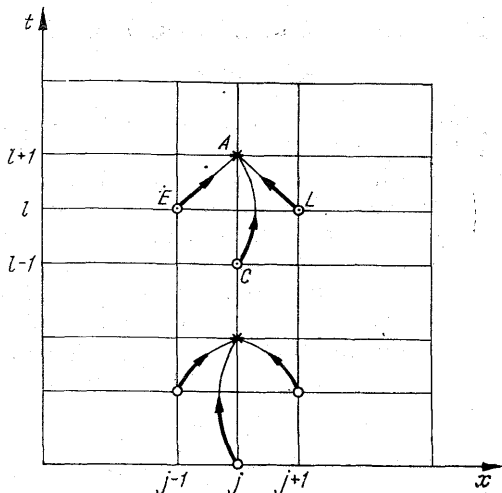


Fig. 2.4.

este ca $0 < \alpha C \leq -1$, care coincide cu condiția Courant-Friedrichs-Lewy (C.F.L.) [40, 43].

Pentru orice combinație de h și k pentru care condiția de convergență este îndeplinită, schema oferă rezultate destul de precise.

2.9. Stabilitatea schemelor explicite

Pentru analiza stabilității schemelor cu diferențe (2.28), (2.34) și (2.36) se face apel la condiția C.F.L. care se aplică la schemele cu diferențe explicite. Dacă se consideră caracteristica ce trece prin punctul A și segmentul ei $\overline{AA_0}$, se vede că ea intersectează nivelul lk în punctul N . Condiția C.F.L. de stabilitate spune că schema cu diferențe dată în (2.28) este stabilă dacă punctul $N \in \overline{BE}$, iar schema (2.34) este stabilă dacă punctul $N \in \overline{LE}$.

Dacă condiția C.F.L. nu este satisfăcută, convergența nu poate avea loc când $h \rightarrow 0$, cu $k = \alpha h$, unde α este constant. În cazul schemei (2.28) se poate scrie

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{c} = \frac{k}{|\overline{NB}|} \quad \text{sau} \quad kc = |\overline{NB}|.$$

Condiția C.F.L. cere ca $0 \leq |\overline{NB}| \leq h$ sau $kc \leq h$, adică

$$0 \leq \alpha c \leq 1, \quad (2.37)$$

cea ce reprezintă și condiția de convergență pentru schema cu diferențe (2.34).

În scopul analizei stabilității schemei cu diferențe Lax-Wendroff se va utiliza metoda lui von Neumann.

Se notează cu $u(x, t)$ soluția analitică a problemei cu valori inițiale, iar cu U_j^l soluția schemei cu diferențe finite asociate ecuației diferențiale corespunzătoare.

Eroarea de aproximare în acest caz este dată de diferența dintre soluția numerică U_j^l și soluția analitică calculată în punctul $u(jh, lk)$, adică [8]

$$U_j^l - u(jh, lk).$$

În legătură cu evaluarea acestei diferențe apar o serie de întrebări cum ar fi:

— Care este comportarea expresiei $U_j^l - u(jh, lk)$ când $n \rightarrow \infty$ pentru h și k fixați?

— Care este comportarea expresiei $U_j^l - u(jh, lk)$ când rețeaua se îndesește, adică h și k tind la zero pentru o valoare fixată nk ?

În dorința de a face comparație privind calculul soluției cu ajutorul schemei cu diferențe presupunem că

soluția exactă a problemei cu valori inițiale poate fi obținută prin metoda seriilor Fourier, fiind reprezentată ca o serie de sinusuri. Dacă se definește $f(x)$ dată în condiția inițială a problemei (2.21) ca $-f(-x)$ pentru $-\pi \leq x \leq 0$, atunci soluția analitică a problemei (2.21) se poate da sub forma

$$u(x, t) = \sum_{+\infty}^{-\infty} A_{\beta} e^{i(\beta x - \beta ct)},$$

unde coeficienții seriei A_{β} pot fi calculați cu ajutorul formulei

$$A_{\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\beta x} dx, \quad (2.38)$$

β fiind o constantă întreagă.

Dacă expresia $A\zeta^l e^{i\beta jh}$ (unde A este o constantă ce se calculează cu (2.38) și $\zeta = \zeta(\beta)$) se substituie în locul lui U_j^l din schema cu diferența Lax-Wendroff dată în (2.34), atunci (2.34) devine

$$A\zeta^{l+1} e^{i\beta jh} = (1 - \alpha^2 c^2) A\zeta^l e^{i\beta jh} - \\ - \frac{1}{2} \alpha c (1 - \alpha c) A\zeta^l e^{i\beta (j+1)h} + \frac{1}{2} \alpha c (1 + \alpha c) A\zeta^l e^{i\beta (j-1)h},$$

unde după simplificările posibile rezultă

$$\zeta = (1 - \alpha^2 c^2) - \frac{1}{2} \alpha c (1 - \alpha c) e^{i\beta h} + \frac{1}{2} \alpha c (1 + \alpha c) e^{-i\beta h},$$

iar după ordonare

$$\zeta = (1 - \alpha^2 c^2) + \frac{1}{2} \alpha^2 c^2 (e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}) - \frac{1}{2} \alpha^2 c^2 (e^{i\beta h} - e^{-i\beta h})$$

sau altfel :

$$\begin{aligned} \zeta &= (1 - \alpha^2 c^2) + \alpha^2 c^2 \cos \beta h - i \alpha c \sin \beta h = \\ &= 1 - 2\alpha^2 c^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - i \alpha c \sin \beta h \end{aligned} \quad (2.39)$$

Relația (2.39) este întâlnită în literatură sub denumirea de *factor de amplificare* al schemei cu diferențe. Calculînd modulul factorului de amplificare, se obține

$$|\zeta| = \sqrt{1 - 4\alpha^2 c^2 (1 - \alpha^2 c^2) \sin^4 \frac{\beta h}{2}}.$$

Din presupunerea făcută că U_j^l se poate scrie sub forma

$$U_j^l = \sum_{(\beta)}^{+\infty} A_{\beta} e^{i\beta j h} [\zeta(\beta)]^l \quad (2.40)$$

rezultă că seria (2.40) este absolut convergentă, dacă seria pentru $f(x)$ este absolut convergentă și $\zeta(\beta)$ este o funcție mărginită, adică $|\zeta| \leq 1$, dar din expresia lui $|\zeta|$ se vede că acest lucru are loc, dacă $0 < \alpha c < 1$.

După aceste calcule se poate afirma că eroarea $U_j^l - u(jh, lk)$ rămîne mărginită pentru $l \rightarrow \infty$, dacă pentru h și k fixați și pentru $f(x)$ cu o serie absolut convergentă este satisfăcută condiția $|\zeta(\beta)| \leq 1$.

Din analiza expresiei lui $|\zeta|$ se vede că $|\zeta(\beta)| \leq 1$,

dacă $0 < \alpha c \leq 1$ sau $0 < \frac{k}{h} c \leq 1$, iar această con-

diție se mai poate scrie și sub forma

$$0 < \frac{k}{h} \leq 1.$$

Din cele prezentate în acest paragraf se vede cum condiția de stabilitate obținută cu ajutorul metodei lui von Neumann este același lucru cu condiția de stabilitate C.F.L. pentru schema cu diferențe Lax-Wendroff.

Problema stabilității ocupă un rol important în calculul numeric pentru că este una din noțiunile de bază ale aproximării, ce permite determinarea schemelor în care eroarea poate fi controlată astfel ca ea să devină nulă la limită.

2.10. Scheme implicite cu diferențe

Acest tip de scheme apare în cazul problemelor cu valori inițiale și la limită. O problemă tipică de acest gen este ecuația (2.21) cu condiția inițială

$$u = f(x) \text{ pentru } t = 0, \quad 0 \leq x < \infty,$$

și condiția la limită

$$u = g(t) \text{ pentru } x = 0, \quad 0 \leq t < \infty,$$

care trebuie să satisfacă relația

$$g(0) = f(0).$$

Considerînd trei puncte din rețeaua dată în fig. 2.1 :

A, B și $D, B(jh, lk), A(jh, (l+1)k)$ și $D((j-1)h, (l+1)k)$

și presupunînd că soluția $u(x, t)$ este de clasa C^2 în domeniul de existență a soluției, rezultă

$$u_B = \left(1 - h \frac{\partial}{\partial t}\right) u_A,$$

sau, ținînd seamă de ecuația (2.21), se obține relația

$$u_B = \left(1 + ck \frac{\partial}{\partial x}\right) u_A. \quad (2.40)$$

Dacă se utilizează operatorul de discretizare la stînga ∇ , relația (2.40) devine

$$u_B = (1 - ck \nabla_x) u_A = u_A + \alpha c (u_A - u_D) = (1 + \alpha c) u_A - \alpha c u_D.$$

Schema cu diferențe implicită pentru acest caz ia forma

$$U_j^l = (1 + \alpha c) U_j^{l+1} - \alpha c U_{j-1}^{l+1}. \quad (2.41)$$

Relația (2.41) este în același timp și o formulă explicită, deci ca metodă de calcul o folosim sub forma unui algoritm explicit

$$U_j^{l+1} = \frac{\alpha c}{1 + \alpha c} U_{j-1}^{l+1} + \frac{1}{1 + \alpha c} U_j^l, \\ U_j^0 = f_j; \quad U_0^l = g_l, \quad j, l \in N. \quad (2.42)$$

Schema (2.42) permite calculul funcției u în toate nodurile rețelei date în fig. 2.5 pe domeniul $(x > 0, t < \infty)$.

Utilizînd operatorul diferență la dreapta Δ aplicat lui u_B , se obține

$$\Delta_x u_B = U_L - U_B,$$

de unde

$$U_L = (1 + \Delta_x)u_B. \quad (2.43)$$

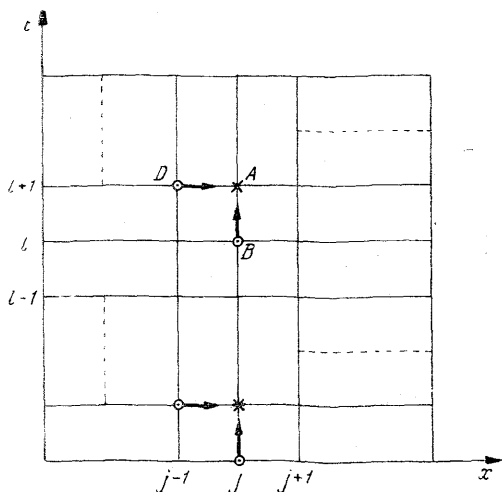


Fig. 2.5.

Dacă se dezvoltă în serie Taylor funcția $u(x, t)$ după direcția x în vecinătatea punctului B , se obține

$$u_L = \left(u + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \right)_B \quad (2.44)$$

galind expresiile din partea dreaptă din relațiile (2.43) (2.44), avem

$$+ \Delta_x \equiv \left(1 + h \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots \right) \equiv \exp \left(h \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

După logaritmare în ambele părți rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{1}{h} \ln (1 + \Delta_x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{1}{k} \ln (1 + \Delta_t). \quad (2.45)$$

Dacă se substituie operatorii $\frac{\partial}{\partial x}$ și $\frac{\partial}{\partial t}$ în ecuația (2.21), se obține

$$\frac{1}{h} \ln (1 + \Delta_t) u_B = - \frac{1}{k} c \ln (1 + \Delta_x) u_B. \quad (2.46)$$

În urma unor transformări și simplificări, (2.46) devine

$$(1 + \Delta_t) u_B = (1 + \Delta_x)^{-\alpha c} u_B$$

sau

$$u_B + u_A - u_B = (1 + \Delta_x)^{-\alpha c} u_B,$$

unde

$$u_A = (1 + \Delta_x)^{-\alpha c} u_B. \quad (2.47)$$

Relația (2.47) mai poate fi scrisă și sub forma

$$u_A = (1 + a\Delta_x)^{-1} (1 + b\Delta_x) u_B \quad (2.48)$$

cu a și b parametri arbitrari.

În cazul în care părțile din dreapta ale ecuațiilor (2.47) și (2.48) se dezvoltă în serie și se identifică coeficienții lui Δ_x și Δ_x^2 , se obțin

$$a = \frac{1}{2} (1 + \alpha c), \quad b = \frac{1}{2} (1 - \alpha c).$$

Cu aceste notații se poate găsi schema de tip Wendroff de forma

$$\left[1 + \frac{1}{2}(1 + \alpha c)\Delta_x \right] u_A = \left[1 + \frac{1}{2}(1 - \alpha c)\Delta_x \right] u_B. \quad (2.49)$$

Dezvoltînd (2.49), se obține

$$u_A + \frac{1}{2}(1 + \alpha c)(u_G - u_A) = u_B + \frac{1}{2}(1 - \alpha c)(u_L - u_B)$$

sau

$$u_A(2 - 1 - \alpha c) = u_B(2 - 1 + \alpha c) + (1 - \alpha c)u_L - (1 + \alpha c)u_G,$$

de unde după explicitarea lui U_G se obține

$$u_G = u_B + \frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c}(u_L - u_A). \quad (2.50)$$

Din (2.50) se vede că este o schemă cu diferențe ce implică patru noduri din rețea: $A(jh, (l+1)k)$, $L((j+1)h, lk)$, $B(jh, lk)$ și $G((j+1)h, (l+1)k)$. În acest caz (2.50) se poate scrie astfel:

$$U_{j+1}^{l+1} = U_j^l + \frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c}(U_{j+1}^l - U_j^{l+1}),$$

$$U_j^0 = f_j; \quad U_0^j = g_j; \quad 0 \leq n < \infty, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (2.51)$$

Schema cu diferențe (2.51), denumită *schema implicită a lui Wendroff*, permite calcularea valorilor funcției U în orice nod al rețelei din domeniul $0 < x; t < \infty$, dacă se cunosc condițiile inițiale pentru $t = 0$, $0 \leq x < \infty$ și condițiile la limită pe $x = 0$, $0 \leq t < \infty$.

Secvența calculelor se desfășoară ca în fig. 2.6.

Schema cu diferențele (2.51) este necondiționat stabilă, lucru ce se va arăta în continuare în cadrul acestui paragraf.

O altă schemă implicită cu diferențe este schema lui Crank-Nicolson care implică șase puncte ale rețelei.

După un raționament similar cu cel făcut pentru obținerea schemei implicite Wendroff se obține o expresie de forma

$$u_A = [1 + a (\Delta_x + \nabla_x)]^{-1} [1 + b (\Delta_x + \nabla_x)] u_B, \quad (2.52)$$

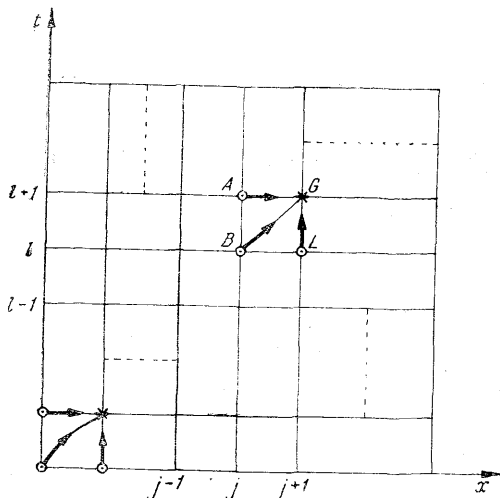


Fig. 2.6.

unde

$$\Delta_x U_B = U_L - U_B \text{ și } \nabla_x u_B = u_B - u_E.$$

Coeficienții a și b se pot obține în felul următor:

Scriind formula lui Lax-Wendroff sub forma (2.33 a) și dezvoltând partea dreaptă a ecuației (2.52) pînă la diferența de ordinul doi, se obține

$$u_A = [1 + (b - \alpha) (\Delta_x + \nabla_x) - 4\alpha (b - \alpha) (\Delta_x - \nabla_x)] u_B. \quad (2.53)$$

Dacă se compară ecuația (2.33 a) cu (2.53), se obține

$$a = \frac{1}{4} \alpha c \text{ și } b = -\frac{1}{4} \alpha c.$$

Înlocuind aceste valori în (2.52), rezultă

$$\left[1 + \frac{1}{4} \alpha c (\Delta_x + \nabla_x) \right] u_A = \left[1 - \frac{1}{4} \alpha c (\Delta_x + \nabla_x) \right] u_B. \quad (2.54)$$

Dezvoltînd (2.54) și efectuînd calculele corespunzătoare, se obține

$$u_A = u_B - \frac{1}{4} \alpha c (u_L - u_E + u_G - u_D).$$

Se vede că această schemă cu diferențe implică șase noduri ale rețelei date în fig. 2.7. Calculele se efectuează după următoarea schemă :

$$U_j^{l+1} = U_j^l - \frac{1}{4} \alpha c (U_{j+1}^l - U_{j-1}^l + U_{j+1}^{l+1} - U_{j-1}^{l+1}),$$

$$U_j^0 = f_j, \quad U_0^l = g_l, \quad j, l \in N. \quad (2.55)$$

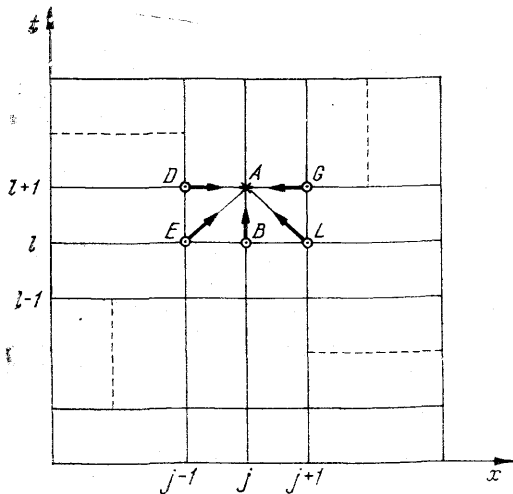


Fig. 2.7.

Schema lui Crank-Nicolson dată în (2.46) este necondiționat stabilă.

Această schemă implicită Crank-Nicolson poate fi utilizată numai dacă condițiile limită sînt date pentru $x = 0$ și $x = 1$ împreună cu condițiile inițiale $t = 0$.

În aceste condiții soluția poate fi calculată în orice punct al rețelei, interior domeniului $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$.

2.11. Stabilitatea schemelor implicite cu diferențe

Pentru a analiza schema cu diferențe (2.42), se va utiliza metoda lui von Neumann. În acest sens trebuie determinat factorul de amplificare ζ , înlocuindu-se în schema cu diferențe U_j^l prin $A\zeta^l e^{i\beta jh}$:

$$A\zeta^l e^{i\beta jh} = (1 + \alpha c)A\zeta^{l+1} e^{i\beta jh} - \alpha c A\zeta^{l+1} e^{i\beta(j-1)h}.$$

După simplificările corespunzătoare se obține:

$$1 = (1 + \alpha c)\zeta - \alpha c\zeta e^{-i\beta h}$$

sau

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{(1 + \alpha c) - \alpha c e^{-i\beta h}} = \frac{1}{1 + \alpha c (1 - e^{-i\beta h})} = \\ &= \frac{1}{1 + \alpha c (1 - \cos\beta h + i \sin\beta h)} = \\ &= \frac{1}{1 + \alpha c \left(2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + i 2 \sin \frac{\beta h}{2} \cos \frac{\beta h}{2} \right)} = \\ &= \frac{1}{1 + \alpha c \cdot 2 \sin \frac{\beta h}{2} \left(\sin \frac{\beta h}{2} + i \cos \frac{\beta h}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Dacă se calculează $|\zeta|$, se vede că $|\zeta| \leq 1$ indiferent de parametrii rețelei, deci schema este necondiționat stabilă.

Analiza stabilității schemei cu diferențe Wendroff dată în relațiile (2.51) se face similar. După înlocuirea lui U_j^l din (2.51) prin termenul $A\zeta^l e^{i\beta jh}$ se obține

$$\begin{aligned} A\zeta^{l+1} e^{i\beta(j+1)h} &= \alpha \zeta^l e^{i\beta jh} + \frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c} (A\zeta^l e^{i\beta(j+1)h}) - \\ &\quad - A\zeta^{l+1} e^{i\beta jh} \end{aligned}$$

sau după simplificări

$$\zeta e^{i\beta h} = 1 + \frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c} (e^{i\beta h} - \zeta),$$

de unde

$$\zeta \left(e^{i\beta h} + \frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c} \right) = 1 + \frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c} e^{i\beta h}$$

sau

$$\zeta = \frac{1 + \frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c} e^{i\beta h}}{\frac{1 - \alpha c}{1 + \alpha c} + e^{i\beta h}}.$$

Această schemă este stabilă când parametrii rețelei sînt aleși astfel încît $|\zeta| \leq 1$.

Stabilitatea schemei implicite Crank-Nicolson se analizează cu ajutorul expresiei (2.55) prin înlocuirea termenului U_j^l prin $A\zeta^l e^{i\beta j h}$.

Pentru această schemă după o serie de calcule factorul de amplificare ζ rezultă din următoarea expresie :

$$\zeta = 1 - \frac{1}{4} \alpha c (e^{i\beta h} - e^{-i\beta h} + \zeta e^{i\beta h} - \zeta e^{-i\beta h}),$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1 - \frac{1}{4} \alpha c (e^{i\beta h} - e^{-i\beta h})}{1 + \frac{1}{4} \alpha c (e^{i\beta h} - e^{-i\beta h})} = \frac{1 - \frac{1}{4} \alpha c 2i \sin \beta h}{1 + \frac{1}{4} \alpha c 2i \sin \beta h} = \\ &= \frac{1 - \frac{i}{2} \alpha c \sin \beta h}{1 + \frac{i}{2} \alpha c \sin \beta h} = \frac{\left(1 - \frac{i}{2} \alpha c \sin \beta h\right)^2}{1 + \frac{1}{4} \alpha^2 c^2 \sin^2 \beta h} = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{4} \alpha^2 c^2 \sin^2 \beta h\right) - i \alpha c \sin \beta h}{1 + \frac{1}{4} \alpha^2 c^2 \sin^2 \beta h}. \end{aligned}$$

Dacă se calculează modulul acestei expresii, se observă că

$$\begin{aligned}
 |\zeta| &= \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 c^2 \sin^2 \beta h + \frac{1}{16} \alpha^4 c^4 \sin^4 \beta h\right)^{1/2}}{1 + \frac{1}{4} \alpha^2 c^2 \sin^2 \beta h} = \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{4} \alpha^2 c^2 \sin^2 \beta h}{1 + \frac{1}{4} \alpha^2 c^2 \sin^2 \beta h} = 1,
 \end{aligned}$$

de unde rezultă că schema Crank-Nicolson este necondiționat stabilă.

2.12. Cazul în care c este o funcție de x

Pentru această situație se alege o problemă cu valori inițiale și la limită :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.56)$$

pe domeniul $0 \leq x < +\infty$, $0 \leq t \leq 1$,

cu condiția inițială

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.57)$$

și condiția la limită

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.58)$$

unde $C \geq c(x) \geq \beta > 0$.

În [9] se indică o schemă de aproximare cu patru noduri de rețea, obținându-se formulele cu diferențe

$$\begin{aligned}
 U_j^{l+1} + U_{j-1}^{l+1} + c_{j-1/2} (U_j^{l+1} - U_{j-1}^{l+1}) &= U_j^l + U_{j-1}^l - \\
 &- c_{j-1/2} (U_j^l - U_{j-1}^l),
 \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$U_j^0 = f_j; \quad U_0^l = 0; \quad l \in N, \quad j \in N_0,$$

asociate problemei cu valori inițiale și la limită date prin (2.56) — (2.58).

Pentru schema cu diferențe dată în (2.59) s-a considerat pasul $h = k$. Această schemă este necondiționat stabilă [10].

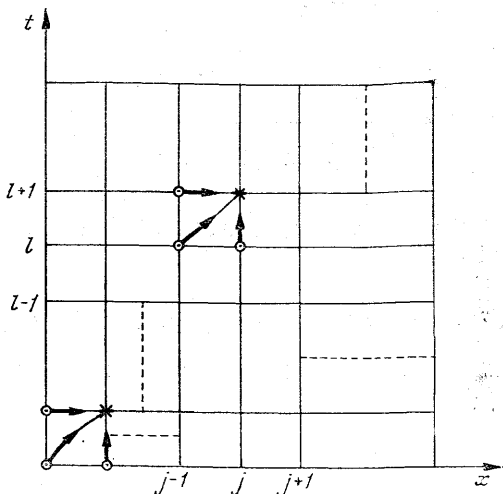


Fig. 2.8.

De asemenea tot pentru problema dată în (2.56) se mai utilizează o schemă de forma următoare :

$$\left. \begin{aligned} U_j^{l+1} - U_j^{l-1} + 2c_j U_j^l &= 0 & l = 0, 1, 2, \dots \\ U_j^0 = f_j, \quad U_0^l = 0; & & j = 1, 2, \dots; \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Aceasta este o schemă cu trei nivele.

Modul de prezentare al algoritmului de calcul în nodurile rețelei pentru schema (2.59) este dat în fig. 2.8.

2.13. Cazul în care c este o funcție de u

Problema cazului nelinier implică apariția unor probleme noi pentru analiza stabilității sau convergenței.

Se va considera ecuația momentului din dinamica gazelor :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.61)$$

care este foarte des utilizată pentru scheme cu diferențe asociate problemelor cu valori inițiale și la limită.

Dacă ecuația (2.61) se scrie în forma conservativă, se obține

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (2.62)$$

cu condiția inițială

$$u(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.63)$$

și condiția la limită

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.64)$$

Problema definită prin (2.62) cu condițiile (2.63) și (2.64) are o soluție analitică de forma

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t}. \quad (2.65)$$

Utilizînd o schemă cu patru noduri, (2.62) se poate scrie cu ajutorul diferențelor sub forma :

$$\left. \begin{aligned} U_j^{l+1} - U_j^{l-1} + \frac{\alpha}{2} [(U_{j+1}^l)^2 - (U_{j-1}^l)^2] &= 0 \\ U_j^0 &= j, \quad U_0^l = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

Algoritmul de calcul se desfășoară secvențial ca în fig. 2.9. Richtmyer și Morton [9] au analizat aspectele stabilității acestui tip de problemă.

Pentru a studia stabilitatea s-a considerat că o soluție a ecuației cu diferențe se poate scrie sub forma

$$U_j^l = A^l \sin \frac{1}{2} \pi j + B^l \sin \frac{1}{2} \pi j + C^l \cos \pi j + D. \quad (2.67)$$

Înlocuind (2.67) în (2.66) și identificând, rezultă prin recurență :

$$\begin{aligned} A^{l+1} - A^{l-1} &= 2\alpha B^l (C^l - D), \\ B^{l+1} - B^{l-1} &= 2\alpha A^l (C^l + D), \\ C^{l+1} - C^{l-1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

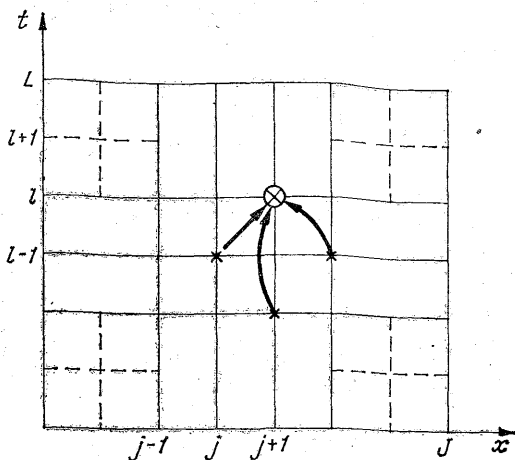


Fig. 2.9.

A treia ecuație din (2.68) arată că C^l ia numai două valori constante, să zicem P și Q , adică $C^{2l} = P$ și $C^{2l+1} = Q$. Pentru a obține o expresie numai în A , se combină primele două relații din (2.68), obținându-se o relație numai în A :

$$A^{l+2} - A^l + A^{l-2} = 4\alpha^2(P + D)(Q - D)C^l. \quad (2.69)$$

Dacă (2.69) se amplifică cu A^{-l+2} , se obține o ecuație de gradul doi în variabila A^2 :

$$A^4 - A^2 + 1 = 4\alpha^2(P + D)(Q - D)A^2$$

sau

$$A^4 - [1 - 4\alpha^2(P + D)(Q - D)]A^2 + 1 = 0. \quad (2.70) \quad \#$$

Din (2.70) se vede că toate soluțiile sînt mărginite dacă

$$-4 \leq 4\alpha^2 (P + D) (Q - D) < 1,$$

altfel va exista o soluție C^l astfel încît $|C^l|$ crește exponențial cu l , adică cu t/k . Cu aceste observații condiția de stabilitate pentru schema (2.66) devine

$$\alpha[|D| + \max(|P|, |Q|)] < 1. \quad (2.71)$$

O altă metodă de tratare numerică a problemelor neliniare este metoda liniarizării locale sau globale.

METODE CU DIFERENȚE PENTRU SISTEME DE ECUAȚII DE TIP HIPERBOLIC ȘI ECUAȚII DE TIP HIPERBOLIC DE ORDINUL AL DOILEA

3.1. Metode cu diferențe pentru sisteme de ecuații de tip hiperbolic

Presupunem că unui sistem fizic i se poate asocia un sistem de ecuații cu derivate parțiale de forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.1)$$

unde C este o matrice reală de ordinul n , iar u este un vector coloană cu n componente. Dacă problema este cu condiții inițiale, i se va asocia o schemă explicită cu diferențe, iar dacă este o problemă cu condiții inițiale și la limită, se vor construi scheme implicite.

Pentru început se consideră cazul când C are n valori proprii reale și n vectori liniar independenți. În acest caz sistemul (3.1) este hiperbolic (nu este necesar ca C să fie simetrică).

Schemele cu diferențe de tip explicit sau implicit construite în cap. 2 pentru o ecuație diferențială în care c era o constantă rămân valabile și în cazul în care C este o matrice reală constantă. Schema Lax-Wendroff pentru sistemul (3.1) va avea aceeași formă cu cea pentru ecuația (2.21), adică

$$IU_j^{l+1} = \left[I - \frac{1}{2} \alpha C (\Delta_x + \nabla_x) + \frac{1}{2} \alpha^2 C^2 (\Delta_x - \nabla_x) \right] U_j^l,$$

sau după efectuarea calculelor corespunzătoare

$$IU_j^{l+1} = \left[IU_j^l - \frac{1}{2} \alpha C (U_{j+1}^l - U_{j-1}^l) + \frac{1}{2} \alpha^2 C^2 (U_{j+1}^l - 2U_j^l + U_{j-1}^l) \right]. \quad (3.2)$$

Schema cu diferențe Wendroff în forma generală se prezintă astfel :

$$\left[I + \frac{1}{2} (I - \alpha C) \Delta_x \right] U_j^{l+1} = \left[I + \frac{1}{2} (I + \alpha C) \Delta_x \right] U_j^l,$$

sau după efectuarea calculelor corespunzătoare

$$\begin{aligned} IU_j^{l+1} + \frac{1}{2} (I - \alpha C) (U_{j+1}^{l+1} - U_j^{l+1}) = \\ = IU_j^l + \frac{1}{2} (I + \alpha C) (U_{j+1}^l - U_j^l). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Schema lui Crank-Nicolson pentru sistemul (3.1) în forma generală arată astfel :

$$\left[I - \frac{1}{4} \alpha C (\Delta_x + \nabla_x) \right] U_j^{l+1} = \left[I + \frac{1}{4} \alpha C (\Delta_x + \nabla_x) \right] U_j^l,$$

sau după efectuarea calculelor corespunzătoare se obține

$$\begin{aligned} IU_j^{l+1} - \frac{1}{4} \alpha C (U_{j+1}^{l+1} - U_{j-1}^{l+1}) = IU_j^l + \\ + \frac{1}{4} \alpha C (U_{j+1}^l - U_{j-1}^l), \end{aligned} \quad (3.4)$$

unde I este o matrice unitate de ordinul n , iar U_j^{l+1} și U_j^l reprezintă valoarea componentelor vectorului U în punctele rețelei, notate cu A și B în fig. 2.1.

Dacă problema este cu valori inițiale, se utilizează schemele explicite, iar o schemă de felul Lax-Wendroff poate furniza rezultate satisfăcătoare chiar dacă matricea C are valori proprii și pozitive și negative.

În cazul în care problema este cu valori inițiale și la limită, trebuie analizat riguros dacă este o problemă corect pusă, în sensul celor discutate în 2.1. În acest sens există trei cazuri ce trebuie luate în considerare :

C a z u l 1 : *matricea C negativ definită.* Această situație corespunde cazului scalar cînd în ecuația (2.21) avem $c > 0$. Problema va fi corect pusă dacă, de exemplu, vectorul U este dat pe domeniul ($0 \leq x \leq \infty, t = 0$) și pe ($0 < t < \infty, x = 0$) și este cerut în primul cadran $0 < x, t < \infty$. În acest caz rezultate satisfăcătoare oferă schema Wendroff dată în (3.3).

C a z u l 2 : *matricea C pozitiv definită.* Aceasta corespunde cazului scalar $c < 0$ din ecuația (2.21). Vectorul u trebuie să fie dat pe domeniul $-\infty < x \leq 0, t = 0$ și pe $0 < t < \infty, x = 0$, dacă soluția este cerută în al doilea cadran $-\infty < x < 0, 0 < t < \infty$. Pentru acest caz rezultate precise se pot obține dacă se folosește schema Wendroff dată de relația (3.3), dar în locul diferențelor la dreapta Δ să fie utilizate diferențele la stînga ∇ . Cu aceste modificări (3.2) devine

$$\left[I - \frac{1}{2} (1 + \alpha C) \nabla_x \right] U_j^{l+1} = \left[I - \frac{1}{2} (I - \alpha C) \nabla_x \right] U_j^l,$$

sau după efectuarea calculelor

$$\begin{aligned} I U_j^{l+1} - \frac{1}{2} (I + \alpha C) (U_j^{l+1} - U_{j-1}^{l+1}) = \\ = U_j^l - \frac{1}{2} (I - \alpha C) (U_j^l - U_{j-1}^l). \end{aligned} \quad (3.5)$$

C a z u l 3 : *matricea C nici pozitiv nici negativ definită.* Această situație nu are corespondent în cazul scalar.

Presupunem că matricea C are p valori proprii negative și $n - p$ pozitive. Problema este corect pusă pentru cazul considerat dacă vectorul u este considerat în domeniul $0 < x < 1, t > 0$, unde p componente ale vectorului u sînt date pe domeniul $0 < t < \infty, x = 0$, și $n - p$ componente ale vectorului u sînt date pe domeniul $0 < t < \infty, x = 1$ și vectorul u cu toate componentele sale

este cunoscut pe $0 \leq x < 1$, $t = 0$. Pentru acest caz schema lui Crank-Nicolson (3.5) oferă o precizie corespunzătoare.

Această schemă cere ca toate componentele vectorului u să fie date pe $x = 0$ și $x = 1$, $0 < t < \infty$.

Formula lui Crank-Nicolson poate fi utilizată dacă $n - p$ componente ale vectorului u sînt cunoscute pe $x = 0$ și p componente pe $x = 1$.

3.2. Stabilitatea schemelor cu diferențe pentru sisteme de ecuații de tip hiperbolic

Pentru analiza stabilității schemelor cu diferențe ale sistemelor de ecuații cu derivate parțiale se va considera ecuația undelor scrisă sub forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad c^2 = \text{const.} \quad (3.6)$$

Presupunem că se dau condițiile inițiale

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x), \quad (3.7)$$

precum și condiția de periodicitate

$$u(x, t) = g(x + L, t). \quad (3.8)$$

Dacă se consideră că u este un vector cu două componente v și w , unde $v = \partial u / \partial t$ și $w = \partial u / \partial x$, atunci ecuația (3.6) se poate scrie sub forma următoare:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.9)$$

sau sub formă matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Sistemul (3.10) se poate scrie sub forma (3.1), unde C este o matrice constantă reală de ordinul doi, iar u este un vector coloană cu două componente v și w .

Schema cu diferențe Lax-Wendroff pentru sistemul dat (3.10) este asemănătoare cu cea dată în (3.2) și arată astfel :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_j^{l+1} &= \begin{bmatrix} I - \alpha^2 C^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_j^l - \\ &- \frac{1}{2} \alpha C \begin{bmatrix} I - \alpha C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_{j+1}^l + \frac{1}{2} \alpha C \begin{bmatrix} I + \alpha C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_{j-1}^l. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pentru a găsi matricea de amplificare a schemei cu diferențe (3.10) se înlocuiește U_j^l prin expresia $U_0 G^l e^{i\beta j h}$, unde U_0 este un vector constant iar G este matrice de amplificare. După înlocuire și simplificările corespunzătoare se obține expresia lui G :

$$\begin{aligned} G &= [I - \alpha^2 C^2] - \frac{1}{2} \alpha C [I - \alpha C] e^{i\beta h} + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha C [I + \alpha C] e^{-i\beta h} \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} G &= I - \alpha^2 C^2 - \frac{1}{2} \alpha C (e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) + \\ &\oplus \frac{1}{2} \alpha^2 C^2 (e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}). \end{aligned}$$

Înlocuind parantezele prin $\sin \beta h$ și $\cos \beta h$, rezultă

$$G = I - \alpha^2 C^2 - i\alpha C \sin \beta h + \alpha^2 C^2 \cos \beta h$$

sau

$$G = I - 2\alpha^2 C^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - i\alpha C \sin \beta h. \quad (3.12)$$

Într-o manieră similară se găsește matricea de amplificare G pentru schema cu diferențe Wendroff (3.3). Această matrice are următoarea expresie :

$$G = \left[\left(I + \alpha C \operatorname{tg} \frac{\beta h}{2} \right) + i \left(I - \alpha C \right) \operatorname{tg} \frac{\beta h}{2} \right]^{-1} \times \\ \times \left[\left(I - \alpha C \operatorname{tg}^2 \frac{\beta h}{2} \right) + i \left(I + \alpha C \right) \operatorname{tg} \frac{\beta h}{2} \right]. \quad (3.13)$$

Matricea de amplificare pentru schema cu diferențe Crank-Nicolson (3.4) are următoarea expresie :

$$G = \left[I - \frac{1}{2} i \alpha C \sin \beta h \right]^{-1} \left[I + \frac{1}{2} i \alpha C \sin \beta h \right]. \quad (3.14)$$

Richtmyer și Morton [9] prezintă o serie de metode privind analiza stabilității, arătând că după von Neumann, condiția necesară pentru stabilitate a schemelor cu diferențe prezentate în cap. 2 este ca

$$\max_i |\mu_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.15)$$

unde μ_i sînt valorile proprii ale matricei G . Condiția (3.15) este satisfăcută pentru schema Lax-Wendroff, dacă

$$|\alpha \beta_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.16)$$

unde β_i sînt valorile proprii ale matricei C . Schemele implicite cu diferențe Wendroff și Crank-Nicolson sînt necondiționat stabile fără a pune condiții pentru α , care este raportul dintre parametrii k și h ai rețelei.

Condiția (3.15) este suficientă, dacă C este simetrică, sau numai dacă C are valori proprii reale și un sistem complet de vectori proprii.

Cînd matricea C este constantă, avînd un sistem de valori proprii reale și un sistem de vectori proprii liniar independenți, lucru ce dealtfel definește și hiperbolicitatea sistemului (3.1), stabilitatea schemei Lax-Wendroff se poate analiza astfel :

Matricea de amplificare G dată în (3.12) este o funcție rațională de matricea C și atunci vectorii proprii ai lui G sînt aceiași cu ai lui C . În [11] Varga arată că acești vectori proprii sînt independenți de $\gamma = \beta h$ și de $\alpha = \frac{k}{h}$, iar condiția von Neumann este atît suficientă, cît și necesară pentru stabilitate.

Dacă λ este o valoare proprie a lui C , atunci valoarea proprie corespunzătoare lui G este

$$\beta = 1 - i\lambda\alpha\sin\gamma - (\lambda\alpha)^2(1 - \cos\gamma).$$

Cînd γ ia toate valorile de la 0 la 2π , β descrie o elipsă în planul complex, și din calcule rezultă că această elipsă se află în interiorul cercului unitate, dacă $|\lambda|\alpha < 1$.

Pentru realizarea stabilității această ultimă condiție trebuie satisfăcută pentru orice valoare proprie λ a lui C . Se observă că elipsa are două puncte de contact cu cercul unitate în $\beta = 1$, adică ea are aceeași curbură în acel punct. Acest lucru semnifică o precizie de ordinul doi pentru schema cu diferențe Lax-Wendroff și că sistemul de ecuații cu diferențe este nedisipativ, adică conservă amplitudinea fiecărei componente Fourier a soluției pentru cazul în care C este o matrice constantă.

Dacă se calculează modulul lui β , rezultă

$$|\beta|^2 = 1 - 4|\lambda|^2\alpha^2(1 - |\lambda|^2\alpha^2)\sin^4\frac{\gamma}{2},$$

asa că schema cu diferențe este disipativă de ordinul patru în sensul lui Kreiss cînd

$$0 < |\lambda|\alpha < 1.$$

În cazul în care funcția $u(x, t)$ este continuă, sistemul (3.9) se poate discretiza sub forma unei scheme explicite :

$$V_j^{l-1} - V_j^l = \frac{k}{2h} c (W_{j+1}^l - W_{j-1}^l),$$

$$W_j^{l+1} - W_j^l = \frac{k}{2h} (V_{j+1}^l - V_{j-1}^l). \quad (3.17)$$

Această schemă este instabilă [9].

Presupunând că o soluție a fost calculată pe o linie a rețelei deasupra liniei inițiale, se poate schimba operatorul de discretizare în direcția timpului, obținându-se schema

$$V_j^{l+1} - V_j^{l-1} = \frac{2k}{2h} c (W_{j+1}^l - W_{j-1}^l),$$

$$(3.18)$$

$$W_j^{l+1} - W_j^{l-1} = \frac{2k}{2h} c (V_{j+1}^l - V_{j-1}^l).$$

Schema lui Courant pentru sistemul (3.9) arată astfel :

$$V_j^{l+1} - V_j^l = \frac{k}{h} c (W_{j+1/2}^l - W_{j-1/2}^l),$$

$$(3.19)$$

$$W_{j-1/2}^{l+1} - W_{j-1/2}^l = \frac{k}{h} c (V_j^{l+1} - V_{j-1}^{l+1}).$$

Această schemă este echivalentă cu schema cu diferențe asociată ecuației de ordinul doi (3.6) :

$$U_j^{l+1} - 2U_j^l + U_j^{l-1} = c^2 \frac{k^2}{h^2} (U_{j+1}^l - 2U_j^l + U_{j-1}^l), \quad (3.20)$$

dacă se face substituția

$$V_j^l = (U_j^l - U_{j-1}^{l-1})/k \text{ și } V_{j-1/2}^l = c (U_j^l - U_{j-1}^l). \quad (3.21)$$

Schema (3.19) a servit ca prim model prin care Courant, Friedrichs și Lewy a încercat să definească noțiunea de stabilitate în anul 1928.

Matricea de amplificare G pentru schema (3.19) este de forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & i 2 c \frac{k}{h} \sin \frac{\beta h}{2} \\ i 2 c \frac{k}{h} \sin \frac{\beta h}{2} & 1 - 2 c \frac{k}{h} \sin \frac{\beta h}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Ecuția caracteristică a matricei G este de forma

$$\lambda^2 - \lambda \left[2 - \left(2 c \frac{k}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right] + 1 = 0. \quad (3.23)$$

Din analiza ecuației (3.23) se vede că dacă $\left(2 c \frac{k}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \leq 4$, atunci ambele rădăcini au valoare absolută egală cu 1, de unde rezultă condiția von Neumann ca

$$c \frac{k}{h} < 1.$$

O condiție suficientă pentru stabilitate a fost dată în [9]. Dacă v_1 și v_2 sînt vectori proprii corespunzători valorilor proprii λ_1 și λ_2 , s-a găsit că $|\det(v_1, v_2)|$ este mărginit pentru orice β și deci schema (3.19) este stabilă dacă $ck/h < 1$. Pentru $ck/h = 1$ schema (3.19) este instabilă. Dacă în (3.19) valorile lui V_j^l și W_j^l se înlocuiesc prin expresiile

$$V_j^l = \frac{1}{2} (V_{j+1}^l + V_{j-1}^l), \quad W_j^l = \frac{1}{2} (W_{j+1}^l + W_{j-1}^l), \quad (3.24)$$

atunci se obține o altă schemă cu diferențe sub forma

$$V_j^{l+1} - \frac{1}{2}(V_{j+1}^l + V_{j-1}^l) = \frac{k}{2h} c (W_{j+1}^l - W_{j-1}^l),$$

$$W_j^{l+1} - \frac{1}{2}(W_{j+1}^l + W_{j-1}^l) = \frac{k}{2h} c (V_{j+1}^l - V_{j-1}^l). \quad (3.25)$$

O altă schemă cu diferențe pentru (3.9) dată în [12] este următoarea :

$$V_j^{l+1} - V_j^l = \frac{k}{2h} (W_{j+1}^l - W_{j-1}^l),$$

$$W_j^{l+1} - W_j^l = \frac{k}{2h} c (V_{j+1}^{l+1} - V_{j-1}^{l+1}),$$
(3.26)

care de asemenea este o schemă explicită.

Din [9] rezultă că :

- schema (3.17) este totdeauna instabilă ;
- schema (3.18) este stabilă pentru $ck/h \leq 1$;
- schema (3.19) este stabilă, dacă $ck/h \leq 1$;
- schema (3.26) este stabilă pentru $ck/h \leq 2$.

Convergența schemelor cu diferențe este de obicei garantată, dacă domeniul determinat de schema cu diferențe se găsește complet în interiorul domeniului determinat de sistemul de ecuații diferențiale.

3.3. Sisteme de ecuații diferențiale cu matricea C variabilă

Se vor considera trei cazuri mai importante.

— Matricea C este funcție numai de x . Pentru acest caz schema cu diferențe Lax-Wendroff de ordinul doi de precizie se poate scrie în felul următor :

$$U_j^{l+1} = \left[I + \frac{1}{2} \alpha C (\Delta_x + \nabla_x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \alpha (C \Delta_x C \nabla_x + C \nabla_x C \Delta_x) \right] U_j^l \quad (3.27)$$

Schema cu diferențe Wendroff pentru acest caz se va prezenta astfel :

$$\begin{aligned} & \left[I + \frac{1}{2} (I - \alpha C_{j+1/2}) \Delta_x \right] U_j^{l+1} = \\ & = \left[I + \frac{1}{2} (I + \alpha C_{j+1/2}) \Delta_x \right] U_j^l. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Schema cu diferențe Crank-Nicolson pentru ordinul doi de precizie are forma

$$\begin{aligned} & \left[I - \frac{1}{4} \alpha C (\Delta_x + \nabla_x) \right] U_j^{l+1} = \\ & = \left[I + \frac{1}{4} \alpha C (\Delta_x + \nabla_x) \right] U_j^l, \end{aligned} \quad (3.29)$$

unde I este o matrice unitate, iar $C_{j+1/2}$ înseamnă că matricea C va fi calculată în $x = (j + 1/2)h$.

— *Matricea C este funcție de x și de t . În acest caz [10] se indică următoarele scheme ce au ordinul doi de precizie :*

1° schema cu diferențe Lax-Wendroff :

$$\begin{aligned} U_j^{l+1} = & \left[I + \frac{1}{2} \alpha C_j^{l+1/2} (\Delta_x + \nabla_x) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \alpha^2 (C_j^{l+1/2} \Delta_x C_j^{l+1/2} \nabla_x + C_j^{l+1/2} \nabla_x C_j^{l+1/2} \Delta_x) \right] U_j^l; \end{aligned} \quad (3.30)$$

2° schema cu diferențe Wendroff :

$$\begin{aligned} & \left[I + \frac{1}{2} (I - \alpha C_{j+1/2}^{l+1/2}) \Delta_x \right] U_j^{l+1} = \\ & = \left[I + \frac{1}{2} (I + \alpha C_{j+1/2}^{l+1/2}) \Delta_x \right] U_j^l; \end{aligned} \quad (3.31)$$

3° schema cu diferențe Crank-Nicolson :

$$\begin{aligned} \left[I - \frac{1}{4} C_j^{l+1/2} (\Delta_x + \nabla_x) \right] U_j^{l+1} = \\ = \left[I + \frac{1}{4} \alpha C_j^{l+1/2} (\Delta_x + \nabla_x) \right] U_j^l, \end{aligned} \quad (3.32)$$

unde prin $C_j^{l+1/2}$ se înțelege evaluarea matricei C în punctul $(jh, (l + 1/2)k)$ și prin $C_{j+1/2}^{l+1/2}$ se înțelege evaluarea matricei C în punctul din rețea $((j + 1/2)h, (l + 1/2)k)$, I fiind matricea unitate.

— *Matricea C este o funcție de u .* În acest caz sistemul este hiperbolic neliniar. Problemele referitoare la dinamica gazului într-o variabilă spațială conduc la astfel de sisteme neliniare.

Ecuatiile diferențiale cu derivate parțiale ce modelează mișcarea gazului neglijând viscozitatea sînt bazate pe conservarea masei (ecuații cantitative), conservarea momentului (ecuațiile de moment), conservarea energiei (ecuațiile de energie) și conduc la o formă conservativă. Aceste trei tipuri de ecuații împreună cu condițiile auxiliare determină, din punct de vedere matematic, starea gazului. Curgerile gazului sînt adesea caracterizate prin discontinuități interne, adică pot apărea șocuri în timpul curgerii. Interacțiunea șocurilor poate avea ca efect apariția unor discontinuități ce separă diverse regiuni ale aceluiași fluid în stări termodinamice diferite.

În acest paragraf se vor prezenta o serie de elemente pentru metodele cu diferențe utilizate în calculul curgerii continue.

Ecuatiile care modelează matematic mișcarea unui lichid (gaz) pot fi exprimate în diverse moduri, însă două metode se bucură de o mai mare utilizare: metoda lui Euler și metoda lui Lagrange. Aceste două metode sînt echivalente, dar au avantaje și dezavantaje proprii.

Pentru o concretizare se va considera ecuația curgerii compresibile într-o dimensiune, scrisă în formă conservativă. Pentru acest lucru se introduc următoarele mărimi :

- x, t — coordonatele punctului,
- ρ — masa pe unitate de volum,
- v — viteza în direcția Ox ,

$m = \rho v$ — momentul pe unitatea de volum,
 p — presiunea,
 γ — raportul căldurilor specifice,
 $e = 1/2 \rho v^2 + p/(\gamma - 1)$ — energia pe unitatea de volum.
 Ecuația ce modelează fenomenul de conservare a masei energiei și a momentului pe unitatea de volum este de forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial G(u)}{\partial x} = 0, \quad (3.33)$$

unde u și $G(u)$ sînt doi vectori

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ e \\ m \end{pmatrix}; \quad G(u) = \begin{pmatrix} -m \\ -\frac{\gamma e m}{\rho} + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{m^3}{\rho^2} \\ -(\gamma - 1)e + \frac{1}{2}(\gamma - 3)\frac{m^2}{\rho} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Dacă vectorul $G(U)$ este vector coloană cu trei componente g_1, g_2, g_3 , atunci deoarece fiecare componentă este funcție de u și u are trei componente ρ, e și m , care la rîndul lor sînt funcții de x și de t , putem scrie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x} &= \frac{\partial g_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial x}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} &= \frac{\partial g_2}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial x}, \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} &= \frac{\partial g_3}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial g_3}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial g_3}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dacă (3.35) se scrie sub formă matriceală, avem

$$\frac{\partial G(u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \rho} & \frac{\partial g_1}{\partial e} & \frac{\partial g_1}{\partial m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \rho} & \frac{\partial g_2}{\partial e} & \frac{\partial g_2}{\partial m} \\ \frac{\partial g_3}{\partial \rho} & \frac{\partial g_3}{\partial e} & \frac{\partial g_3}{\partial m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial m}{\partial x} \end{bmatrix} \equiv \frac{\partial (g_1, g_2, g_3)}{\partial (\rho, e, m)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \equiv C(U) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

sau

$$\frac{\partial G(u)}{\partial x} = C(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.36)$$

unde $C(U)$ este jacobianul lui G în raport cu u , iar

$$g_1 = -m, g_2 = -\frac{\gamma em}{\rho} + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{m^3}{\rho^2}$$

și

$$g_3 = -(\gamma - 1)e + \frac{1}{2}(\gamma - 3)\frac{m^2}{\rho}.$$

Pentru $G(u)$ dat în (3.34) jacobianul său $C(u)$ este

$$C(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{em}{\rho^2}(\gamma - 1)\frac{m^3}{3} & -\gamma\frac{m}{\rho} & -\gamma\frac{e}{\rho} + \frac{3}{2}(\gamma - 1)\frac{m^2}{\rho^2} \\ -\frac{1}{2}(\gamma - 3)\frac{m^2}{\rho^2} & -(\gamma - 1) & (\gamma - 3)\frac{m}{\rho} \end{pmatrix};$$

Din cele prezentate rezultă că sistemul (3.33) poate fi scris sub forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - C(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.37)$$

unde C este o matrice funcție de vectorul u .

Pentru tratarea numerică a sistemului (3.33) sau (3.37) se folosește dezvoltarea în serie Taylor a vectorului u în direcția lui t , obținându-se

$$U_j^{l+1} = u_j^l + k \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^l + \frac{k^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^l + \dots \quad (3.38)$$

Renunțând la termenii din dezvoltare superiori ordinului doi, (3.38) devine

$$U_j^{l+1} \approx U_j^l + k \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^l + \frac{k^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^l, \quad (3.39)$$

dar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial G(u)}{\partial x} = C(u) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.40)$$

și

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial G(u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(u)}{\partial t} \right),$$

însă din (3.36) și (3.33) rezultă că

$$\frac{\partial G(u)}{\partial t} = C(U) \frac{\partial u}{\partial t} = C(U) \frac{\partial G(u)}{\partial x} = C^2(u) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Din aceste calcule se vede că derivata de ordinul doi în raport cu t din dezvoltarea (3.39) se poate exprima astfel :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C(u) \frac{\partial G(u)}{\partial x} \right); \quad (3.41)$$

Utilizînd (3.40) și (3.41), relația (3.29) devine

$$U_j^{l+1} = U_j^l + k \left(\frac{\partial G(u)}{\partial x} \right)_j^l + \frac{k^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C(u) \frac{\partial G(u)}{\partial x} \right) \right]_j^l, \quad (3.42)$$

unde $C(u)$ este jacobianul lui $G(u)$ în raport cu u .

Schema lui Lax-Wendroff în forma conservativă asociată lui (3.42) va fi

$$U_j^{l+1} = U_j^l + \frac{1}{2} \alpha (G_{j+1}^l - G_{j-1}^l) + \frac{1}{2} \alpha^2 [C_{j+1/2}^l (G_{j+1}^l - G_j^l) - C_{j-1/2}^l (G_j^l - G_{j-1}^l)], \quad (3.43)$$

unde pentru termenul din parantezele drepte în (3.42) au fost utilizate diferențele centrate.

În dorința de a nu se face apel la alte puncte din domeniul rețelei decât nodurile propriu-zise se pot face înlocuirile

$$C_{j+1/2}^l = \frac{1}{2} (C_{j+1}^l + C_j^l) \text{ și } C_{j-1/2}^l = \frac{1}{2} (C_j^l + C_{j-1}^l). \quad (3.44)$$

Utilizînd (3.44) în (3.43), se obține schema Lax-Wendroff sub forma

$$U_j^{l+1} = U_j^l + \frac{1}{2} \alpha (G_{j+1}^l - G_{j-1}^l) + \frac{1}{2} \alpha^2 \left[\frac{1}{2} (C_{j+1}^l + C_j^l) (G_{j+1}^l - G_j^l) - \frac{1}{2} (C_j^l + C_{j-1}^l) (G_j^l - G_{j-1}^l) \right]. \quad (3.45)$$

Dacă se introduc notațiile

$$A_j^l = \frac{1}{2} (C_{j+1}^l + C_j^l) (G_{j+1}^l - G_j^l),$$

$$A_{j-1}^l = \frac{1}{2} (C_j^l + C_{j-1}^l) (G_j^l - G_{j-1}^l), \quad (3.46)$$

atunci (3.45) devine

$$U_j^{l+1} = U_j^l + \frac{1}{2} \alpha (G_{j+1}^l - G_{j-1}^l) + \frac{1}{2} \alpha^2 (A_j^l - A_{j-1}^l). \quad (3.47)$$

Schema (3.47) are același ordin de precizie ca și (3.43), unde au avut loc primele înlocuiri.

Schema Lax-Wendroff dată în (3.47) a fost scrisă de Richtmyer ca o schemă cu diferențe în doi pași sub forma

$$U_j^{l+1} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^l + U_{j-1}^l) + \frac{1}{2} \alpha (G_{j+1}^l - G_{j-1}^l),$$

$$U_j^{l+1} = U_j^l + \frac{1}{2} \alpha (\bar{G}_{j+1}^{l+1} - \bar{G}_{j-1}^{l+1}). \quad (3.48)$$

În această schemă se calculează o valoare intermediară a vectorului u cu ajutorul primei relații sau în primul pas, iar valoarea finală îmbunătățită a lui u calculată cu a doua relație în nodul rețelei $(jh, (l+1)k)$ se face folosind în calculul lui G valorile lui \bar{u} calculate cu prima relație din (3.52).

Schema lui Lax-Wendroff pentru sistemul (3.37) sau (3.33) în oricare din formele ei este stabilă [9], dacă este îndeplinită relația

$$|\lambda|\alpha \leq 1, \quad (3.49)$$

unde λ este oricare din valorile proprii ale matricei $C(u)$, iar α este parametrul rețelei, $\alpha = k/h$.

3.4. Sisteme de ecuații de tip hiperbolic de ordinul întâi în plan

Forma generală a unui astfel de sistem se poate prezenta astfel :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M \frac{\partial u}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.50)$$

unde M și N sînt două matrice simetrice reale, iar u este un vector coloană cu n componente.

Simetria lui M și N este suficientă pentru a garanta că sistemul dat în (3.50) este hiperbolic.

În fig. 3.1 este prezentată rețeaua folosită pentru schema Lax-Wendroff. Această rețea este construită pe domeniul $-\infty < x, y < +\infty$, $t \geq 0$ prin drepte paralele cu axele x, y și t .

Rețeaua în spațiu are parametrii : h pentru axa x și

y și k pentru axa t . Un punct al rețelei dat de coordonatele (x, y, t) poate fi definit astfel : $x = jh$, $y = nn$, $t = lk$, unde j, n, l sînt numere întregi.

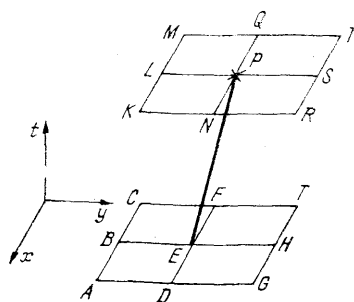


Fig. 3.1.

În mod asemănător ca la sistemele hiperbolice cu o singură dimensiune spațială sistemul (3.50) completat cu valorile inițiale $u = u(x, y)$ date pe planul Oxy , $t = 0$, poate conduce la o schemă explicită de discretizare. Schema de discretizare larg utilizată [10] pentru astfel de sisteme este schema explicită Lax-Wendroff :

$$\left. \begin{aligned}
 U_{j,n}^{l+1} = & \left[I + \frac{1}{2} \alpha M (\Delta_x + \nabla_x) + \frac{1}{2} \alpha N (\Delta_y + \nabla_y) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \alpha^2 M^2 \Delta_x \nabla_x + \frac{1}{2} \alpha^2 N^2 \Delta_y \nabla_y + \\
 & \left. + \frac{1}{8} \alpha^2 (MN + NM) (\Delta_x + \nabla_x) (\Delta_y + \nabla_y) \right] U_{j,n}^l \\
 U_{j,n}^0 = & U_{j,n} \text{ pentru } j=1, 2, \dots, J, n=1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

Această schemă permite calculul vectorului u în punctul $P(jh, nh, (l+1)k)$ al rețelei cu ajutorul valorilor vectorului, date prin condițiile inițiale în punctele A, B, C, D, E, F, G, H și J .

După o serie de calcule în (3.51) se obține o expresie de forma

$$\begin{aligned}
 U_{j,n}^{l+1} = & [I - \alpha^2(M + N)] U_{j,n}^l + \frac{1}{2} \alpha M (I + \alpha M) U_{j,n+1}^l - \\
 & - \frac{1}{2} \alpha M (I - \alpha M) U_{j,n-1}^l + \frac{1}{2} \alpha N (I + \alpha N) U_{j+1,n}^l - \\
 & - \frac{1}{2} \alpha N (I - \alpha N) U_{j-1,n}^l + \frac{1}{2} \alpha^2 (MN + NM) \cdot (U_{j+1,n+1}^l - \\
 & - U_{j-1,n+1}^l - U_{j+1,n-1}^l - U_{j-1,n-1}^l).
 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Pentru studiul stabilității se calculează matricea de amplificare G a schemei după algoritmul prezentat în 2.2 :

$$G = \left[I - \alpha^2 \left\{ M^2(1 - \cos\beta h) + N^2(1 - \cos\gamma h) + \frac{1}{2} (MN + NM) \sin\beta h \sin\gamma h \right\} \right] + i\alpha(M\sin\beta h + N\sin\gamma h) \quad (3.53)$$

unde β și h sînt două numere arbitrare reale.

Studiul stabilității sistemelor de ecuații cu derivate parțiale de tip hiperbolic este foarte greu chiar și atunci cînd matricele M și N sînt constante și comutative față de operația de înmulțire. În acest caz schema Lax-Wendroff este stabilă [13], dacă este satisfăcută condiția

$$\alpha |\lambda_m| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad (3.54)$$

unde

$$|\lambda_m| = \max_{M,N} [|\lambda_M|, |\lambda_N|], \quad (3.55)$$

λ_M fiind valorile proprii ale matricei M și λ_N ale matricei N :

$$|M - \lambda_M I| = 0, \quad |N - \lambda_N I| = 0.$$

Acest rezultat este obținut utilizînd o condiție de suficiență a stabilității schemei cu diferențe

$$\|G^*G\| \leq 1 + o(k), \quad (3.56)$$

unde $\|\cdot\|$ reprezintă norma în L_2 și G^* este transpusa complex conjugată a lui G . Condiția (3.56) este o condiție necesară. Condiția de stabilitate (3.54) este mai restrictivă față de cea a lui Courant-Friedrichs-Lewy

$$\alpha |\lambda_m| \leq 1. \quad (3.57)$$

Strang [14] și Gourlay [15] arată ce modificări trebuie aduse schemei Lax-Wendroff astfel ca condiția de stabilitate să fie cea din (3.57). Stabilitatea poate fi îmbunătățită cu ajutorul schemelor implicite, dar asemenea scheme pentru una sau două variabile spațiale conduc la un sistem de ecuații matriceale, care uneori este foarte greu de soluționat practic. În continuare se vor prezenta două metode implicite necondiționat stabile ce conduc la metode simple de rezolvare.

Metoda Gourlay și Mitchell în opt noduri ale rețelei conduce la schema

$$\begin{aligned} & \left[I + \frac{1}{2} (I - \alpha N) \Delta_y \right] \left[I + \frac{1}{2} (I - \alpha M) \Delta_x \right] U_{j,n}^{l+1} = \\ & = \left[I + \frac{1}{2} (I + \alpha N) \Delta_y \right] \left[I + \frac{1}{2} (I + \alpha M) \Delta_x \right] U_{j,n}^l. \quad (3.58) \end{aligned}$$

Această schemă implicită este de ordinul doi de precizie (lucru ce se poate verifica cu ajutorul dezvoltării în serie

Taylor). În fig. 3.2, dacă A (jh, nh, lk) și E ($(jh, nh, (l+1)k$) sînt două puncte ale rețelei, atunci relația (3.58) implică opt puncte ale rețelei A, B, C, D, E, F, G și H .

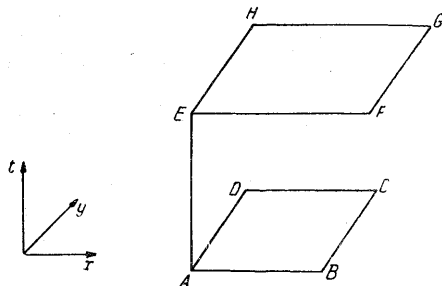


Fig. 3.2.

Schema (3.58) se poate utiliza și în formă explicită :

$$\begin{aligned} U_{j+1,n+1}^{l+1} = & U_{j,n}^l + (I - \alpha M)^{-1} (I + \alpha M) (U_{j+1,n}^l - U_{j,n+1}^{l+1}) + \\ & + (I - \alpha M)^{-1} (I - \alpha N)^{-1} (I + \alpha N) [(I - \alpha M) (U_{j,n+1}^l - U_{j+1,n}^{l+1}) + \\ & + (I + \alpha M) (U_{j+1,n+1}^l - U_{j,n}^{l+1})]. \quad (3.59) \end{aligned}$$

Această problemă este corect pusă, dacă matricele M și N sînt negativ definite.

Schema implicită (3.59) se poate scrie în două nivele după Douglas-Rachford :

$$\left. \begin{aligned} \left[I + \frac{1}{2} (I - \alpha N) \Delta_y \right] \bar{U}^{l+1} &= \left[I + \frac{1}{2} (I + \right. \\ &\quad \left. + \alpha M) \Delta_x \right] U^l \\ \left[(I - \alpha N) \left(I + \frac{1}{2} (I - \alpha M) \right) \Delta_x \right] U^{l+1} &= \\ = -2\alpha N \bar{U}^{l+1} + (I + \alpha N) \left[I + \frac{1}{2} (I + \alpha M) \Delta_x \right] U^l & \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

sau după Peaceman-Rachford

$$\left. \begin{aligned} \left[I + \frac{1}{2} (I - \alpha N) \Delta_y \right] \bar{U}^{l+1} &= \left[I + \frac{1}{2} (I + \alpha M) \Delta_x \right] U^l \\ \left[I + \frac{1}{2} (I - \alpha M) \Delta_x \right] U^{l+1} &= \left[I + \frac{1}{2} (I + \alpha N) \Delta_y \right] \bar{U}^{l+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

iar în a treia variantă după Diakonov în forma

$$\left. \begin{aligned} \left[I + \frac{1}{2} (I - \alpha N) \Delta_y \right] \bar{U}^{l+1} &= \left[I + \frac{1}{2} (I + \right. \\ &\quad \left. + \alpha N) \Delta_y \right] \left[I + \frac{1}{2} (I + \alpha M) \Delta_x \right] U^l \\ \left[I + \frac{1}{2} (I - \alpha M) \Delta_x \right] U^{l+1} &= \bar{U}^{l+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

unde \bar{U}^{l+1} este o valoare intermediară. Dacă se elimină \bar{U}^{l+1} din relațiile (3.60), (3.61) și (3.62), se obține relația (3.59).

În cazul în care schema lui Crank-Nicolson se extinde de la sistemul hiperbolic cu o singură variabilă spațială la sistemul hiperbolic cu două variabile spațiale, se obține schema Gourlay și Mitchell cu optsprezece puncte.

Extensia schemei Crank-Nicolson la două dimensiuni spațiale conduce la schema

$$\begin{aligned} & \left[I - \frac{1}{4} \alpha N(\Delta_y + \nabla_y) \right] \left[I - \frac{1}{4} \alpha M(\Delta_x + \nabla_x) \right] U^{l+1} = \\ & = \left[I + \frac{1}{4} \alpha N(\Delta_y + \nabla_y) \right] \left[I + \frac{1}{4} \alpha M(\Delta_x + \nabla_x) \right] U^l. \quad (3.63) \end{aligned}$$

Această schemă are ordinul doi de precizie și solicită nouă puncte din rețea la fiecare nivel de timp lk și $(l+1)k$, în total 18 puncte ale rețelei.

Schema (3.63) poate fi scrisă ca o schemă în doi pași sub forma Douglas-Rachford astfel :

$$\left. \begin{aligned} & \left[I - \frac{1}{4} \alpha M(\Delta_y + \nabla_y) \right] \bar{U}^{l+1} = \\ & = \left[I + \frac{1}{4} \alpha M(\Delta_x + \nabla_x) \right] U^l \\ & \left[I - \frac{1}{4} \alpha M(\Delta_x + \nabla_x) \right] U^{l+1} = 2\bar{U}^{l+1} - \\ & - \left[I + \frac{1}{4} \alpha M(\Delta_x + \nabla_x) \right] U^l \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

Peaceman-Rachford :

$$\left. \begin{aligned} & \left[I - \frac{1}{4} \alpha N(\Delta_y + \nabla_y) \right] \bar{U}^{l+1} = \\ & = \left[I + \frac{1}{4} \alpha M(\Delta_x + \nabla_x) \right] U^l \\ & \left[I - \frac{1}{4} \alpha M(\Delta_x + \nabla_x) \right] U^{l+1} = \\ & = \left[I + \frac{1}{4} \alpha N(\Delta_y + \nabla_y) \right] \bar{U}^{l+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Diakonov :

$$\left. \begin{aligned} \left[I - \frac{1}{4} \alpha N (\Delta_y + \nabla_y) \right] \bar{U}^{l+1} &= \left[I + \frac{1}{4} \alpha N (\Delta_y + \right. \\ &\quad \left. + \nabla_y) \right] \left[I + \frac{1}{4} \alpha M (\Delta_x + \nabla_x) \right] U^l \\ \left[I - \frac{1}{4} \alpha M (\Delta_x + \nabla_x) \right] U^{l+1} &= \bar{U}^{l+1} \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

unde \bar{U}^{l+1} este o valoare intermediară.

Dacă matricele M și N sînt variabile și depind de x, y, t , schema Lax-Wendroff se poate scrie astfel :

$$\begin{aligned} U_{j,n}^{l+1} &= \left[I + \frac{1}{2} \alpha M_{j,n}^{l+1/2} (\Delta_x + \nabla_x) + \frac{1}{2} \alpha N_{j,n}^{l+1/2} (\Delta_y + \nabla_y) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \alpha^2 (M_{j,n}^{l+1/2} \Delta_x M_{j,n}^{l+1/2} \nabla_x + M_{j,n}^{l+1/2} \nabla_x M_{j,n}^{l+1/2} \Delta_x) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \alpha^2 (N_{j,n}^{l+1/2} \Delta_y N_{j,n}^{l+1/2} \nabla_y + N_{j,n}^{l+1/2} \nabla_y N_{j,n}^{l+1/2} \Delta_y) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \alpha^2 (M_{j,n}^{l+1/2} N_{j,n}^{l+1/2} + N_{j,n}^{l+1/2} M_{j,n}^{l+1/2}) (\Delta_x + \nabla_x) (\Delta_y + \nabla_y) \right] U_{j,n}^l, \end{aligned} \quad (3.67)$$

iar schemele cu diferențe (3.58) și (3.63) devin

$$\begin{aligned} &\left[I + \frac{1}{4} (I - \alpha M_{j+1/2, n+1/2}^{l+1/2} \Delta_y) \right] \left[I + \frac{1}{2} (I - \right. \\ &\quad \left. - \alpha N_{j+1/2, n+1/2}^{l+1/2} \Delta_x) \right] U_{j,n}^{l+1} = \\ &= \left[I + \frac{1}{2} (I + \alpha M_{j+1/2, n+1/2}^{l+1/2} \Delta_y) \right] \left[I + \frac{1}{2} (I + \right. \\ &\quad \left. + \alpha N_{j+1/2, n+1/2}^{l+1/2} \Delta_x) \right] U_{j,n}^l, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} & \left[I - \frac{1}{4} \alpha N_{j,n}^{l+1/2} (\Delta_y + \nabla_y) \right] \left[I - \frac{1}{4} \alpha M_{j,n}^{l+1/2} (\Delta_x + \nabla_x) \right] U_{j,n}^{l+1} = \\ & = \left[I + \frac{1}{4} \alpha N_{j,n}^{l+1/2} (\Delta_y + \nabla_y) \right] \left[I + \frac{1}{4} \alpha M_{j,n}^{l+1/2} (\Delta_x + \nabla_x) \right] U_{j,n}^l. \end{aligned}$$

Aceste scheme au toate ordinul doi de precizie.

3.5. Metode cu diferențe pentru ecuații de tip hiperbolic de ordinul doi

Forma generală a unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi este

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} + e \frac{\partial u}{\partial x} + fu = g, \quad (3.68)$$

unde coeficienții a, b, c, \dots, g sînt funcții de variabile independente x și t . Ecuația este de tip hiperbolic, dacă $b^2 - ac > 0$.

Cea mai simplă formă de ecuație hiperbolică de ordinul doi este ecuația undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (3.69)$$

Soluția analitică a ecuației (3.69) este de forma

$$u = F(x + t) + G(x - t),$$

unde F și G sînt funcții de clasă C^2 .

Problema Cauchy cu valori inițiale constă din ecuația (3.69) și condițiile inițiale

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.70)$$

Soluția acestei probleme este de forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x + t) + f(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} g(\zeta) d\zeta \right].$$

Metoda cea mai eficientă pentru tratarea numerică a ecuațiilor de tip hiperbolic de ordinul doi în două variabile independente x și t este [9] metoda caracteristicilor. Este necesar a se considera metoda diferențelor finite pentru studiile ce pot da rezultate în rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul doi în cazul a două sau trei dimensiuni spațiale, unde metoda caracteristicilor nu mai este atât de satisfăcătoare.

Schemă explicită cu diferențe. Dacă se consideră problema Cauchy (3.69) și (3.70) cu o rețea rectangulară de parametrii h și k cu $\alpha = k/h$, ecuația (3.69) se poate scrie cu ajutorul operatorilor diferență astfel :

$$\frac{1}{k^2} (U_j^{l+1} - U_j^l + U_j^{l-1}) - \frac{1}{h^2} (U_{j+1}^l - 2U_j^l + U_{j-1}^l) = 0$$

sau în formă explicită

$$U_j^{l+1} = 2(1 - \alpha^2)U_j^l + \alpha^2(U_{j+1}^l + U_{j-1}^l) - U_j^{l-1}. \quad (3.71)$$

Pentru evaluarea erorii de trunchiere se consideră dezvoltarea în serie Taylor a lui (3.71) în punctul (jh, lk) obținându-se următoarea expresie :

$$k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{12} k^2 h^2 (\alpha^2 - 1) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \\ + \frac{1}{360} k^2 h^4 (\alpha^2 - 1) \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \dots = 0. \quad (3.72)$$

Ținând seamă de (3.69), din expresia (3.72) se obține

$$k^2 h^2 \left[\frac{1}{12} (\alpha^2 - 1) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{360} k^2 h^4 (\alpha^2 - 1) \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \dots \right] \quad (3.73)$$

care este eroarea de trunchiere pentru schema considerată. Se poate observa că pentru $h = k$, adică $\alpha = 1$ eroarea

de trunchiere tinde la zero, iar schema cu diferențe (3.71) devine

$$U_j^{l+1} = U_{j+1}^l + U_{j-1}^l - U_j^{l-1}. \quad (3.74)$$

Schema (3.74) este o aproximare cu diferențe exactă a ecuației undelor.

Pentru discretizarea condițiilor inițiale (3.70) se consideră funcțiile $f, g \in C^2$, definite pe intervalul $0 \leq x \leq 2Jh$, unde J este un întreg. Atunci prima relație din condițiile inițiale date în (3.70) se poate scrie în formă discretă astfel :

$$U_j^0 = f(jh) = f_j; \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2J.$$

Presupunând că soluția $u(x, t)$ este de clasă C^2 , se poate dezvolta $u(x, t)$ în seria Taylor în funcție de timp, obținând

$$\begin{aligned} U_j^1 &= U_j^0 + k \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^0 + \dots = U_j^0 + kg(jh) + \\ &+ \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^0 + \dots = f(jh) + kg(jh) + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha^2 (f((j+1)h) + f((j-1)h) - 2f(jh)). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Din (3.75) se vede că a doua condiție inițială din (3.70) se poate scrie în formă discretă astfel :

$$U_j^1 = f_j + kg_j + \frac{1}{2} \alpha^2 (f_{j+1} + f_{j-1} - 2f_j), \quad j=0, 1, 2, \dots, 2J.$$

În acest caz schema explicită cu diferențe ce permite calculul soluției numerice pentru problema (3.69)–(3.70) arată astfel :

$$U_j^0 = f_j,$$

$$U_j^1 = f_j + kg_j + \frac{1}{2} \alpha^2 (f_{j+1} + f_{j-1} - 2f_j), \quad (3.76)$$

$$U_j^{l+1} = 2(1 - \alpha^2)U_j^l + \alpha^2(U_{j+1}^l + U_{j-1}^l) - U_j^{l-1},$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, 2J, \quad l = 1, 2, \dots, L,$$

iar calculul se desfășoară ca în fig. 3.3.

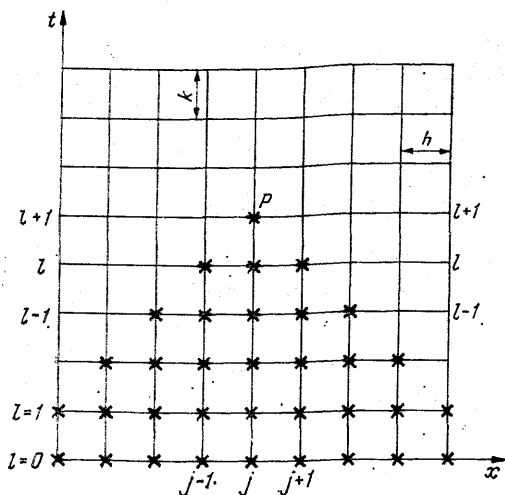


Fig. 3.3.

Prima relație din (3.76) permite calculul nodurilor din domenii existente pe axa x , a doua relație permite calculul nodurilor la nivelul $l = 1$, iar a treia relație permite determinarea nodurilor din rețea, marcate cu \times , dispuse sub forma unui triunghi isoscel cu baza $2Jh$ și vârful în punctul P . Dacă $\alpha = 1$, în locul celei de a treia ecuații date în (3.76) va fi ecuația dată în (3.74).

Din cele prezentate anterior se vede că domeniul de dependență al ecuației cu diferențe depinde de parametrul rețelei α . Datorită acestui fapt apar trei cazuri distincte: $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ și $\alpha > 1$, care prezintă importanță din punctul de vedere al stabilității schemei (3.76).

În cazul $0 < \alpha < 1$ domeniul de dependență pentru ecuația cu diferențe este inclus în domeniul ecuației dife-

rențiale și soluția este unic determinată în triunghiul QPR din fig. 3.4.

Dacă $\alpha = 1$, cele două domenii de dependență coincid, iar schema (3.76) are în locul relației a treia relația (3.74).

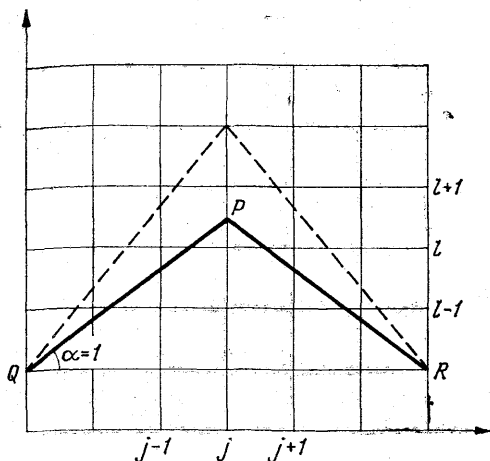


Fig. 3.4.

În cazul $\alpha > 1$ domeniul de dependență pentru ecuația cu diferențe conține în interiorul său domeniul pentru ecuația diferențială, iar schema (3.76) va furniza într-un anumit domeniu soluții ce nu depind continuu de datele inițiale, situație în care este greu de presupus ca rezultatele să fie corecte.

3.6. Stabilitatea schemei explicite cu diferențe pentru ecuația de ordinul doi

În cazul în care $\alpha > 1$ schema explicită cu diferențe (3.76) va permite calculul unor soluții într-un domeniu care nu aparține domeniului de existență al soluției analitice $u(x, t)$ a problemei (3.69), datorită acestui fapt problema convergenței și stabilității schemei (3.76) se va analiza numai pentru parametrul rețelei $|\alpha| \leq 1$.

Courant, Friedrichs și Lewy au arătat că în cazul $|\alpha| \leq 1$ soluția schemei cu diferențe (3.76) converge către soluția problemei (3.69)–(3.70), când h și $k \rightarrow 0$.

În cazul $|\alpha| < 1$ schema cu diferențe converge dacă u are derivate de ordin superior.

Un procedeu general ce permite punerea în evidență a acestui fenomen de convergență este următorul.

Fie

$$\varepsilon_j^l = u_j^l - U_j^l$$

diferența între soluția analitică u_j^l calculată în nodul (jh, lk) , și soluția numerică U_j^l a schemei cu diferențe în nodul (jh, lk) . Utilizînd dezvoltarea în serie Taylor, se determină eroarea de trunchiere pentru o serie de termeni, obținîndu-se expresia cu diferențe

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{l+1} = & -\varepsilon_j^{l-1} + \alpha^2(\varepsilon_{i-1}^l + \varepsilon_{i+1}^l) + 2(1 - \alpha^2)\varepsilon_j^l + o[k^4] + \\ & + o[k^2h^2]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Din prima relație a lui (3.70) și (3.76) se vede că soluția numerică U coincide cu soluția analitică u pe domeniul inițial, deci

$$\varepsilon_j^0 = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2J. \quad (3.78)$$

Considerînd a doua relație din (3.70) și (3.76), precum și (3.78) și făcînd diferența dintre soluția analitică la primul nivel de timp $l = k$ și soluția numerică la același nivel de timp, rezultă o eroare de forma

$$\varepsilon_j^1 = o(k^3), \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2J.$$

Pentru studiul stabilității schemei cu diferențe (3.77) care permite calculul propagării erorii se va lua în considerare efectul unui singur termen de forma $e^{i\beta x}$, unde β este un număr real. Efectul final al propagării este obținut prin superpoziții liniare ale unor astfel de erori în punctele pivotate. Erorile se propagă în timpul calculului conform relației (3.77), care practic rezultă din (3.71) prin înlocuirea lui U_j^l prin ε_j^l . Erorile în cazul condiției inițiale (3.70) se pot scrie

$$\varepsilon_j^0 = e^{i\beta jh}.$$

Presupunind că se poate da o soluție Fourier pentru ecuația (3.69) și pentru schema cu diferențe (3.71) cu ajutorul separării variabilelor, se poate scrie că

$$\varepsilon_j^l = e^{\gamma l k} \cdot e^{i\beta j h}. \quad (3.79)$$

Înlocuind (3.79) în (3.77) și efectuînd calculele corespunzătoare, se obține o ecuație de gradul doi în $e^{\gamma h}$ de forma

$$(e^{\gamma h})^2 - 2 \left(1 - 2\alpha^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right) e^{\gamma h} + 1 = 0, \quad (3.80)$$

care este tocmai ecuația caracteristică ce permite calculul valorilor proprii pentru matricea de amplificare G , asociată schemei cu diferențe (3.71) scrise sub forma unui sistem cu diferențe cu două nivele:

$$\left. \begin{aligned} U_j^{l+1} &= 2(1 - \alpha^2)U_j^l + \alpha^2(U_{j+1}^l - U_{j-1}^l) - V_j^l \\ V_j^{l+1} &= U_j^l \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

Dacă în schema (3.81) se fac următoarele înlocuiri:

$$U_{j+1}^l = e^{i\beta h} U_j^l, \quad U_{j-1}^l = e^{-i\beta h} U_j^l,$$

unde β este real, atunci (3.81) devine

$$\left. \begin{aligned} U_j^{l+1} &= 2 \left(1 - 2\alpha^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right) U_j^l - V_j^l \\ V_j^{l+1} &= U_j^l \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

sau sub formă matriceală

$$W_{j+1}^l = \begin{bmatrix} 2 \left(1 - 2\alpha^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} W_j^l,$$

$$\text{unde } W = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \text{ și } G = \begin{bmatrix} 2 \left(1 - 2\alpha^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dacă se notează cu λ valorile proprii ale matricei de amplificare G , asociate sistemului cu diferențe (3.82),

atunci aceste valori proprii sînt date de următoarea ecuație :

$$\lambda^2 - 2 \left(1 - 2\alpha^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right) \lambda + 1 = 0. \quad (3.83)$$

Se observă că ecuația (3.83) se obține din (3.80) cu substituția $e^{\gamma k} = \lambda$. Dacă se urmărește o evitare a creșterii exponențiale a erorii cînd $l \rightarrow \infty$, este necesar ca $|\gamma^{\alpha k}| < 1$ pentru orice valoare a lui β .

Dar acest lucru corespunde condiției de necesitate pentru stabilitate a lui von Neumann pentru un sistem cu diferențe cu două nivele, prezentat în cap. 2, care cere ca

$$\max_i |\lambda_i| \leq 1, \quad i = 1, 2.$$

Din ecuația (3.83) se obține

$$\lambda_{1,2} = 1 - 2\alpha^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \pm 2\alpha \sin \frac{\beta h}{2} \left(\alpha^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - 1 \right)^{1/2}.$$

Tot din (3.83) se vede că $\lambda_{1,2} = 1$.

Din cele arătate se vede că apar două cazuri în discuție :

$$1^\circ \quad \alpha^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \leq 1. \text{ Atunci}$$

$$\lambda_{1,2} \lambda_2 = 1 - 2\alpha^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \pm i 2\alpha \sin \frac{\beta h}{2} \left(1 - \alpha^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} \right)^{1/2}.$$

În acest caz $|\lambda_i| = 1$, $i = 1, 2$, pentru orice β , dacă $\alpha < 1$.

$$2^\circ \quad \alpha^2 \sin^2 \frac{\beta h}{2} > 1. \text{ Acest caz conduce la } |\lambda_2| > 1 \text{ și deci}$$

în această situație schema nu poate fi stabilă după von Neumann.

O condiție de suficiență pentru stabilitatea acestei scheme a fost dată de Richtmeyer și Morton [9] arătînd că pentru condiția lui von Neumann presupusă satisfăcută

condiția de suficiență pentru stabilitate este ca determinantul vectorilor proprii V_1 și V_2 corespunzători valorilor proprii λ_1 și λ_2 să fie mărginit, adică

$$0 < \det |(V_1, V_2)| < K,$$

unde K este o constantă pozitivă.

Fiecare nod al rețelei date în fig. 3.4 are un domeniu de dependență. De exemplu, nodul $(jh, (l+1)k)$ are un domeniu de dependență care ajunge pînă la nivelul $l=0$. Frontierele acestui domeniu sînt caracteristicile ecuației $x \pm t = jh \pm (l+1)k$. Aceste două caracteristici intersectează nivelul $l=0$ sau axa Ox în $x_1 = jh - (l+1)k$ și $x_2 = jh + (l+1)k$. Din diferența celor două coordonate se vede că intervalul de dependență al unui nod este finit și are lungimea $2(l+1)k$.

3.7. Scheme implicite cu diferențe pentru o ecuație de tip hiperbolic de ordinul doi

Schemele implicite cu diferențe finite oferă [16] mari avantaje din punctul de vedere al stabilității. În scopul îmbunătățirii condițiilor de stabilitate este preferabil să se utilizeze scheme implicite.

Se consideră problema cu valori inițiale (3.69)–(3.70), la care se mai adaugă condițiile la limită

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \quad (3.84)$$

Dacă avem o problemă cu condiții inițiale și la limită, aceasta este problema vibrațiilor unei bare încastrate la ambele capete.

Pentru această problemă se poate considera schema implicită cu diferențe de forma

$$U_j^{l+1} - 2U_j^l + U_j^{l-1} = \frac{1}{2} \alpha^2 [(U_{j+1}^{l+1} - 2U_j^{l+1} + (U_{j-1}^{l+1}) + (U_{j+1}^{l-1} - 2U_j^{l-1} + U_{j-1}^{l-1})], \quad (3.85)$$

care este o schemă cu trei nivele de timp ce s-a obținut prin aproximarea termenului $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ prin diferențe centrate

de ordinul doi în punctul (j, l) , iar termenul $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a fost aproximat printr-o medie a două aproximații cu diferențe centrate de ordinul doi, una centrată pe nodul $(j, l + 1)$ și alta centrată pe nodul $(j, l - 1)$. Schema (3.85) se mai poate scrie sub forma

$$-\alpha^2 U_{j+1}^{l+1} + 2(1 + \alpha^2) U_j^{l+1} - \alpha^2 U_{j-1}^{l+1} = 4U_j^l + \alpha^2 U_{j+1}^{l-1} - 2(1 + \alpha^2) U_j^{l-1} + \alpha^2 U_{j-1}^{l-1}. \quad (3.86)$$

Din (3.86) se vede dependența valorilor funcției din nodurile de la nivelul $l + 1$ de valorile funcției din nodurile de la nivelele l și $l - 1$.

Dacă trebuie determinate J noduri ale rețelei, ecuația (3.86) trebuie scrisă pentru fiecare j , unde $j = 1, 2, \dots, J$. Utilizând și condițiile inițiale și la limită discretizate, se poate afla soluția problemei în nodurile de la nivelele de timp $l = 0$ și $l = 1$, după care intră în funcțiune relația (3.86) care scrisă pentru $j = 1, 2, \dots, J$ conduce la un sistem de ecuații de formă tridiagonală. Diagonala principală va conține coeficienții de forma $2(1 + \alpha^2)$, iar celelalte două diagonale coeficienții de forma $-\alpha^2$. În acest fel matricea este diagonal dominantă și se poate calcula soluția după o metodă iterativă.

O altă schemă implicită pentru problema (3.69), (3.70), (3.84) poate fi

$$U_j^{l+1} - 2U_j^l + U_j^{l-1} = \alpha^2 \cdot \{ \lambda [(U_{j+1}^{l+1} - 2U_j^{l+1} + U_{j-1}^{l+1}) + (U_{j+1}^{l-1} - 2U_j^{l-1} + U_{j-1}^{l-1})] + (1 - 2\lambda) [U_{j+1}^l - 2U_j^l + U_{j-1}^l] \}, \quad (3.87)$$

unde $\alpha = k/h$, iar λ este un parametru de relaxare. Pentru $\lambda = 0$ se obține schema explicită (3.71), pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ se obține schema implicită (3.85).

Oricare din schemele prezentate pot fi folosite la rezolvarea numerică a unei probleme cu condiții inițiale și la limită.

3.8. Stabilitatea schemelor implicate cu diferențe pentru ecuația de ordinul doi

Pentru analiza stabilității schemelor implicate se va proceda ca în capitolele precedente, utilizând metoda Fourier. Presupunem că soluția schemei cu diferențe (3.87) se poate scrie pentru un nod sub forma

$$U_j^l = e^{ija} e^{ilb}, \quad (3.88)$$

unde a este un număr real arbitrar, iar b este un număr complex $b = \mu + i\nu$, cu μ și ν parametrii ce trebuie determinați.

Înlocuind (3.88) în (3.87) și făcînd calculele respective, se obține

$$\begin{aligned} e^{ija} \cdot e^{i(l+1)b} - 2e^{ija} e^{ilb} + e^{ija} e^{i(l-1)b} = & \alpha^2 \{ \lambda [(e^{i(j+1)a} e^{i(l+1)b} - \\ - 2e^{ija} \cdot e^{i(l+1)b} + e^{i(j-1)b}) + (e^{i(j+1)a} e^{i(l-1)b} - 2e^{ija} e^{i(l-1)b} + \\ + e^{i(j-1)a} e^{i(l-1)b})] + (1 - 2\lambda) [e^{i(j+1)a} e^{ilb} - 2e^{ija} e^{ilb} + \\ + e^{i(j-1)a} e^{ilb}] \}. \end{aligned}$$

După împărțirea cu $e^{ija} e^{ilb}$ rezultă

$$\begin{aligned} e^{ib} - 2 + e^{-ib} = & \alpha^2 \{ \lambda [(e^{-ia} e^{ib} - 2e^{-ib} + e^{-ia} e^{ib}) + \\ (e^{ia} e^{ib} - 2e^{ib} + e^{ia} e^{-ib})] + (1 - 2\lambda) (e^{ia} - 2 + e^{-ia}) \}. \end{aligned}$$

Ordonînd termenii și dînd factorii comuni, se găsește

$$e^{ib} - 2 + e^{-ib} = \alpha^2 (e^{ia} - 2 + e^{-ia}) [1 - 2\lambda + \lambda (e^{ib} + e^{-ib})]$$

sau

$$2 \cos b - 2 = \alpha^2 (2 \cos a - 2) [1 - 2\lambda (1 - \cos b)],$$

$$\sin^2 \frac{b}{2} = \alpha^2 \sin^2 \frac{a}{2} \left(1 - 4\lambda \sin^2 \frac{b}{2} \right).$$

Această expresie pentru b poate fi pusă sub forma

$$\frac{\sin^2 \frac{b}{2}}{1 - 4\lambda \sin^2 \frac{b}{2}} = \alpha^2 \sin^2 \frac{a}{2}.$$

Dacă se adună numărătorul înmulțit cu 4λ la numitor, se obține

$$\sin^2 \frac{b}{2} = \frac{\alpha^2 \sin^2 \frac{a}{2}}{1 + 4\lambda \alpha^2 \sin^2 \frac{a}{2}}, \quad (3.89)$$

de unde rezultă că b este real pentru orice a real dacă

$$\lambda \geq \frac{1}{4}, \quad \lambda > 0$$

și

$$0 < \lambda < \frac{1}{4}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 4\lambda}}.$$

Din cele de mai sus se vede că schema (3.87) este necondiționat stabilă, dacă $2 \geq \frac{1}{4}$.

Pentru $\lambda = \frac{1}{4}$ schema cu diferențe (3.87) este stabilă

pentru orice $\alpha > 0$ și în acest caz schema (3.87) se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} \frac{4}{\alpha^2} (U_j^{l+1} - 2U_j^l + U_j^{l-1}) &= (U_{j+1}^{l+1} - 2U_j^{l+1} - U_{j-1}^{l+1}) + \\ &+ 2(U_{j+1}^l - 2U_j^l + U_{j-1}^l) + (U_{j+1}^{l-1} - 2U_j^{l-1} + U_{j-1}^{l-1}) \end{aligned}$$

sau altfel ordonată

$$\begin{aligned} & - (U_{j+1}^{l+1} + U_{j-1}^{l+1}) + 2 \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) U_j^{l+1} = 2 \left[(U_{j+1}^l + U_{j-1}^l) - \right. \\ & \left. - 2 \left(1 - \frac{2}{\alpha^2} \right) U_j^l \right] + \left[(U_{j+1}^{l-1} + U_{j-1}^{l-1}) - 2 \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) U_j^{l-1} \right]. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Metoda de calcul pentru schema dată în (3.90) necesită inversarea unei matrice tridiagonale la fiecare pas pe axa timpului. În cazul în care schema din (3.87) este dezvoltată în serie Taylor termen cu termen în punctul (jh, lk) se poate găsi eroarea de trunchiere sub forma

$$\begin{aligned} \varepsilon = k^2 h^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) - \lambda \alpha^2 \right] \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{360} h^2 \left[(\alpha^2 - 1) - \right. \right. \\ \left. \left. - 30 \lambda \alpha^2 (\alpha^2 + 1) \right] \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Această eroare de trunchiere se reduce la eroarea de trunchiere a schemei cu diferențe explicite când $\lambda = 0$.

Consistența schemei cu diferențe ce aproximează ecuația hiperbolică de ordinul doi are loc, dacă

$$\frac{\varepsilon}{k^2} \rightarrow 0 \text{ când } h, k \rightarrow 0,$$

unde ε este eroarea de trunchiere, iar h și k sînt parametrii rețelei.

3.9. Scheme cu diferențe pentru cazul neliniar

Nu există o metodă generală pentru studiul stabilității schemelor cu diferențe în cazul ecuațiilor hiperbolice de ordinul doi neliniare. Cel mai bun lucru de făcut în practică [17] este să se studieze o metodă de liniarizare, bazată pe mărginirea funcției și a derivatelor sale. Este necesar a se proceda astfel și pentru a putea urmări efectul asupra soluției datorită unor schimbări ale coeficienților și condițiilor auxiliare, sau chiar numai pentru construirea unui

algoritm de calcul. În practică, în foarte multe cazuri neliniare utilizarea unei scheme implicite conduce la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice neliniare. În asemenea situații folosirea metodelor cu diferențe nu aduce mari avantaje față de metoda caracteristicilor. Există o serie de exemple [12], care arată că utilizarea metodelor implicite poate uneori conduce la sisteme de ecuații algebrice liniare. Analiza stabilității pentru o serie de exemple particulare poate fi făcută prin testări numerice.

Să considerăm un exemplu de vibrații neliniare ale unei bare fixate la ambele capete. Modelul matematic asociat acestui sistem fizic [18] este dat de ecuația undelor

$$\frac{1 - B + B \left(1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^{3/2}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.91)$$

cu condițiile inițiale

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (3.92)$$

și la limită

$$u(0, T) = 0, \quad u(1, T) = 0. \quad (3.93)$$

O schemă cu diferențe pentru această ecuație poate fi obținută prin discretizarea lui (3.91), utilizând diferențele centrate de ordinul doi, iar pentru derivata u_x diferențele la dreapta.

După cum s-a mai spus, metodele implicite nu conduc totdeauna la sisteme de ecuații algebrice neliniare. De o asemenea clasă de ecuații neliniare s-a ocupat Ames [19], care a analizat trei modele și rezultatele numerice le-a comparat cu rezultatele experimentale.

Cele trei modele sînt :

— modelul Zaiser :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V_s \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} + \\ + (V_s^2 - C^2) \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;$$

— modelul Mote :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V_s \left[1 + \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \\ + \left[V_s^2 (1 - \delta) (-3\delta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \left[1 + \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3} - \\ - 3\delta V_s \left[1 - \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{-5/2} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 C^2 - \\ - C^2 (1 - k^2) \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;$$

— modelul Hard Spring :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \left[V^2 - C^2 \left(1 + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right].$$

Modelele prezentate sînt cazuri particulare de ecuații de ordinul doi neliniare, adimensionale, care sînt denumite [1] clasa ecuațiilor neliniare, dar evasiliniare în raport cu variabila t . Această clasă se poate scrie sub forma generală astfel :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + g \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \\ = L \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (3.94)$$

În domeniul $0 < x < 1$, $t > 0$ se poate găsi o soluție a ecuației (3.94) cu ajutorul condițiilor inițiale

$$u(x, 0) = A(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = B(x) \quad (3.95)$$

și la limită

$$u(0, t) = C(x), \quad u(1, t) = D(x). \quad (3.96)$$

Pentru această problemă generală se poate construi o schemă cu diferențe, utilizând aproximații cu diferențe pentru ordinul doi de precizie atât pentru derivatele de ordinul întâi cât și pentru cele de ordinul doi, toate aceste aproximații fiind centrate pe nodul rețelei (jk, lk) , iar pentru $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ se va folosi următoarea aproximare:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{1}{4hk} \left(U_{j+1}^{l+1} - U_{j+1}^{l-1} + U_{j-1}^{l+1} + U_{j-1}^{l-1} \right).$$

Cu aceste aproximații condiția (3.94) va conduce la un sistem de ecuații algebrice de forma

$$a_j U_{j-1}^{l+1} + b_j U_j^{l+1} + c_j U_{j+1}^{l+1} = d_j, \quad (3.97)$$

unde coeficienții a_j , b_j , c_j și d_j au următoarele expresii:

$$a_j = -\frac{f_j^l}{4hk}; \quad b_j = \frac{1}{k^2} + \frac{g_j^l}{2k}, \quad c_j = -a_j,$$

$$d_j = L_j^l + \frac{U_{j+1}^{l-1} - U_{j-1}^{l-1}}{4hk} \cdot f_j^l + \frac{U_j^{l-1} g_j^l}{2k} + \frac{2U_j^l - U_j^{l-1}}{k^2}$$

și prin f_j^l s-a notat

$$f_j^l = f\left(jh, lk, U_j^l, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^l, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_j^l\right).$$

Schema (3.97) este o schemă cu diferențe ce apelează în calcul la nouă noduri ale rețelei, conducând la un sistem algebric liniar implicit la fiecare nivel de timp, care se

poate rezolva prin explicitare pentru valorile din nodurile rețelei existente la nivelul de timp $l + 1$. Algoritmul ce oferă o serie de avantaje pentru astfel de probleme este algoritmul Thomas [20].

3.10. Scheme cu diferențe pentru ecuații de tip hiperbolic de ordinul doi în plan

O ecuație de tip hiperbolic omogenă de ordinul doi în două variabile spațiale de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + d \frac{\partial u}{\partial t} + e \frac{\partial u}{\partial x_1} + f \frac{\partial u}{\partial x_2} + gu = 0 \quad (3.98)$$

poate fi transformată într-o ecuație diferențială, care să conțină numai derivatele de ordinul doi. Coeficienții ecuației sînt funcții de variabilele independente x_1 , x_2 și t , satisfăcînd următoarele condiții:

$$a > 0, \quad c > 0, \quad ac - b^2 > 0.$$

Ecuația undelor în forma cea mai simplă pentru două variabile spațiale are următoarea formă:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.$$

În cazul în care ecuației date în (3.98) i se asociază condițiile inițiale

$$u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2), \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty,$$

se obține problema Cauchy. Domeniul de dependență al unui punct P de coordonate $P(x_1, x_2; T)$ este un cerc:

$$(x_1 - X_1)^2 + (x_2 - X_2)^2 \leq T^2$$

din planul $x_1 O x_2$, care este baza unui con cu vârful în P și cu axa paralelă cu axa timpului. Acest con se numește con caracteristic și are același rol pe care-l aveau caracteristicile $x + t = \text{const}$ pentru problema Cauchy unidimensională.

Considerînd parametrii pentru rețeaua $x_1 = jh$, $x_2 = nh$, $t = lk$, unde j , n , l sînt numere întregi, ecuației (3.98) i se poate asocia o schemă cu diferențe de forma

$$\frac{1}{k^2} (U_{j,n}^{l+1} - 2U_{j,n}^l + U_{j,n}^{l-1}) - \frac{1}{h^2} (U_{j+1,n}^l - 2U_{j,n}^l + U_{j-1,n}^l) - \frac{1}{h^2} (U_{j,n+1}^l - 2U_{j,n}^l + U_{j,n-1}^l) = 0.$$

Această schemă cu diferențe se poate pune sub forma explicită :

$$U_{j,n}^{l+1} = 2(1 - 2\alpha^2)U_{j,n}^l + \alpha^2 (U_{j+1,n}^l + U_{j-1,n}^l + U_{j,n+1}^l + U_{j,n-1}^l) - U_{j,n}^{l-1}, \quad (3.99)$$

$$U_{j,n}^0 = f_{j,n}, \quad U_{j,n}^1 - U_{j,n}^0 = kg_{j,n}.$$

Cu ultimele două relații se calculează soluția în nodurile rețelei spațiale pentru nivelul de timp $t = 0$ și $t = k$, după care se ia în considerare prima relație, care este o schemă cu trei nivele.

Pentru a face o analiză privind stabilitatea schemei cu diferențe asociate ecuației (3.98), soluția se obține prin metoda Fourier. Presupunem că soluția schemei cu diferențe implicite este

$$U_{j,n}^l = e^{ij\theta} e^{in\varphi} e^{il\lambda}, \quad (3.100)$$

unde θ , φ sînt numere reale arbitrare și $\lambda = \mu + i\nu$ este un număr complex ce urmează a fi determinat. Înlocuindu-se (3.100) în (3.99), se va obține relația

$$e^{ij\theta} e^{in\varphi} e^{i(l+1)\lambda} - e^{ij\theta} e^{in\varphi} e^{i(l-1)\lambda} = 2(1 - 2\alpha^2)e^{ij\theta} e^{in\varphi} e^{il\lambda} + \alpha^2 (e^{i(j+1)\theta} e^{in\varphi} e^{il\lambda} + e^{i(j-1)\theta} e^{in\varphi} e^{il\lambda} + e^{ij\theta} e^{i(n+1)\varphi} e^{il\lambda} + e^{ij\theta} e^{i(n-1)\varphi} e^{il\lambda}),$$

care după simplificare devine

$$e^{i\lambda} - e^{-i\lambda} = 2(1 - 2\alpha^2) + \alpha^2(e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

sau

$$2\cos\lambda = 2(1 - 2\alpha^2) + 2\alpha^2(\cos\theta + \cos\varphi),$$

deci

$$\sin^2 \frac{\lambda}{2} = \alpha^2 \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3.101)$$

Din analiza lui (3.101) rezultă :

1° Dacă $\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, atunci se reține o valoare reală pentru λ și astfel $\nu = 0$, ceea ce conduce la o soluție mărginită pentru ecuația cu diferențe (3.99) și deci implicit la stabilitatea schemei (3.99).

2° Dacă $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$, se pot găsi valori pentru θ și φ astfel încât valorile corespunzătoare λ apar în formă de perechi conjugate. În acest caz rădăcina cu partea imaginară negativă produce o valoare care crește exponențial când $n \rightarrow \infty$ și deci schema este instabilă. O altă metodă de a îmbunătăți stabilitatea este de a se asocia problemei (3.99) o schemă implicită.

Exemplu. Se consideră ecuația undelor în plan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \text{ în } D,$$

$$u = 0 \text{ pe curba } \Gamma,$$

$$u(x_1, x_2, 0)_x = f(x_1, x_2) \text{ în } D,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = 0 \text{ în } D,$$

unde D este un sfert de cerc $x > [0, y > [0, x^2 + y^2 < 1$ dat în fig. 3.5. Introducând același pas $h = \frac{1}{N}$ pentru ambele variabile spațiale și k pentru

variabila t , rezultă $U_{j,n}^l = u(jh, nh, lk)$.

Cu această notație, ecuației diferențiale i se poate asocia schema cu diferențe

$$\frac{1}{h^2} (U_{j,n}^{l+1} - 2U_{j,n}^l + U_{j,n}^{l-1}) - \frac{1}{h^2} (U_{j+1,n}^l - 2U_{j,n}^l + U_{j-1,n}^l) -$$

$$- \frac{1}{h^2} (U_{j,n+1}^l - 2U_{j,n}^l + U_{j,n-1}^l) = 0$$

pentru $j > 0$, $n > 0$ și $j + n < N$,

$$U_{j,n}^l = 0 \text{ pentru } j = 0, n = 0, \text{ sau}$$

$$i + j = N,$$

$$U_{j,n}^0 = f_{j,n},$$

$$\frac{U_{j,n}^1 - U_{j-n}^0}{k} = 0.$$

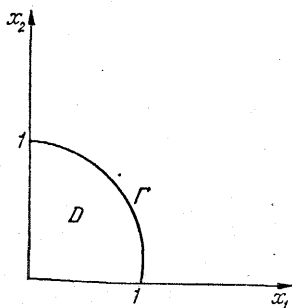


Fig. 3.5.

Această schemă cu diferențe conduce la următoarea formulă recursivă, care este stabilă [10], dacă $\frac{2k^2}{h^2} \leq 1$:

$$U_{j,n}^{l+1} = \frac{k^2}{h^2} (U_{j+1,n}^l + U_{j-1,n}^l + U_{j,n+1}^l + U_{j,n-1}^l) + \\ + \left(2 - \frac{4k^2}{h^2} \right) U_{j,n}^l - U_{j,n}^{l-1}.$$

Această formulă recursivă permite calculul lui U la nivelul $l + 1$, în funcție de valorile lui U la nivelul l și $l - 1$, deci este o schemă cu diferențe cu trei nivele, deoarece implică trei nivele de timp.

3.11. Metoda aproximațiilor succesive

Se consideră problema cu condiții inițiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x, t)u = g(x, t) \text{ pentru } -\infty < x < +\infty, t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (3.102)$$

unde $f(x, t)$ este o funcție continuă de x și t . După ordonare se obține ecuația diferențială

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) + g(x, t)u. \quad (3.102')$$

În urma introducerii notației

$$h(x, t) \equiv f(x, t) + g(x, t)u$$

se obține problema cu condiții inițiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x, t) \text{ pentru } t > 0, \quad (3.103)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

a cărei soluție poate fi găsită sub forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\bar{t})}^{x+(t-\bar{t})} h(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} d\bar{t}$$

sau

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\bar{t})}^{x+(t-\bar{t})} [f(\bar{x}, \bar{t}) + g(\bar{x}, \bar{t})u(\bar{x}, \bar{t})] d\bar{x} d\bar{t}. \quad (3.104)$$

Din această relație se vede că funcția $u(x, t)$ apare sub integrală. Această relație nu este o formulă ce permite determinarea soluției ecuației (3.103), ci o ecuație integrală pentru funcția $u(x, t)$.

Se poate arăta că numai o soluție continuă a ecuației integrale (3.104) este soluție a problemei (3.102). Pentru rezolvarea ecuației integrale (3.102) se alege o valoare inițială $U_0(x, t)$, se calculează a doua aproximație u , ca soluție a problemei cu valori inițiale (3.102) :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f(x, t) + g(x, t)u_0(x, t),$$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

adică

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\bar{t})}^{x+(t-\bar{t})} [f(\bar{x}, \bar{t}) + g(\bar{x}, \bar{t})u_0(\bar{x}, \bar{t})] d\bar{x} d\bar{t}.$$

Se consideră că u_1 este o aproximație mult mai bună decât u_0 pentru soluția ecuației (3.102) sau (3.104). Continuând acest proces de îmbunătățire a aproximației u , se calculează cu ajutorul lui u_1 valoarea îmbunătățită u_2 ca soluție a problemei (3.102) :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f(x, t) + g(x, t) u_1(x, t),$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Dacă se continuă acest proces, se poate obține u_{n+1} ca soluție a problemei cu valori inițiale

$$\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial x^2} = f(x, t) + g(x, t) u_n(x, t),$$

$$u_{n+1}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_{n+1}}{\partial t}(x, 0) = 0$$

pentru $n = 1, 2, 3, \dots$ cu ajutorul formulei iterative

$$u_{n+1}(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\bar{t})}^{x+(t-\bar{t})} [f(\bar{x}, \bar{t}) + g(\bar{x}, \bar{t})u_n(\bar{x}, \bar{t})] d\bar{x} d\bar{t}. \quad (3.105)$$

Se pune problema dacă valorile u_n converg către soluția u . În acest sens se consideră diferența

$$\varepsilon_n = u_n - u_{n-1}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\bar{t})}^{x+(t-\bar{t})} [(f(\bar{x}, \bar{t}) + g(\bar{x}, \bar{t})u_{n+1}(\bar{x}, \bar{t})) - \\ &\quad - f(\bar{x}, \bar{t}) + g(\bar{x}, \bar{t})u_n(\bar{x}, \bar{t})] d\bar{x} d\bar{t} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\bar{t})}^{x+(t-\bar{t})} g(\bar{x}, \bar{t}) \varepsilon_n(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} d\bar{t}. \quad (3.106) \end{aligned}$$

Pentru un $T > 0$ se definește

$$K_1 = \max_{t \leq T} |g(x, t)|, \quad K_2 = \max_{t \leq T} |\varepsilon_1(x, t)|.$$

Dacă se consideră relația (3.106) pentru $n = 1$, rezultă

$$|\varepsilon_2(x, t)| \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\bar{t})}^{x+(t-\bar{t})} K_1 K_2 d\bar{x} d\bar{t} = \frac{1}{2} K_1 K_2 t^2$$

pentru $t \leq T$, iar pentru $n = 2$ rezultă

$$|\varepsilon_3(x, t)| \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\bar{t})}^{x+(t-\bar{t})} \frac{1}{2} K_1^2 K_2^2 \bar{t}^2 d\bar{x} d\bar{t} = \frac{1}{4!} K_1^2 K_2^2 t^4.$$

Continuîndu-se în acest fel, se vede că

$$|u_n(x, t) - u_{n-1}(n, t)| = |\varepsilon_n(x, t)| \leq \frac{K_1^{n-1} K_2}{[2(n-1)!]} t^{2(n-1)}$$

pentru $t \leq T$. (3.107)

Astfel pentru orice $m > n$ și $t \leq T$

$$|u_m(x, t) - u_n(x, t)| = |\varepsilon_m + \varepsilon_{m-1} + \dots + \varepsilon_{n+1}| \leq |\varepsilon_m| +$$

$$+ |\varepsilon_{m-1}| + \dots + |\varepsilon_{n+1}| \leq K_2 \sum_{k=n}^{m-1} \frac{K_1^{k+2} t^{2k}}{(2k)!}. \quad (3.108)$$

Seria $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{K_1^{k+2} t^{2k}}{(2k)!}$ converge uniform pentru $t \leq T$ către $\text{ch } t$.

De aici rezultă că $u_m - u_n \rightarrow 0$ uniform în t .

După criteriul lui Cauchy rezultă că șirul de aproximări $u_n(x, t)$ converge uniform în x și t (pentru $t \leq T$) către o funcție $u(x, t)$.

Unicitatea soluției rezultă din următoarele considerații. Diferența a două soluții consecutive ale lui (3.102) este

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\bar{t})}^{x+(t-\bar{t})} g(\bar{x}, \bar{t}) \varepsilon(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} d\bar{t}.$$

Derivata expresiei (3.107) conduce la inegalitatea

$$|\varepsilon(x, t)| \leq \max |\varepsilon| \frac{k_1^n t^{2n}}{(2n)!}$$

pentru orice n . Dacă $n \rightarrow \infty$, atunci $\varepsilon \rightarrow 0$. Pentru $m \rightarrow \infty$ se obține inegalitatea

$$\begin{aligned} & |u(x, t) - u_n(x, t)| \leq \\ & \leq K_2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{K_1^k y^{2k}}{(2k)!} = K_2 \left[\operatorname{cht} \sqrt{k_1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K_1^k t^{2k}}{(2k)!} \right]. \end{aligned}$$

Aceasta este limită pentru eroarea $|u - u_n|$ în funcție de maximul K al diferenței $|u_1 - u_0|$. Pentru t fixat limita erorii tinde către zero mult mai repede decât $n \rightarrow \infty$.

Exemplu. Se consideră problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \sin x = \sin x \text{ pentru } t > 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Se alege prima aproximație $u_0 \equiv 0$. Atunci

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\bar{t})}^{x+(t-\bar{t})} \sin \bar{x} \, d\bar{x} \, d\bar{t} = \sin x (1 - \cos t).$$

Astfel se obține $K_1 = \max |\sin x| = 1$, $K_2 = \max |\sin x (1 - \cos t)| = 2$ pentru orice t . Deci

$$|u(x, t) - u_n(x, t)| \leq 2 \left[\operatorname{cht} - \sum_0^{n-1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right].$$

Pentru $n = 0$

$$u(x, t) \leq 2 \operatorname{ch} t;$$

pentru $n = 1$

$$|u(x, t) - \sin x (1 - \cos t)| \leq 2 (\operatorname{ch} t - 1).$$

Se observă că pentru $t \leq \pi$ se poate lua $K_2 = 1 - \cos t$; atunci

$$|u(x, t) - \sin x (1 - \cos t)| \leq (1 - \cos t) (\operatorname{ch} t - 1)$$

care este mult mai bună decît limita de mai sus pentru un t particular.

Dacă se dorește o aproximație îmbunătățită, se calculează

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\bar{t})}^{x+(t+\bar{t})} \sin \bar{x} (1 - \cos \bar{t}) \, d\bar{x} \, d\bar{t} = \sin x (1 - \cos t) + \\ &+ \frac{1}{4} t^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos 2x \right) (1 - \cos t) + \frac{1}{24} \cos 2x (1 - \cos 2t) \end{aligned}$$

și se obține

$$|u(x, t) - u_2(x, t)| \leq 2 \left(\operatorname{ch} t - 1 - \frac{t^2}{2} \right)$$

pentru orice t , sau

$$|\bar{u}(x, t) - u_2(x, t)| \leq (1 - \cos t) \left(\operatorname{ch} t - 1 - \frac{t^2}{2} \right) \text{ pentru } t \leq \pi.$$

Deci se observă că integralele sînt calculate pe triunghiul caracteristic $0 \leq t \leq T - |X - x|$.

METODA CARACTERISTICILOR

Metoda caracteristicilor este utilizată pentru găsirea soluției unice a sistemelor de ecuații cu derivate parțiale de tip hiperbolic. Această metodă va fi utilizată pentru rezolvarea numerică a unui sistem de două ecuații cvasiliniare pentru două variabile dependente și două independente. Pentru astfel de sistem există două direcții denumite direcții caracteristice. Aproximațiile cu diferențe finite pentru cele două ecuații cu derivate parțiale sînt construite utilizînd proprietățile acestor direcții caracteristice. În [26 — 30] se demonstrează o serie de teoreme și se dau informații privind modul de utilizare a caracteristicilor în metodele de calcul numeric. În [27] se arată că direcțiile caracteristice pot fi extinse la n ecuații cvasiliniare cu derivate parțiale în două variabile independente. Presupunînd că pentru aceste n ecuații există n direcții caracteristice în fiecare punct, unele din ele putînd chiar coincide, calculul numeric se complică și datorită acestui fapt [31] nici nu există multe probleme tratate prin metoda caracteristicilor cu $n > 2$. În cazul $n > 2$ [27] caracteristicile sînt suprafețe și calculul devine laborios. Pentru a asigura precizia soluției numerice se utilizează metode cu diferențe de ordinul întii și de ordinul doi. În cazul cînd numărul de ecuații diferențiale cu derivate parțiale precum și numărul variabilelor independente crește, etapele algoritmului de calcul rămîn în general aceleași, dar calculele ce urmează a fi efectuate sînt foarte dificile.

4.1. Noțiunea de caracteristică

Pentru a pune în evidență noțiunea de caracteristică, se va considera ecuația de ordinul al doilea cvasiliniară

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha_4 = 0, \quad (4.1)$$

unde $\alpha_i, i = 1, \dots, 4$, sînt funcții de $x, y, u, \partial u/\partial x$ și $\partial u/\partial y$, dar nu depind de $\partial^2 u/\partial x^2, \partial^2 u/\partial y \partial x$ și $\partial^2 u/\partial y^2$, iar derivatele de ordinul al doilea ale funcției u care apar în ecuația (4.1) sînt numai la puterea întâi.

Se introduce următoarele notații :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = s \text{ și } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = t. \quad (4.2)$$

Se presupune că există o curbă Γ în planul xOy pe care mărimile u, p, q, r, s și t satisfac ecuația (4.1). Γ nu este curba pe care valorile lui u, p și q sînt date inițial. În acest caz diferențialele funcțiilor u, p și q în direcția tangentei la Γ satisfac ecuațiile

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = r dx + s dy, \quad (4.3)$$

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy = s dx + t dy. \quad (4.4)$$

Cu notațiile din (4.2), ecuația (4.1) devine

$$\alpha_4 r + \alpha_2 s + \alpha_3 t + \alpha_4 = 0. \quad (4.5)$$

Panta tangentei la curba Γ este dată de raportul dy/dx . Eliminînd r și t din (4.5) și folosind expresiile (4.3) și (4.4), se obține

$$\frac{\alpha_1}{dx} (dp - s dy) + \alpha_2 s + \frac{\alpha_3}{dy} (dq - s dx) + \alpha_4 = 0. \quad (4.6)$$

După efectuarea calculelor în (4.6) și ordonare, se obține relația

$$s \left[\alpha_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \alpha_2 \frac{dy}{dx} + \alpha_3 \right] - \left(\alpha_1 \frac{dp}{dx} \frac{dy}{dx} + \alpha_3 \frac{dq}{dx} + \alpha_4 \frac{dy}{dx} \right) = 0. \quad (4.7)$$

Presupunem că se alege curba Γ astfel încît panta tangentei în fiecare punct al curbei Γ să fie una din rădăcinile ecuației

$$\alpha_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \alpha_2 \frac{dy}{dx} + \alpha_3 = 0. \quad (4.8)$$

Prin această condiție s este eliminat și din (4.7) rezultă că în această direcție avem relația

$$\alpha_1 \frac{dp}{dx} \frac{dy}{dx} + \alpha_3 \frac{dq}{dx} + \alpha_4 \frac{dy}{dx} = 0. \quad (4.9)$$

Din ecuația (4.8) se vede că în orice punct $P(x, y)$ al domeniului de existență a soluției ecuației (4.1) există două direcții date de rădăcinile ecuației (4.8); de-a lungul acestor direcții există o relație dată prin (4.9) între diferențialele totale dp și dq .

Direcțiile date de rădăcinile ecuației (4.8) sînt numite *direcții caracteristice*.

Ecuația (4.8), joacă un rol important în clasificarea ecuației (4.1). Dacă discriminantul ecuației (4.8)

$$\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 \begin{cases} > 0, \text{ există două caracteristici distincte;} \\ & \text{(4.1) este de tip hiperbolic;} \\ = 0, \text{ există o caracteristică;} & \text{(4.1) este de} \\ & \text{tip parabolic;} \\ < 0, \text{ nu există nici o caracteristică;} & \text{(4.1)} \\ & \text{este de tip eliptic.} \end{cases}$$

Dacă ecuația (4.8) are două rădăcini reale și distincte de forma

$$\frac{dy}{dx} = \eta_+, \quad \frac{dy}{dx} = \eta_-, \quad (4.10)$$

atunci prin fiecare punct P al domeniului soluției ecuației hiperbolice de ordinul al doilea trec două caracteristici diferite η_+ și η_- .

O clasificare a ecuației cu derivate parțiale, precum și alegerea metodei de tratare numerică poate depinde de domeniul în care se cere găsirea soluției.

Exemplu. Fie

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, p, q). \quad (4.11)$$

Direcțiile caracteristice pentru ecuația (4.11) sînt date de ecuația

$$y\eta^2 - x\eta + \frac{1}{4} = 0.$$

Discriminantul $x^2 - y$ se reprezintă grafic (fig. 4.1) prin parabola C , care împarte planul în două domenii D_1 și D_2 . În domeniul D_2 ecuația (4.11) este de tip hiperbolic, în domeniul D_1 este eliptică, iar pe curba C ecuația este de tip parabolic. Această analiză este utilă, deoarece dacă se cere soluția ecuației (4.11) în domeniul D_1 , se aleg metodele numerice pentru ecuațiile eliptice, iar dacă se cere soluția lui (4.11) în domeniul D_2 , trebuie tratată cu metodele numerice pentru ecuațiile hiperbolice.

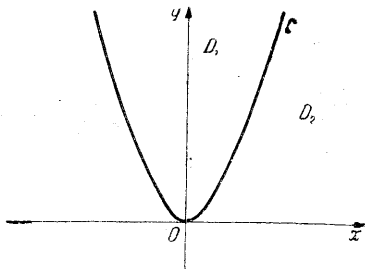


Fig. 4.1.

Relația (4.9) între dp și dq de-a lungul rădăcinilor ecuației (4.8) se va utiliza pentru rezolvarea numerică a ecuației diferențiale (4.1) printr-o serie de integrări succesive. În cazul undelor în forma cea mai simplă cele două caracteristici sînt

$$\eta_+ \equiv x - t = 0, \quad \eta_- \equiv x + t = 0, \quad (4.12)$$

date în fig. 4.2.

Dacă se consideră punctul $P(x_0, t_0)$ și cele două caracteristici η_+ și η_- care trec prin acest punct, se observă că cele două caracteristici taie axa Ox în două puncte A și B . Segmentul \overline{AB} este denumit *interval de dependență al punctului P* . Dacă se consideră un punct $A(x_0, 0)$ pe

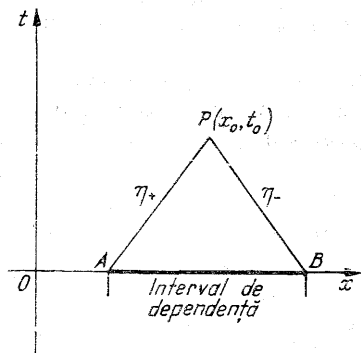


Fig. 4.2.

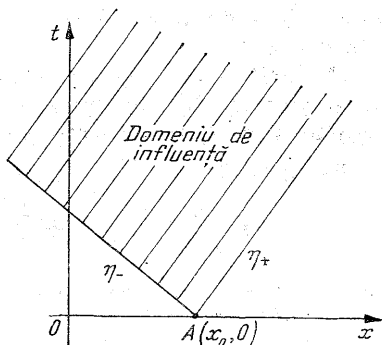


Fig. 4.3.

axa Ox (v. fig. 4.3) și se duc cele două caracteristici prin A , atunci domeniul cuprins între cele două caracteristici η_+ și η_- se numește *domeniul de influență al punctului A* . Conceptele de *domeniu de dependență* (sau interval de dependență) și *domeniul de influență* și *caracteristici* sînt noțiuni fundamentale pentru ecuațiile cu derivate parțiale hiperbolice.

Dacă se consideră un sistem de două ecuații cvasilinare

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_y + \alpha_3 v_x + \alpha_4 v_y &= f \\ \beta_1 u_x + \beta_2 u_y + \beta_3 v_x + \beta_4 v_y &= g \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

apar o serie de probleme în ceea ce privește determinarea unei soluții unice care satisface condiții inițiale și la limită.

În cazul în care u și v sînt derivabile și continue și sînt date pe o curbă C care nu este caracteristică, dar funcția ce determină curba este derivabilă și continuă, atunci [31–32] sistemul (4.13) are o soluție unică în regiunea APB mărginită de curba inițială C și caracteris-

ticile η_+ și η_- deasupra și dedesubtul curbei C (v. fig. 4.4). Dacă u și v sînt derivabile și continue pe o curbă C necaracteristică și sînt date pe AB și pe caracteristica η_+ care trece prin B , în acest caz în domeniul $ABPQ$ se

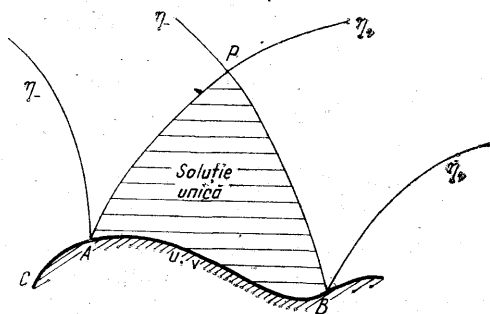


Fig. 4.4.

poate determina [28—29] o soluție unică (v. fig. 4.5). Dacă u și v sînt cunoscute de-a lungul arcelor AB și BC de pe caracteristici, atunci în domeniul $ABCP$ se poate determina o soluție unică (v. fig. 4.6).

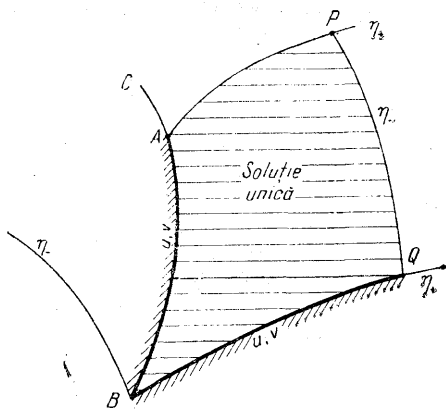


Fig. 4.5.

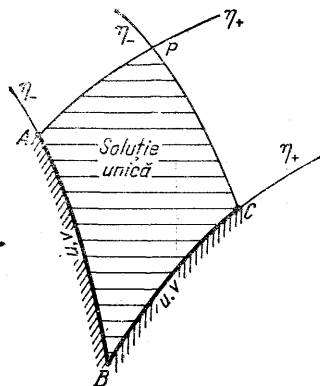


Fig. 4.6.

Aceste afirmații rămîn valabile numai dacă în domeniul considerat nu apar interferențe ale condițiilor la limită sau perturbații. În general pot apărea o serie de

condiții la limită neprevăzute, cum ar fi undele de șoc sau discontinuități în domeniul soluției. Astfel de discontinuități se pot propaga după anumite legi și reprezintă frontierele între care ecuația diferențială poate fi rezolvată. În general acestea sînt necunoscute dinainte și trebuie să fie determinate prin calcule simultane cu calculul soluției continue.

Pentru a ilustra problema discontinuităților se va considera ecuația diferențială de ordinul întâi sub forma generală

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = c. \quad (4.14)$$

Caracteristicile pentru ecuația cvasiliniară (4.14) sînt determinate de $dx/a = dy/b$. De-a lungul caracteristicilor are loc relația $dx/a = du/c$.

În particular dacă $a = b = c = 1$, ecuația (4.14) devine

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1. \quad (4.15)$$

Caracteristicile sînt date de ecuația $dx = dy$ sau $y = x + c_1$ iar de-a lungul caracteristicilor există relația

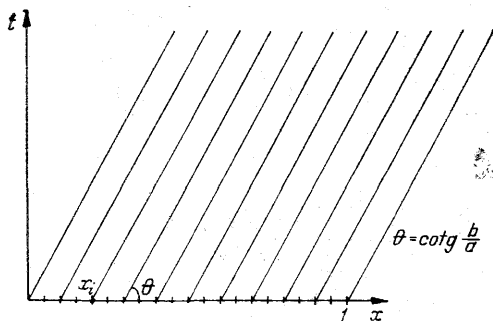


Fig. 4.7.

$du = dx$ sau $u = x + c_2 = y + c_2 - c_1$, unde c_2 și c_1 sînt constante. Considerînd că pentru problema (4.15) se dau datele inițiale

$$u(x_i, 0) = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

unde β este cunoscut pentru $y = 0$ și $0 < x_i < 1$, atunci valoarea lui u pentru $y > 0$ se obține prin integrare de-a lungul caracteristicii trasate prin punctul x_i pe segmentul inițial. În acest caz $u(x, y)$ din soluția pe caracteristică este

$$u(x, y) = u_i + (x - x_i) = u_i + y, \quad (4.16)$$

unde $y = x - x_i$ pentru orice $x_i \in [0, 1]$. Soluția pentru (4.15) este unică [31] în domeniul mărginit de caracteristica ce trece prin $x = 0$ și are panta 1 și caracteristica ce trece prin punctul $x = 1$ și are panta 1.

În general, dacă curba inițială pe care sînt date condițiile inițiale este o caracteristică, atunci pentru o alegere neadecvată a datelor inițiale se poate întimpla să nu existe o soluție, dar indiferent de alegerea datelor inițiale soluția oricum nu este unică. Pentru a pune în evidență modul cum se propagă valorile inițiale discontinue în domeniu, se va considera din nou ecuația (4.15), dar de această dată se presupune că datele inițiale pe axa Ox sînt definite astfel :

$$u = \begin{cases} f(x), & 0 < x < x_1, \\ g(x), & x_1 < x < 1. \end{cases} \quad (4.17)$$

Se presupune că $f(x_1) \neq g(x_1)$ astfel că u are două valori în punctul x_1 . Din (4.17) se vede că această valoare dublă pentru u va exista de-a lungul caracteristicii $y = x - x_1$. Valoarea din stînga va fi determinată de $f(x)$ și valoarea din dreapta de $g(x)$. Dacă există o discontinuitate în datele inițiale, aceasta va fi propagată în domeniul de integrare.

Exemplu. Pentru $y = 0$ se dă condiția inițială pe domeniul $[0, 1]$:

$$u = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ -x + 1, & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Soluția ecuației $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ este

$$u(x, y) = \begin{cases} x_i^2 + y \text{ pe } y = x - x_i \text{ la stînga caracteristicii} \\ y = x - \frac{1}{2} \\ x - 3x_i + 1 \text{ pe } y = x - x_i \text{ la dreapta caracteristicii} \\ y = x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

În cazul în care există o curbă necaracteristică pe care sînt definite condițiile inițiale cu discontinuități în punctele unde rețeaua de caracteristici intersectează curba, atunci aceste discontinuități se propagă de-a lungul întregii rețele de caracteristici. Din exemplul prezentat se vede cum curbele caracteristice apar ca frontiere naturale pentru determinarea acelor porțiuni din domeniul soluției, ce sînt influențate de condițiile limită. Propagarea discontinuităților și segmentarea domeniului soluției cu ajutorul caracteristicilor conduce la anumite restricții privind metodele cu diferențe finite. Datorită acestor fapte se impune o mare atenție în a ne asigura că modelele discrete ale sistemelor continue reflectă toate aceste elemente.

Noțiunea de caracteristică este esențială pentru metodele numerice ale sistemelor hiperbolice, fiind un procedeu numeric natural în două variabile independente. Raționamentul de bază al acestui procedeu constă în faptul că prin o alegere adecvată a unui sistem de coordonate, sistemul original de ecuații hiperbolice de ordinul întâi poate fi înlocuit printr-un sistem exprimat în coordonate caracteristice, care este un sistem natural în sensul că în funcție de aceste coordonate operația de diferențiere este mult mai simplificată.

Se consideră sistemul hiperbolic cvasiliniar

$$\sum_{i=1}^n \{a_{ji} u_x^i + b_{ji} u_t^i\} + d_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.18)$$

de n ecuații cu n funcții necunoscute u^i , $i = 1, 2, \dots, n$, unde coeficienții a_{ji} , b_{ji} și d_j sînt funcții de x, t și u^i .

Dacă coeficienții nu depind de u^i , sistemul (4.18) este liniar. Folosind relațiile

$$A = [a_{ji}], \quad B = [b_{ji}], \quad D = [d_j], \quad U = [u^i], \quad (4.19)$$

unde A și B sînt matrice de ordinul n , iar D și U sînt vectori coloană, cu (4.19) sistemul (4.18) devine

$$AU_x + BU_t + D = 0. \quad (4.20)$$

Ecuatiei (4.20) i se pot face o serie de transformări liniare

$$V = PU, \quad (4.21)$$

unde $\det P \neq 0$, $P = [p_{ji}]$, iar p_{ji} pot fi funcții de x , t și de u^i , dar nu de derivatele lui u^i . O astfel de transformare are expresia

$$v^j = \sum_{i=1}^n p_{ji} u^i, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.22)$$

Cu această transformare (4.20) ia o nouă formă și noul sistem care se obține este similar cu sistemul original în sensul că orice soluție a noului sistem este soluție și a sistemului original. Transformarea liniară a lui (4.20)

$$PAU_x + PBU_t + PD = 0 \quad (4.23)$$

este utilizată pentru găsirea unei forme canonice. Pentru acest lucru se presupune că are loc relația

$$PA = EPB, \quad (4.24)$$

unde E este o matrice diagonală

$$E = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \cdots 0 & \\ 0 & e_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & e_n \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Atunci (4.23) devine

$$EPBU_x + PBU_t + PD = 0. \quad (4.26)$$

Notînd

$$PB = A^* = [a_{ji}^*], \quad PD = D^* = [d_j^*], \quad (4.27)$$

ecuația (4.26) devine

$$EA^*U_x + A^*U_t + D^* = 0. \quad (4.28)$$

Ecuția a k -a din sistemul (4.28) are forma

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}^* (e_k u_x^k + u_t^k) + d_k^* = 0. \quad (4.29)$$

Considerînd vectorul unitate $\alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$ din planul xOt , obținem

$$e_k = \frac{\alpha}{\beta} = \cotg \theta.$$

Cu această expresie pentru e_k se poate calcula

$$\begin{aligned} e_k U_x^k + U_t^k &= \frac{\alpha}{\beta} U_x^k + U_t^k = \frac{1}{\beta} \{ \alpha U_x^k + U_t^k \beta \} = \\ &= \frac{1}{\beta} \{ U_x^k \cos \theta + U_t^k \sin \theta \}, \end{aligned}$$

care, abstractie făcînd de β , este derivata după o direcție, definită de vectorul $\alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$. În acest caz orice ecuație a sistemului transformat (4.28) conține diferențială într-o singură direcție.

Determinarea matricei diagonale E se poate face din relația de definire a ei (4.24) care scrisă sub forma unui sistem echivalent arată astfel:

$$\sum_{k=1}^n p_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^n e_j p_{jk} b_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sau

$$\sum_{k=1}^n (a_{ki} - e_j b_{ki}) p_{jk} = 0, \quad (4.30)$$

care este un sistem omogen de n ecuații cu n necunoscute p_{jk} , $k = 1, 2, \dots, n$. Acest sistem de ecuații algebrice,

în care A și B sînt funcții de x, t și u , are o soluție banală dacă și numai dacă

$$\det(A - e_j B) = 0. \quad (4.31)$$

În acest caz se aleg n rădăcini pentru $e_j, j = 1, 2, \dots, n$ și se determină elementele matricei P din (4.30). Pentru ca cele prezentate mai sus să aibă sens se presupune că $\det B \neq 0, \det P \neq 0$ și $\det A^* = \det PB \neq 0$. Ecuația (4.28) se numește forma normală a sistemului. Direcția $\alpha_k \mathbf{i} + \beta_k \mathbf{j}$ pentru care $e_k = \alpha_k / \beta_k$ se numește *direcția caracteristică* k . Ecuațiile diferențiale

$$\cotg \theta_k = \frac{dx}{dt} = e_k \quad (4.32)$$

sînt numite caracteristicile sistemului. În general, direcțiile caracteristice nu sînt cunoscute pînă cînd soluția problemei nu este obținută. În cazul unui sistem de două ecuații conceptul de caracteristici poate fi utilizat la transformarea sistemului dat într-o formă mult mai simplă, care constă din patru ecuații și se numește sistem canonic, care oferă o serie de avantaje procesului de calcul. Pentru un sistem de două ecuații se construiește sistemul canonic avînd caracteristicile sub forma a două familii de curbe de un parametru, care pot fi considerate uneori ca fiind coordonatele naturale, nu neapărat ortogonale. Prin fiecare punct trece cîte o curbă din fiecare familie. Cele două curbe au direcții diferite, deoarece e_j sînt de obicei funcții atît de variabile dependente cît și cele independente. Aceste curbe caracteristice pot fi utilizate ca noi axe de coordonate pentru noul sistem:

$$x = x(\alpha, \beta), \quad t = t(\alpha, \beta). \quad (4.33)$$

În cazul în care se identifică α cu familia e_1 și β cu familia e_2 astfel ca

$$x_\alpha = \frac{dx}{dt} t_\alpha = e_1 t_\alpha, \quad x_\beta = e_2 t_\beta,$$

atunci $e_j u_x^i + u_i^j$ pentru $j = 1, 2$ devin

$$e_1 u_x^i + u_i^1 = \frac{x_\alpha}{t_\alpha} u_x^i + u_i^1 = \frac{1}{t_\alpha} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial u^i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \alpha} \right) = \frac{u_\alpha^i}{t_\alpha},$$

$$e_2 u_x^i + u_i^2 = \frac{U_\beta^i}{t_\beta}.$$

Pentru un sistem de două ecuații diferențiale ecuația (4.28) se poate scrie sub forma echivalentă

$$a_{11}^* (e_1 u_x^1 + u_1^1) + a_{12}^* (e_1 u_x^2 + u_1^2) + d_1^* = 0,$$

$$a_{21}^* (e_2 u_x^1 + u_1^2) + a_{22}^* (e_2 u_x^2 + u_1^2) + d_2^* = 0,$$

care devine

$$a_{11}^* u_\alpha^1 + a_{12}^* u_\alpha^2 + d_1^* t_\alpha = 0, \quad (4.34)$$

$$a_{21}^* U_\beta^1 + a_{22}^* U_\beta^2 + d_2^* t = 0.$$

Ecuațiile date în (4.34) împreună cu

$$x_\alpha = e_1 t_\alpha, \quad x_\beta = e_2 t_\beta \quad (4.35)$$

formează cele patru ecuații canonice ale sistemului dat și depind de variabilele u^1, u^2, x și t . Aceste ecuații canonice pot fi construite din sistemul original fără a fi necesară rezolvarea acestuia. Sistemul de ecuații canonice are proprietatea că fiecare ecuație conține derivatele variabilelor numai într-o singură direcție. Aceste direcții coincid cu direcțiile de coordonate, în plus sistemul canonic nu conține variabilele independente α și β în mod explicit.

Orice soluție a sistemului canonic caracteristic [31] satisface sistemul original și reciproc. Dacă cele două ecuații diferențiale ale sistemului original sînt liniare, atunci e_1 și e_2 sînt funcții cunoscute de x și t și ecuațiile (4.35) nu trebuie cuplate cu (4.34), deoarece (4.35) determină două familii de curbe caracteristice independente de soluție. Dacă $d_1^* = d_2^* = 0$ și ceilalți coeficienți depind numai de u^1 și u^2 , situație similară cu cazul liniar, atunci e_1 și e_2 sînt funcții de u^1 și u^2 și ecuațiile (4.34) sînt independente de x și t și pot fi rezolvate separat. În cazul în care $d_1^* \neq d_2^* \neq 0$ dar depind de u^1 și u^2 , cele prezentate anterior rămîn valabile.

4.2. Prezentarea metodei caracteristicilor pentru un sistem de două ecuații evasiliniare

Să considerăm un sistem de două ecuații evasiliniare cu derivate parțiale pentru cazul a două variabile independente x, y și două variabile dependente f și g , scris sub forma

$$E_1 \equiv \alpha_1 f_x + \alpha_2 f_y + \alpha_3 g_x + \alpha_4 g_y + \alpha_5 = 0, \quad (4.36)$$

$$E_2 \equiv \beta_1 f_x + \beta_2 f_y + \beta_3 g_x + \beta_4 g_y + \beta_5 = 0, \quad (4.37)$$

unde α_i, β_i pentru $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sînt funcții cunoscute, care depind de $x, y, f, g, f_x, f_y, g_x, g_y$. Presupunem că funcțiile α_i și β_i sînt de clasă C^K și condiția

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{\alpha_4}{\beta_4} \quad (4.38)$$

nu este satisfăcută în nici un punct din domeniul considerat. Condiția (4.38) pune în evidență faptul că ecuațiile (4.36) și (4.37) sînt liniar independente.

Se consideră o combinație liniară a lui E_1 și E_2 de forma

$$E = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_1) f_x + (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_2) f_y + \\ + (\lambda_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_3) g_x + (\lambda_1 \alpha_4 + \lambda_2 \beta_4) g_y + (\lambda_1 \alpha_5 + \lambda_2 \beta_5). \quad (4.39)$$

Din presupunerea că $f(x, y)$ și $g(x, y)$ sînt analitice rezultă următoarele expresii:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy. \quad (4.40)$$

Dacă (4.39) se amplifică cu dx , atunci

$$E dx = (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1) f_x dx + (\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_2) f_y dx + \\ + (\lambda_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_3) g_x dx + (\lambda_1 \alpha_4 + \lambda_2 \beta_4) g_y dx + (\lambda_1 \alpha_5 + \\ + \lambda_2 \beta_5) dx. \quad (4.41)$$

Din (4.40) se pot explicita următorii termeni :

$$f_x dx = df - f_y dy, \quad g_x dx = dg - g_y dy. \quad (4.42)$$

Înlocuind expresiile (4.42) în (4.41), rezultă

$$\begin{aligned} Edx = & (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1) (df - f_y dy) + (\lambda_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_3) (dg - g_y dy) + \\ & + (\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_2) f_y dx + (\lambda_1 \alpha_4 + \lambda_2 \beta_4) g_y dx + \\ & + (\lambda_1 \alpha_5 + \lambda_2 \beta_5) dx \end{aligned}$$

sau după ordonare

$$\begin{aligned} Edx = & (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1) df + (\lambda_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_3) dg + \\ & + (\lambda_1 \alpha_5 + \lambda_2 \beta_5) dx + [(\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_2) dx - \\ & - (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1) dy] f_y + [(\lambda_1 \alpha_4 + \lambda_2 \beta_4) dx - (\lambda_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_3) dy] g_y. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Din analiza expresiilor din parantezele drepte se vede că pentru o alegere adecvată a lui λ_1 și λ_2 are loc relația

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1}{\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_2} = \frac{\lambda_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_3}{\lambda_1 \alpha_4 + \lambda_2 \beta_4}. \quad (4.44)$$

Atunci (4.43) devine

$$\begin{aligned} Edx = & (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1) df + (\lambda_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_3) dg + \\ & + (\lambda_1 \alpha_5 + \lambda_2 \beta_5) dx, \end{aligned} \quad (4.45)$$

de unde rezultă că derivatele funcțiilor g și f sînt luate în aceeași direcție dy/dx , care se numește direcție caracteristică. Se știe că dacă $y = y(x)$ este ecuația unei curbe, atunci dy/dx este panta tangentei în orice punct al acestei curbe. Din (4.44) se poate obține

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\beta_1 dy - 2 dx}{\alpha_1 dy - \alpha_2 dx} = \frac{\beta_3 dy - \beta_4 dx}{\alpha_3 dy - \alpha_4 dx}. \quad (4.46)$$

Dacă se consideră ecuația formată din ultimele două rapoarte ale lui (4.46), rezultă

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \beta_3 - \lambda_3 \beta_1) (dy)^2 - 2 (\alpha_1 \beta_4 - \alpha_4 \beta_1) dy dx + \\ + (\alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2) (dx)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Introducînd notațiile

$$A = \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1, \quad B = \alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1, \quad (4.48)$$

$$C = \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2,$$

(4.47) devine

$$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0. \quad (4.49)$$

Această ecuație are două rădăcini reale și distincte cînd

$$B^2 - AC > 0.$$

Dacă se notează

$$\eta = \frac{dy}{dx}, \quad (4.50)$$

ecuația (4.49) devine

$$A\eta^2 - 2B\eta + C = 0 \quad (4.51)$$

și are două soluții reale și distincte η_+ și η_- . Deci în fiecare punct $M \in \Omega$, unde Ω este domeniul de existență al soluției, există două direcții caracteristice care trec prin acest punct :

$$\frac{dy}{dx} = \eta_+, \quad \frac{dy}{dx} = \eta_-. \quad (4.52)$$

Coeficienții A , B și C sînt funcții de α_i și β_i , care la rîndul lor sînt funcții de f , g , x , y , deci η_+ și η_- vor fi funcții de x , y , f , g , adică

$$\frac{dy}{dx} = \eta_+(x, y, f, g), \quad \frac{dy}{dx} = \eta_-(x, y, f, g). \quad (4.53)$$

În momentul în care o soluție $f(x, y)$ și $g(x, y)$ a sistemului (4.36) și (4.37) este cunoscută, (4.53) devine un sistem de două ecuații diferențiale ordinare de ordinul întîi, cu variabile separabile, care definesc două familii de curbe cu un parametru care se numesc [33] caracteristici, C_+ și C_- în planul xOy . Aceste două familii formează în domeniul soluției o rețea de coordonate curbilinii.

Dacă α_i și β_i sînt funcții numai de x și y , atunci A , B și C sînt funcții numai de x și y și η_- și η_+ vor fi tot funcții

numai de x și y . În acest caz particular, determinarea curbelor caracteristice nu mai impune cunoașterea prealabilă a unei soluții $f(x, y)$, $g(x, y)$ a sistemului (4.36) și (4.37), lucru ce simplifică foarte mult problema și calculele. Înlocuindu-se η_+ și η_- în expresia (4.46), rezultă două ecuații pentru raportul $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ de forma

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{\beta_1\eta_+ - \beta_2}{\alpha_1\eta_+ - \alpha_2}; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{\beta_1\eta_- - \beta_2}{\alpha_1\eta_- - \alpha_2}. \quad (4.54)$$

Folosind (4.54) pentru eliminarea lui λ_1 și λ_2 din (4.45), rezultă

$$Fdf + (A\eta_+ - G)dg + (K\eta_+ - H)dx = 0, \quad (4.55)$$

$$Fdf + (A\eta_- - G)dg + (K\eta_- - H)dx = 0,$$

unde

$$F = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2, \quad G = \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3, \quad (4.56)$$

$$K = \alpha_1\beta_5 - \beta_1\alpha_5, \quad H = \alpha_2\beta_5 - \beta_2\alpha_5,$$

$$A = \alpha_1\beta_3 - \beta_1\alpha_3.$$

Astfel, se obțin patru ecuații caracteristice de-a lungul curbelor C_+ și C_- :

$$\left. \begin{aligned} dy - \eta_+ dx &= 0 \\ Fdf + (A\eta_+ - G)dg + (K\eta_+ - H)dx &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ de-a lungul lui } C_+, \quad (4.57)$$

$$(4.58)$$

$$\left. \begin{aligned} dy - \eta_- dx &= 0 \\ Fdf + (A\eta_- - G)dg + (K\eta_- - H)dx &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ de-a lungul lui } C_-. \quad (4.59)$$

$$(4.60)$$

Sistemul de ecuații (4.57)–(4.60) prezintă un mare avantaj prin faptul că fiecare ecuație conține numai diferențiale totale ale tuturor variabilelor. Orice soluție a sistemului original (4.36) și (4.37) satisface sistemul (4.57)–(4.60) și reciproc [8].

4.3. Aproximații cu diferențe finite

În scopul determinării unei soluții a sistemului (4.57)–(4.60) se vor folosi o serie de metode cu diferențe finite. Fie un punct $P \in \Omega$, unde Ω este domeniul de existență al soluției pentru problema considerată. Punctul P se află la intersecția celor două caracteristici η_+ și η_- reprezentate de curbele C_+ și C_- .

Curba C_- este caracteristica ce trece prin B , iar C_+ este caracteristica ce trece prin A (v. fig. 4.8). Presupunind că punctele $A(x_A, y_A, f_A, g_A)$ și $B(x_B, y_B, f_B, g_B)$ sînt cunoscute, urmează a se determina punctul $P(x_P, y_P, f_P, g_P)$.

În cazul utilizării unei aproximații liniare de

ordinul întâi de precizie, sistemul caracteristic (4.57)–(4.60) devine

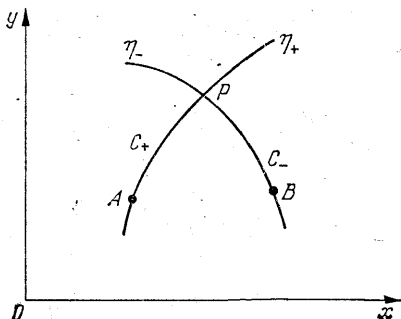


Fig. 4.8.

$$y_P - y_A - (\eta_+)_A(x_P - x_A) = 0, \quad (4.61)$$

$$F_A(f_P - f_A) + (A\eta_+ - G)_A(g_P - g_A) + \\ + (K\eta_+ - H)_A(x_P - x_A) = 0, \quad (4.62)$$

$$y_P - y_B - (\eta_-)_B(x_P - x_B) = 0, \quad (4.63)$$

$$F_B(f_P - f_B) + (A\eta_- - G)_B(g_P - g_B) + \\ + (K\eta_- - H)_B(x_P - x_B) = 0. \quad (4.64)$$

Sistemul (4.61)–(4.64) este un sistem caracteristic scris cu ajutorul diferențelor, unde funcțiile η_+ , η_- , F , G , K , H , A sînt funcții de x , y , f și g , evaluate în punctele A și B , deci sînt cunoscute. Pentru determinarea punctului P la intersecția celor două caracteristici care trec prin A și B se poate vedea că x_P și y_P rezultă din rezolvarea sistemului format de (4.61) și (4.63). Valorile x_P și y_P obținute se introduc în (4.62) și (4.64), care formează un sistem cu

două necunoscute f_P și g_P ce determină în mod unic punctul P . În cazul în care se utilizează aproximațiile de ordinul doi de precizie sistemul caracteristic (4.57)–(4.64) devine

$$y_P - y_A - \frac{1}{2} [(\eta_+)_{P} + (\eta_+)_{A}] (x_P - x_A) = 0, \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (F_P + F_A)(f_P - f_A) + \frac{1}{2} [(A\eta_+ - G)_P + (A\eta_+ - G)_A](g_P - g_A) + \\ & + \frac{1}{2} [(K\eta_+ - H)_P + (K\eta_+ - H)_A](x_P - x_A) = 0, \quad (4.66) \end{aligned}$$

$$y_P - y_B - \frac{1}{2} [(\eta_-)_{P} + (\eta_-)_{B}] (x_P - x_B) = 0, \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (F_P + F_B)(f_P - f_B) + \frac{1}{2} [(A\eta_- - G)_P + (A\eta_- - G)_B](g_P - g_B) + \\ & + \frac{1}{2} [(K\eta_- - H)_P + (K\eta_- - H)_B](x_P - x_B) = 0, \quad (4.68) \end{aligned}$$

sistem care nu mai este liniar în necunoscutele x_P, y_P, f_P, g_P , dacă $\eta_+, \eta_-, F, G, K, H, A$ sînt dependente de x, y, f, g . Pentru determinarea soluției numerice sînt necesare o serie de metode iterative [32, 34, 36, 37]. Presupunînd că se utilizează o rețea de caracteristici și η_+ și η_- depind numai de x și y , ecuațiile (4.61)–(4.63), (4.65) și (4.67) se pot integra imediat și rețeaua de caracteristici poate fi determinată înainte de a se calcula f și g . În [37] se dă o metodă ce utilizează intervale specifice în direcția lui y și are loc o raportare a valorilor lui f și g de la începutul intervalului cu cele de la sfîrșitul intervalului.

4.4. Rețele de caracteristici

Considerînd rețeaua din fig. 4.9, pentru fiecare pereche de puncte A și B situate pe rețeaua de caracteristici, sistemele (4.61)–(4.64) și (4.65)–(4.68) reprezintă ecuații

pentru patru necunoscute x_P, y_P, f_P, g_P . Dacă se utilizează sistemul (4.61)–(4.64), se obține un sistem de valori pentru x_P, y_P, f_P, g_P . În cazul cînd se consideră sistemul (4.65)–(4.68) și soluția se obține prin iterații, soluțiile sistemului (4.61)–(4.64) se utilizează ca valori de start. Sistemul (4.65)–(4.68) va avea ca soluție valorile $x_P, y_P,$

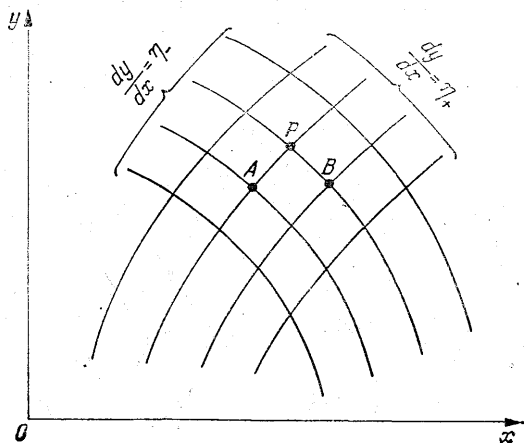


Fig. 4.9.

f_P, g_P , care reprezintă coordonatele punctului P din rețea și funcțiile f_P și g_P calculate în punctul P .

Utilizarea rețelelor de caracteristici conduce la desfășurarea calculelor după următorul algoritm. Fie o curbă Γ din planul xOy , unde în fiecare punct al curbei sînt cunoscute mărimile x, y, f, g , pentru punctele $P_i, i = 1, 2, \dots, 7$ (v. fig. 4.10). Dacă se ia sistemul de ecuații (4.61)–(4.64) sau (4.65)–(4.68) cu x, y, f, g date pentru punctele P_i , atunci mărimile x, y, f, g se pot calcula în punctele de la nivelul următor $Q_i, i = 1, 2, \dots, 6$, după ce se poate trece la un nou pas, determinîndu-se

$$y_{R_i} - y_{Q_i} = \frac{1}{2} [(\eta_-)_{Q_i} + (\eta_-)_{R_0}] (x_{R_i} - x_{Q_i}), \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (F_{Q_1} + F_{R_0}) (f_{R_0} - f_{Q_1}) + \\
& + \frac{1}{2} [(A\eta_- - F)_{Q_1} + (A\eta_- - F)_{R_0}] (g_{R_0} - g_{Q_1}) + \\
& + \frac{1}{2} [(K\eta_- - H)_{Q_1} + (K\eta_- - H)_{R_0}] (x_{R_0} - x_{Q_1}) = 0. \quad (4.72)
\end{aligned}$$

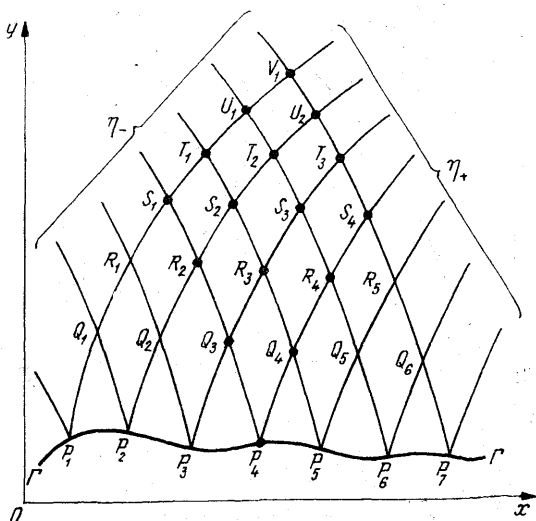


Fig. 4.10.

Sistemul format din ecuațiile (4.69) și (4.70) reprezintă două relații independente cu patru variabile x, y, f, g ; același lucru se poate spune despre sistemul format din ecuațiile (4.71) și (4.72). Datorită acestui fapt apare în mod evident necesitatea găsirii a două relații care împreună cu (4.69)–(4.70), respectiv (4.71)–(4.72) să poată determina în mod unic x, y, f, g pentru nodurile R_0, T_{-1}, \dots ce aparțin curbei frontieră Γ_1 . Aceste două ecuații pot fi ecuația curbei Γ_1

$$x = u(y) \quad (4.73)$$

și funcția

$$f = \varphi(x) \quad (4.73)$$

sau altă combinație de forma

$$y = v(x), \quad g = \psi(y). \quad (4.74)$$

Presupunind că se dau ecuațiile (4.74), algoritmul de calcul pentru determinarea nodului R_0 se va desfășura astfel (v. fig. 4.11):

1° Ecuația (4.69) devine $v(x_{R_0}) - y_{Q_1} - (\eta_-)_{Q_1}(x_{R_0} - x_{Q_1}) = 0$ cu soluția x_{R_0} .

2° Ordonata y_{R_0} se poate calcula din ecuația $y_{R_0} = v^*(x_{R_0})$, cu abscisa x_{R_0} determinată la 1°.

3° Variabila dependentă g_{R_0} se poate calcula din ecuația $g_{R_0} = \psi(y_{R_0})$, unde y_{R_0} este cea determinată la 2°.

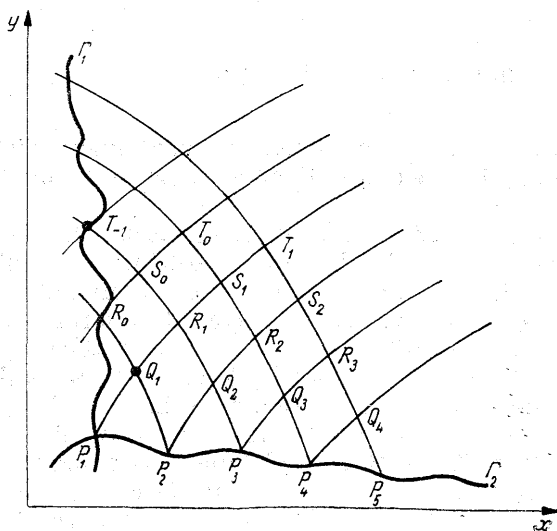


Fig. 4.11.

4° Ecuația (4.70) depinde de o singură necunoscută f_{R_0} .

În urma acestor patru etape de calcul s-a obținut estimăția inițială pentru mărimile x, y, f, g ale punctului

$R_0 \in \Gamma_1$, care poate fi utilizată într-un calcul iterativ cu ecuațiile (4.71) și (4.72) :

$$v(x_{R_0}^{(k+1)}) - y_{Q_1} = \frac{1}{2} [(\eta_-)_{Q_1} + (\eta_-)_{R_0}^{(k)}] (x_{R_0}^{(k+1)} - x_{Q_1}) = 0,$$

$$y_{R_0}^{(k+1)} = v(x_{R_0}^{(k+1)}), \quad g_{R_0}^{(k+1)} = \dot{\psi}(y_{R_0}^{(k+1)}),$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (F_{Q_1}^{(k)} + F_{R_0}^{(k)}) (f_{R_0}^{(l+1)} - f_{Q_1}) = \\ & = -\frac{1}{2} [(A\eta_- - G)_{R_0}^{(k)} + (A\eta_- - G)_{Q_1} (f_{R_0}^{(k+1)} - f_{Q_1})] - \\ & - \frac{1}{2} [(K\eta_- - H)_{Q_1} + (K\eta_- - H)_{R_0}^{(k)}] (x_{R_0}^{k+1} - x_{Q_1}), \end{aligned}$$

$k + 1$ indicînd ordinul de iterație.

4.5. Metoda caracteristicilor în cazul unei rețele rectangulare cu specificarea intervalelor de timp

Presupunem că f și g sînt funcții cunoscute de x la nivelul l sau prin condițiile inițiale, sau ca rezultate ale unui calcul precedent. Se cere determinarea lor la nivelul $l + 1$ în direcția axei y (v. fig. 4.12). Se consideră o rețea de parametri h, k și $\alpha = k/h$. Fie P un nod al rețelei la nivelul $l + 1$, iar A, B, C trei noduri adiacente la nivelul l . Caracteristicile η_+ și η_- , reprezentate prin curbele C_+ și C_- care trec prin nodul $P \in \Omega$, intersectează nivelul l în punctele R și S . Se pune problema determinării nodului P , adică x_P, y_P, f_P, g_P cu ajutorul nodurilor A, B, C cunoscute la nivelul l . Deoarece P este un nod al rețelei, coordonatele lui x_P și y_P sînt cunoscute. Pentru determinarea mărimilor f_P și g_P utilizînd metoda caracteristicilor este necesar să se cunoască $R(x_R, y_R, f_R, g_R)$ și $S(x_S, y_S, f_S, g_S)$. Mărimile y_R și y_S sînt cunoscute, deoarece R și S aparțin nivelului l al rețelei rectangulare construite pe domeniul

de existență al soluției Ω , iar mărimile x_R și x_S sînt date de sistemul de ecuații

$$y_P - y_R = (\eta_+)_C (x_P - x_R), \quad (4.75)$$

$$y_P - y_S = (\eta_-)_C (x_P - x_S). \quad (4.76)$$

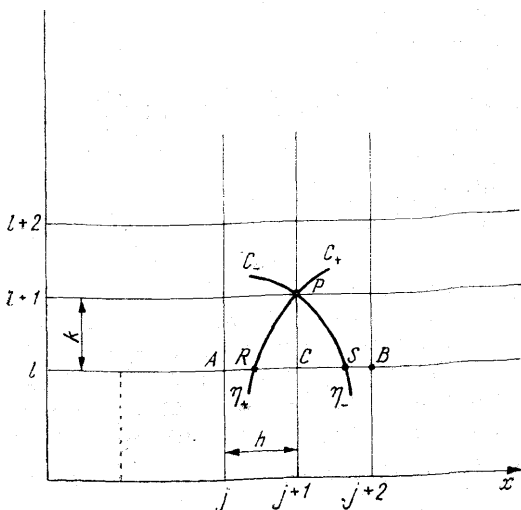


Fig. 4.12.

În ecuațiile folosite pentru determinarea lui x_R și x_S s-a presupus că pasul k în direcția y este suficient de mic, astfel încît porțiunea de caracteristică cuprinsă între două nivele l și $l + 1$ este considerată a fi un segment de dreaptă cu panta $(\eta_+)_C$ pentru \overline{PR} și $(\eta_-)_C$ pentru \overline{PS} .

Pentru determinarea valorilor f_R, g_R, f_S, g_S se utilizează un procedeu de interpolare liniară care ține seamă de faptul că punctul necunoscut R se află între două noduri cunoscute A și C ale rețelei de la nivelul l , analog pentru S , obținîndu-se ecuațiile următoare :

$$f_R = f_C [1 - (\eta_+)_C^{-1} \alpha] + f_A \alpha (\eta_+)_C^{-1}, \quad (4.77)$$

$$g_R = g_C [1 - (\eta_+)_C^{-1} \alpha] + g_A \alpha (\eta_+)_C^{-1}, \quad (4.78)$$

$$f_s = f_c [1 - (\eta_-)_c^{-1} \alpha] + f_A \alpha (\eta_-)_c^{-1}, \quad (4.79)$$

$$g_s = g_c [1 - (\eta_-)_c^{-1} \alpha] + g_A \alpha (\eta_-)_c^{-1}, \quad (4.80)$$

unde $\alpha = h/k$ este parametrul rețelei.

Rezumînd modul de determinare a celor două puncte R și S , se poate spune că :

x_R este determinat de ecuația (4.75) ;

y_R este determinat de faptul că R aparține nivelului l al rețelei rectangulare ;

f_R este determinat de ecuația (4.77) ;

g_R este determinat de ecuația (4.78) ;

x_S este determinat de ecuația (4.76) ;

y_S este determinat de faptul că S aparține nivelului l al rețelei rectangulare ;

f_S este determinat de ecuația (4.79) ;

g_S este determinat de ecuația (4.80).

În urma algoritmului prezentat se vede că punctele $R (x_R, y_R, f_R, g_R)$ și $S (x_S, y_S, f_S, g_S)$ sînt cunoscute și acum este posibilă determinarea nodului rețelei P ce aparține nivelului $l + 1$. Valorile x_P și y_P sînt cunoscute prin faptul că P este un nod al rețelei de parametrii h, k și α . Valorile f_P și g_P se pot acum obține cu ajutorul următorului sistem :

$$F_c (f_P - f_R) + (A\eta_+ - G)_c (g_P - g_R) + \\ + (K\eta_+ - H)_c (x_P - x_R) = 0, \quad (4.81)$$

$$F_c (f_P - f_S) + (A\eta_- - G)_c (g_P - g_S) + \\ + (K\eta_- - H)_c (x_P - x_S) = 0. \quad (4.82)$$

Algoritmul de calcul (4.75)–(4.82) pentru determinarea nodului P al rețelei este un algoritm de ordinul întii de precizie. În cazul în care se cere o precizie de ordin superior mărimile $x_R, x_S, f_R, f_S, g_S, g_R$ determinate cu ajutorul algoritmului (4.75)–(4.82) vor servi ca valori inițiale pentru algoritmul cu o precizie de ordinul superior dat prin următoarele ecuații :

$$y_P - y_R = \frac{1}{2} [(\eta_+)_P^{(k)} + (\eta_+)_R^{(k)}] (x_P - x_R^{(k+1)}), \quad (4.83)$$

$$y_P - y_S = \frac{1}{2} [(\eta_-)_P^{(k)} + (\eta_-)_S^{(k)}] (x_P - x_S^{(k+1)}). \quad (4.84)$$

Relațiile (4.83) și (4.84) dau abscisele punctelor R și S după $k + 1$ iterații. Pentru determinarea mărimilor f_R, g_R, f_S, g_S se folosește o metodă de interpolare de ordinul al doilea sub forma următoare :

$$f_R^{(k+1)} = f_C - \frac{1}{2h}(f_A - f_B)(x_R^{(k+1)} - x_C) + \frac{1}{2h^2}(f_A + f_B - 2f_C)(x_R^{(k+1)} - x_C)^2, \quad (4.85)$$

$$g_R^{(k+1)} = g_C - \frac{1}{2h}(g_A - g_B)(x_R^{(k+1)} - x_C) + \frac{1}{2h^2}(g_A + g_B - 2g_C)(x_R^{(k+1)} - x_C)^2, \quad (4.86)$$

$$f_S^{(k+1)} = f_C + \frac{1}{2h}(f_A - f_B)(x_S^{(k+1)} - x_C) + \frac{1}{2h^2}(f_A + f_B - 2f_C)(x_S^{(k+1)} - x_C)^2, \quad (4.87)$$

$$g_S^{(k+1)} = g_C + \frac{1}{2h}(g_A - g_B)(x_S^{(k+1)} - x_C) + \frac{1}{2h^2}(g_A + g_B - 2g_C)(x_S^{(k+1)} - x_C)^2. \quad (4.88)$$

Relațiile (4.85)–(4.88) permit calculul mărimilor $f_R^{(k+1)}, g_R^{(k+1)}, f_S^{(k+1)}, g_S^{(k+1)}$ după un număr de iterații, oferind un grad de precizie mult mai bun. Coordonatele x_P și y_P sînt cunoscute cu ajutorul parametrilor rețelei, deci urmează determinarea valorilor $f_P^{(k+1)}$ și $g_P^{(k+1)}$ cu ajutorul ecuațiilor

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(F_R^{(k+1)} + F_P^{(k)})(f^{(k+1)} - f_R^{(k+1)}) + \frac{1}{2}[(A\eta_+ - G)_R^{(k+1)} + \\ & + (A\eta_+ - G)_P^{(k)}](g_P^{(k+1)} - g_R^{(k+1)}) + \frac{1}{2}[(K\eta_+ - H)_R^{(k+1)} + \\ & + (K\eta_+ - H)_P^{(k)}](x_P - x_R^{(k+1)}) = 0, \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(F_S^{(k+1)} + F_P^{(k)})(f_P^{(k+1)} - f_S^{(k+1)}) + \frac{1}{2}[(A\eta_- - G)_S^{(k+1)} + \\ & + (A\eta_- - G)_P^{(k)}](g_P^{(k+1)} - g_S^{(k+1)})] + \frac{1}{2}[(K\eta_- - H)_S^{(k+1)} + \\ & + (K\eta_- - H)_P^{(k)}](x_P - x_S^{(k+1)}) = 0. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Algoritmul (4.83)–(4.90) permite determinarea unui nod P al unei rețele rectangulare utilizând metoda caracteristicilor și oferind un grad de precizie superior. În fig. 4.13 dacă se cunosc nodurile P_i , $i = 1, \dots, N$, ale rețelei la

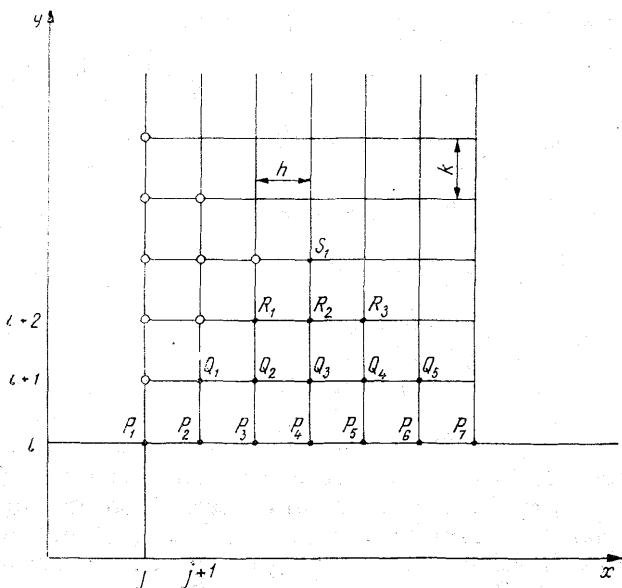


Fig. 4.13.

nivelul l , nodurile Q_i , $i = 1, \dots, N - 2$, pot fi determinate la nivelul $l + 1$. Cu ajutorul acestora se determină nodurile R_i pentru $i = 1, \dots, N - 4$ de la nivelul $l + 2$ etc. Mărimile f , g în aceste noduri pot fi calculate cu ecuațiile (4.75)–(4.82), dacă se utilizează aproximațiile de ordinul întâi, sau cu ecuațiile (4.83)–(4.90) când se utilizează o aproximație de ordin superior și în acest caz mărimile furnizate de (4.75)–(4.82) sînt considerate valori de start pentru ecuațiile iterative (4.83)–(4.90). Dacă mărimile f și g pentru nodurile rețelei de la nivelul j în direcția x sînt cunoscute, se pot determina punctele din rețea marcate cu ceruțele în fig. 4.13, folosind același procedeu ca mai sus.

4.6. Determinarea nodurilor de pe frontieră

Se consideră o rețea rectangulară de parametri h , k , α și curba frontieră Γ de ecuație cunoscută $y = u(x)$. Pe Γ se cunoaște $f = \varphi(x)$ sau $g = \psi(y)$, unde f , φ și ψ sînt funcții cunoscute (v. fig. 4.14). Se presupune că

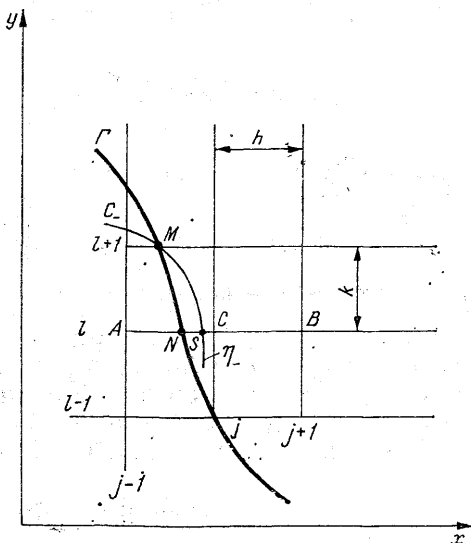


Fig. 4.14.

valorile lui f și g în A , N , C , B , adică punctele de la nivelul l sînt cunoscute și se pune problema determinării punctului $M(x_M, y_M, f_M, g_M)$ care se află la nivelul $l + 1$ și pe curba Γ . Pentru prezentarea algoritmului de calcul se ține seama de faptul că sînt date

$$y = u(x), \quad f = \varphi(x) \quad (4.91)$$

sau

$$y = u(x), \quad g = \psi(y) \quad (4.92)$$

Prin punctul $M \in \Omega$ se duce caracteristica η_- prin curba C_- care intersectează nivelul l în punctul S . Abscisa x_M a punctului M se poate obține din prima relație dată

în (4.91), iar abscisa x_S a punctului S se poate obține din relația

$$x_S = x_M - (\eta_-)^{-1} (y_M - y_S). \quad (4.93)$$

Mărimile f_S și g_S se obțin prin interpolare liniară :

$$f_S = f_N + \frac{f_C - f_N}{\beta h} (x_S - x_N), \quad (4.94)$$

$$g_S = g_N + \frac{g_C - g_N}{\beta h} (x_S - x_N), \quad (4.95)$$

unde $\overline{NC} = \beta h$, $0 < \beta < 1$. În acest caz între mărimile f_M și g_M are loc relația

$$F_N (f_M - f_S) + (A\eta_- - G)_N (g_M - g_S) + \\ + (K\eta_- - H)_M (x_M - x_S) = 0. \quad (4.96)$$

Ecuția (4.96) permite determinarea lui g_M când se dă (4.91) sau determinarea lui f_M când se dă (4.92). Ecuțiile (4.93) — (4.96) oferă o aproximație de ordinul întâi. Dacă se urmărește o aproximație de ordin superior, algoritmul de determinare a punctului frontieră $M \in \Gamma$ se desfășoară astfel :

- ordonata Y_M este cunoscută din rețea, M aparținând nivelului $l + 1$;
- abscisa x_M se determină din prima relație dată în (4.91);
- abscisa $x_S^{(k+1)}$ a punctului S rezultă din ecuația

$$y_M - y_S = \frac{1}{2} [(\eta_-)_M^{(k)} + (\eta_-)_S^{(k)}] (x_M - x_S^{(k+1)}); \quad (4.97)$$

— mărimile $f_S^{(k+1)}$ și $g_S^{(k+1)}$ se obține din următoarele formule de interpolare :

$$f_S^{(k+1)} = f_C - \frac{\beta^2 f_B - f_N + (1 - \beta^2) f_C}{\beta (\beta + 1) h} (x_C - x_S^{(k+1)}) + \\ + \frac{\beta f_B + f_N - f_C (1 + \beta)}{\beta (\beta + 1) h^2} (x_C - x_S^{(k+1)})^2, \quad (4.98)$$

$$g_S^{(k+1)} = g_C - \frac{\beta^2 g_B - g_N + (1 - \beta^2) f_C}{\beta(\beta + 1)h} (x_C - x_S^{(k+1)}) + \quad (4.99)$$

$$+ \frac{\beta g_B + g_N - f_C(1 + \beta)}{\beta(1 + \beta)h^2} (x_C - x_S^{(k+1)})^2.$$

Pentru acest caz relația între $f_M^{(k+1)}$ și $g_M^{(k+1)}$ este următoarea :

$$\frac{1}{2} (F_S^{(k+1)} + F_M^{(k)}) (f_M^{(k+1)} - f_S^{(k+1)}) + \frac{1}{2} [(A\eta_- - G)_M^{(k)} +$$

$$+ (A\eta_- - G)_S^{(k+1)}] (g_M^{(k+1)} - g_S^{(k+1)}) + \frac{1}{2} [(K\eta_- - H)_M^{(k)} +$$

$$+ (K\eta_- - H)_S^{(k+1)}] (x_M - x_S^{(k+1)}) = 0. \quad (4.100)$$

Relația (4.100) poate fi utilizată la determinarea lui f_M cînd se dau relațiile (4.92) sau la determinarea lui g_M cînd se dau relațiile (4.91).

Dacă se cere determinarea unui punct $V \in \Gamma$ cuprins între două nivele l și $l + 1$ ca în fig. 4.15, unde punctele

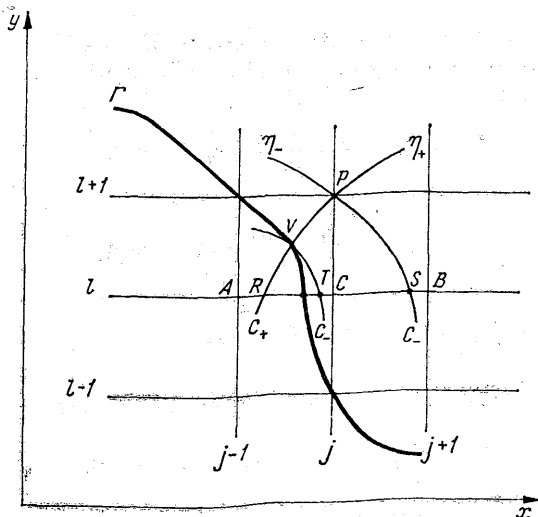


Fig. 4.15.

A , N , C și B sînt date, calculele se desfășoară oarecum similar cazului precedent. Se construiește o porțiune de rețea cu nivelele $l - 1$, l , $l + 1$ în direcția y și $j - 1$, j , $j + 1$ în direcția x , iar Γ reprezintă curba frontieră care se intersectează cu caracteristica η_+ , reprezentată prin curba C_+ în punctul V cuprins între cele două nivele l și $l + 1$. Se pune problema determinării punctului $V \in \Gamma$. Presupunem că sînt date relațiile (4.91) sau (4.92) și utilizăm pentru început aproximarea de ordinul întâi. Pentru determinarea coordonatelor x_V și y_V ale punctului $V \in \Gamma$ se va folosi următoarele ecuații :

$$y_V = u(x_V), \quad (4.101)$$

$$y_P - y_V = (\eta_+)_C(x_P - x_V). \quad (4.102)$$

Abscisa x_T a punctului T , ce apare ca intersecție a caracteristicii η_- date de curba C_- și nivelul l , se determină din ecuația

$$y_V - y_T = (\eta_-)_N(x_V - x_T). \quad (4.103)$$

Ordonata y_T este cunoscută, deoarece T aparține nivelului l . Mărimile f_T și g_T se determină cu ajutorul formulelor de interpolare :

$$f_T = f_N + \frac{f_C - f_N}{\beta h}(x_T - x_N), \quad (4.104)$$

$$g_T = g_N + \frac{g_C - g_N}{\beta h}(x_T - x_N). \quad (4.105)$$

Ecuația de legătură între f_T și f_V este

$$F_N(f_V - f_T) + (A\eta_- - G)_N(g_V - g_T) + \\ + (K\eta_- - H)_N(x_V - x_T) = 0. \quad (4.106)$$

Ecuația (4.106) permite determinarea lui f_V dacă se dau relațiile (4.92), sau lui g_V dacă se dau relațiile (4.91).

Formulele de calcul pentru aproximarea de ordin superior arată astfel :

— abscisa x a punctului V este dată de ecuația

$$y_P - u(x_V^{(k+1)}) = \frac{1}{2} [(\eta_+)_P^{(k)} + (\eta_-)_V^{(k)}] (x_P - x_V^{(k+1)}); \quad (4.107)$$

— ordonata y_V a lui V va fi dată de relația

$$y_V^{(k+1)} = u(x_V^{(k+1)}). \quad (4.108)$$

— punctul T aparține nivelului l , deci y_T este cunoscut, iar x_T este dat prin următoarea ecuație :

$$y_V^{(k+1)} - y_T = \frac{1}{2} [(\eta_+)_V^{(k)} + (\eta_+)_T^{(k)}] (x_V^{(k+1)} - x_T^{(k+1)}); \quad (4.109)$$

— mărimile f_T și g_T se calculează cu ajutorul formulelor de interpolare de ordinul al doilea :

$$f_T^{(k+1)} = f_C - \frac{\beta^2 f_B - f_N + (1 - \beta^2) f_C}{\beta(\beta + 1)h} (x_C - x_T^{(k+1)}) + \\ + \frac{\beta f_B + f_N - f_C(1 + \beta)}{\beta(\beta + 1)h^2} (x_C - x_T^{(k+1)})^2, \quad (4.110)$$

$$g_T^{(k+1)} = g_C - \frac{\beta^2 g_B - g_N + (1 - \beta^2) g_C}{\beta(\beta + 1)h} (x_C - x_T^{(k+1)}) + \\ + \frac{\beta g_B + g_N - (1 + \beta) g_C}{\beta(\beta + 1)h^2} (x_C - x_T^{(k+1)})^2; \quad (4.111)$$

— mărimile f_V și g_V pot fi determinate din ecuația

$$\frac{1}{2} (F_T^{(k+1)} + F_V^{(k)}) (f_T^{(k+1)} - f_V^{(k+1)}) + \frac{1}{2} [(A\eta_- - G)_V^{(k)} + \\ + (A\eta_- - G)_T^{(k+1)}] (g_V^{(k+1)} - g_T^{(k+1)}) + \frac{1}{2} [(K\eta_- - H)_V^{(k)} + \\ + (K\eta_- - H)_T^{(k+1)}] (x_V^{(k+1)} - x_T^{(k+1)}) = 0. \quad (4.112)$$

În această etapă punctul $V(x_V, y_V, f_V, g_V)$ este cunoscut.

Punctul S de la nivelul l din fig. 4.15 poate fi determinat cu ajutorul relațiilor (4.85), (4.87) și (4.88), obținându-se mărimile $x_S^{(k+1)}$, $f_S^{(k+1)}$ și $g_S^{(k+1)}$. În acest moment se vede că au fost determinate punctele $V \in \Gamma$ și $V \in \eta_+$ care trece prin P , precum și punctul S . Cu aceste două puncte S și V cunoscute se pune problema determinării nodului P al rețelei ca nod din apropierea frontierei Γ (fig. 4.15). Nodul din apropierea frontierei Γ ce aparține rețelei are mărimile x_P și y_P determinate prin cunoașterea parametrilor rețelei, iar mărimile $f_S^{(k+1)}$ și $g_P^{(k+1)}$ se vor obține din următoarele ecuații [39]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (F_P^{(k)} + F_V^{(k+1)}) (f_P^{(k+1)} - f_V^{(k+1)}) + \frac{1}{2} [(A\eta_+ - G)_P^{(k)} + \\ & + (A\eta_+ - G)_V^{(k+1)}] (g_P^{(k+1)} - g_V^{(k+1)}) + \frac{1}{2} [(K\eta_+ - H)_P^{(k)} + \\ & + (K\eta_+ - H)_V^{(k+1)}] (x_P - x_V^{(k+1)}) = 0, \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (F_P^{(k)} + F_S^{(k+1)}) (f_P^{(k+1)} - f_S^{(k+1)}) + \frac{1}{2} [(A\eta_- - G)_P^{(k)} + \\ & + (A\eta_- - G)_S^{(k+1)}] (g_P^{(k+1)} - g_S^{(k+1)}) + \frac{1}{2} [(K\eta_- - H)_P^{(k)} + \\ & + (K\eta_- - H)_S^{(k+1)}] (x_P - x_S^{(k+1)}) = 0. \end{aligned}$$

Dacă Γ este unul din nivelele $j - 1$, j sau $j + 1$, o mare parte din aceste calcule [37] se elimină, iar când $A \equiv N$ și $\beta = 1$, calculele devin mult mai simple. Algoritmii prezentați [40] dau posibilitatea determinării punctelor de pe frontiera Γ , când se utilizează metoda caracteristicilor combinată cu o rețea rectangulară.

Exemplu. Se consideră ecuația mișcării în cazul curgerii izotrope unidimensionale, dată sub forma

$$E_1 \equiv f_t + ff_x + \frac{2gg_x}{\gamma - 1} = 0, \quad (4.115)$$

$$E_2 \equiv gf_x + \frac{2}{\gamma - 1} (g_t + fg_x)_x = 0, \quad (4.116)$$

unde f este viteza fluidului, g este viteza sunetului, x coordonata spațială, iar t variabila timp. În plus, s-a presupus că se consideră o curgere adiabatică, așa că $g^2 = \rho^{\gamma-1}$, unde ρ este densitatea și γ este exponentul adiabatic. S-au folosit notațiile f și g pentru variabilele independente pentru a avea aceleași variabile independente ca în sistemul (4.36) și (4.37) folosit în analiza generală a metodei caracteristicilor. O combinație liniară între (4.115) și (4.116).

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 = E,$$

ne dă

$$E = \lambda_1 \left(f_t + ff_x + \frac{2gg_x}{\gamma - 1} \right) + \lambda_2 \left[gf_x + \frac{2}{\gamma - 1} (g_t + fg_x) \right]. \quad (4.117)$$

Această relație corespunde relației (4.39). După ordonarea relației (4.117), se obține

$$E = (\lambda_1 f + \lambda_2 g) f_x + \lambda_1 f_t + \left(\frac{2\lambda_1 g}{\gamma - 1} + \frac{2\lambda_2}{\gamma - 1} f \right) g_x + \frac{2\lambda_2}{\gamma - 1} g_t \quad (4.118)$$

și înmulțind cu dx , se obține

$$\begin{aligned} E dx = & (\lambda_1 f + \lambda_2 g) f_x dx + \lambda_1 f_t dx + \left(\frac{2\lambda_1 g}{\gamma - 1} + \frac{2\lambda_2}{\gamma - 1} f \right) g_x dx + \\ & + \frac{2\lambda_2}{\gamma - 1} g_t dx. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Din relațiile (4.40), dacă f și g sînt funcții analitice de x și t , se pot explicita

$$f_x dx = df - f_t dt, \quad g_x dx = dg - g_t dt, \quad (4.120)$$

cu care relația (4.119) devine

$$\begin{aligned} E dx = & (\lambda_1 f + \lambda_2 g) (df - f_t dt) + \lambda_1 f_t dx + \frac{2}{\gamma - 1} (\lambda_1 g + \lambda_2 f) (dg - g_t dt) + \\ & + \frac{2\lambda_2}{\gamma - 1} g_t dx. \end{aligned} \quad (4.121)$$

După ordonarea expresiei (4.121) rezultă

$$\begin{aligned} E dx = & (\lambda_1 f + \lambda_2 g) df + \frac{2}{\gamma - 1} (\lambda_1 g + \lambda_2 f) dg + [\lambda_1 dx - (\lambda_1 f + \lambda_2 g) dt] f_t + \\ & + \frac{2}{\gamma - 1} [\lambda_2 dx - (\lambda_1 g + \lambda_2 f) dt] g_t. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Pentru o alegere adecvată a coeficienților λ_1 și λ_2 se anulează expresiile din parantezele drepte și se obține

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\lambda_1 g + \lambda_2 f}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 f + \lambda_2 g}{\lambda_1}. \quad (4.123)$$

Relația (4.122) permite explicitarea raportului λ_1/λ_2 :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{dx - f dt}{g dt} = \frac{g dt}{dx - f dt}. \quad (4.124)$$

Ultima egalitate din (4.124) permite calculul direcțiilor caracteristice

$$(dx - f dt)^2 - (g dt)^2 = 0, \quad (4.125)$$

de unde rezultă cele două direcții caracteristice:

$$dx = (f + g) dt, \quad dx = (f - g) dt. \quad (4.126)$$

Din combinarea relațiilor (4.125) cu (4.124) și (4.122) rezultă ecuațiile caracteristice pentru variabile dependente f și g asociate sistemului (4.115) și (4.116):

$$df + \frac{2}{\gamma - 1} dg = 0, \quad -df + \frac{2}{\gamma - 1} dg = 0. \quad (4.127)$$

Cele patru ecuații date în (4.126) și (4.127) formează sistemul caracteristic asociat sistemului (4.115), (4.116). În cazul în care se consideră curgerea izotropă tridimensională sistemul (4.115) și (4.116) devine

$$f_t + ff_x + \frac{2gg_x}{\gamma - 1} = 0, \quad (4.128)$$

$$gf_x + \frac{2}{\gamma - 1} (g_t + fg_x) + \frac{2fg}{x} = 0. \quad (4.129)$$

Sistemul (4.115) și (4.116) diferă de sistemul (4.128) și (4.129) prin termenul $2fg/x$. Deoarece acest termen nu implică derivate, direcțiile caracteristice vor fi aceleași, din cele date în (4.126), iar ecuațiile caracteristice pentru f și g vor fi următoarele:

$$df + \frac{2}{\gamma - 1} dg + \frac{2fg}{x} dt = 0, \quad (4.130)$$

$$-df + \frac{2}{\gamma - 1} dg + \frac{2fg}{x} dt = 0.$$

Pentru tratarea numerică a sistemului de ecuații caracteristice (4.126) și (4.130) se consideră următoarele condiții inițiale :

$$\left. \begin{array}{l} f = 0 \\ g = h(x) \end{array} \right\} \text{ pentru } t = 0 \quad (4.131)$$

și următoarele condiții limită :

$$\left. \begin{array}{l} f = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \text{ pentru } x = 0. \quad (4.132)$$

O soluție numerică a fost obținută utilizând metoda specificării intervalelor de timp și un proces linear de interpolare. Din utilizarea acestor metode ecuațiile (4.126) se pot scrie în forma discretă astfel :

$$x_R = x_C - (f + g)_C (t_P - t_C), \quad (4.133)$$

$$x_S = x_C - (f - g)_C (t_P - t_C), \quad (4.134)$$

$$g_R = g_C [1 - \beta (f_C + g_C)] + g_A \beta (f_C + g_C), \quad (4.135)$$

$$g_S = g_C [1 + \beta (f_C - g_C)] - g_B \beta (f_C - g_C), \quad (4.136)$$

$$f_R = f_C [1 - \beta (f_C + g_C)] + f_A \beta (f_C + g_C), \quad (4.137)$$

$$f_S = f_C [1 + \beta (f_C - g_C)] - \beta f_B (f_C - g_C). \quad (4.138)$$

Ecuațiile (4.133)–(4.138) au ca soluții mărimile x_R , x_S , g_R , g_S , f_R , f_S , care,

înlocuite în (4.81) și (4.82), conduc la un sistem de două ecuații cu necunoscute f_P și g_P . Acesta permite calculul mărimilor f și g în toate punctele regiunii exceptând dreapta $x = 0$, unde termenul fg/x prezintă o nedeterminare de forma $0/0$. O dezvoltare în serie [40] a soluției în vecinătatea punctului $x = 0$ va conduce la

$$\frac{f}{x} \approx k_0 + k_2 x^2, \quad (4.139)$$

unde k_0 și k_2 sînt constante. Înlocuind termenul fg/x printr-o aproximație de forma (4.139), nodurile rețelei pot fi calculate pe dreapta $x = 0$.

În [40] este tratată o aproximație a problemei considerate, utilizînd metoda caracteristicilor, iar în [29] o aproximație prin metoda specificării intervalelor de timp, observîndu-se că cele două aproximații sînt echivalente.

4.7. Descrierea diagramei logice de calcul

Diagrama logică de calcul este dată în fig. 4.16.

Blocul 1. Start.

Blocul 2. Se citesc parametrii rețelei : N , Δx , Δt , unde Δx este pasul pe axa Ox , Δt este pasul pe axa Ot , N este

numărul de puncte pe axa Ox , 5K, KEI. Acești parametri se perforază pe cartelă după o machetă corespunzătoare. N este număr întreg cu maximum trei cifre, deoarece programul poate trata problema pentru care se cer maximum 100 de puncte pe Ox , Δx și Δt sînt două numere reale cu cifra pe partea zecimală, fără punct perforat pe cartelă.

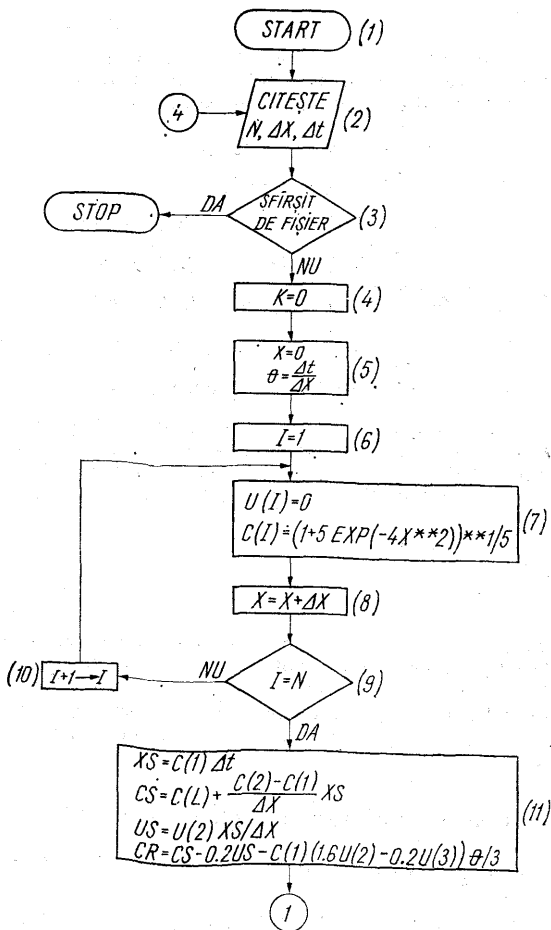


Fig. 4.16, a.

Blocul 3. Este un bloc de decizie care permite reluarea programului pentru diverși parametri (N , Δx , Δt) ai rețelei cu ajutorul unor cartele consecutive, operație care este întreruptă în momentul cînd în acest grup de cartele este întîlnită cartela ce conține /*, care la IBM-360 marchează sfîrșit de fișier.

Blocul 4. Se inițializează un contor pentru numărul de iterații.

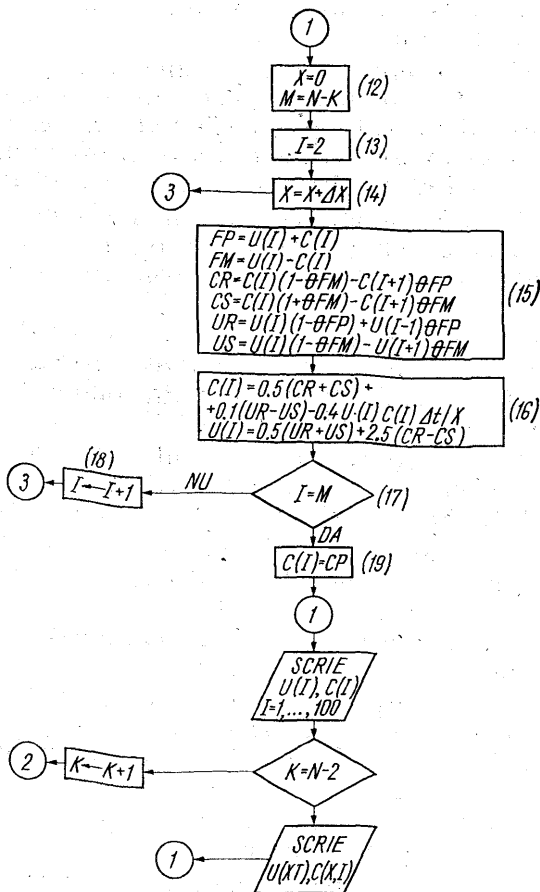


Fig. 4.16, b.

Blocul 5. Se calculează $\theta = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Deoarece procesul

este convergent pentru $0 < \theta < 1$, programatorul trebuie să țină cont de alegerea parametrilor rețelei Δx , Δt pentru a asigura stabilitatea și convergența calculului.

Blocul 6. Bloc de inițializare al contorului de puncte de pe Ox .

Blocul 7. Se calculează valorile inițiale $f_i(x, 0)$ și $C_i(x, 0)$ în punctul i .

Blocul 8. Se creează abscisa unui nou punct.

Blocul 9. Bloc de decizie logică, unde se verifică dacă au fost calculate toate valorile inițiale în punctele date.

Blocul 10. Se avansează contorul pentru punctele de pe Ox pentru $i < N$, altfel se merge la blocul 20.

Blocul 11. Se determină câte un punct de pe axa Ot care se calculează cu alte formule decât formulele utilizate la calculul punctelor interioare (conform algoritmului prezentat).

Blocul 12. Se inițializează $x = 0$ și se calculează $M = N - K$, unde K este o variabilă întregă asociată punctelor de pe axa Ot , iar M reprezintă numărul punctelor interioare rețelei la nivelul K .

Blocul 13. Inițializarea contorului pentru punctele interioare rețelei la un anumit nivel K .

Blocul 14. Se creează abscisa unui nou punct.

Blocul 15. Bloc de calcul pentru determinarea lui f , C și U într-o serie de puncte auxiliare, valori ce se utilizează în blocul 16.

Blocul 16. Bloc de calcul pentru determinarea funcțiilor f și C în punctul i interior rețelei.

Blocul 17. Bloc logic care testează dacă a fost calculată soluția sistemului în toate punctele interioare rețelei la nivelul K , și dacă au fost calculate, se trece la blocul 19, dacă nu — la blocul 18.

Blocul 18. Se avansează calculul la punctul următor și se reia procesul de la blocul 14.

Blocul 19. În acest bloc punctul calculat de pe frontieră se atașează vectorului format în bucla anterioară.

Blocul 20. Se transpun cei doi vectori soluție U și C de la nivelul K pe bandă sau disc.

Blocul 21. Bloc de decizie logică, în care se verifică dacă au fost efectuate calculele pentru toate nivelele K de pe Ot . Dacă nu, se trece la blocul 22, altfel se trece la 23.

Blocul 22. Se avansează contorul K pentru nivelul următor și se reia procesul de la blocul 11.

Blocul 23. Constituie o rutină pentru imprimarea soluției sistemului de ecuații cu derivate parțiale sub formă de tabel, citind fișierul anterior creat. Apoi se reia programul de la blocul 2 în eventualitatea că se cere reluarea calculului pentru alți parametri ai rețelei (descriere bloc 3).

Descrierea programului. Programul a fost scris în limbaj FORTRAN IV și a fost rulat pe un calculator IBM-360. Programul este destinat să rezolve o clasă de probleme care au condiții inițiale și la limită de forma celor prezentate. Acest program poate fi rulat la orice calculator, care dispune de un compilator FORTRAN precum și de o configurație minimă :

- cititor de cartele perforate,
- imprimantă rapidă,
- o unitate de bandă magnetică sau de discuri magnetice.

Numărul de puncte din rețea depinde de capacitatea memoriei calculatorului.

TEHNICA VALORILOR LIMITĂ

5.1. Introducere

În acest capitol este prezentată tehnica valorilor limită utilizată la tratarea numerică a ecuației undelor liniară și slab neliniară, cu condiții inițiale și la limită. O serie de fenomene fizice au ca model matematic ecuații de tip hiperbolic cu derivate parțiale și sint descrise de funcții ce depind de x și t , unde pentru anumite valori destul de mari ale lui t funcția $u(x, t)$ se poate considera cunoscută fie prin aproximare, fie prin măsurare. Dacă $u(x, t)$ este cunoscută pentru aceste valori ale lui t , conturul de existență al soluției se poate închide pentru t considerat, astfel punându-se problema determinării soluției numerice pentru o ecuație de tip hiperbolic într-un domeniu închis. În acest caz se poate aplica tehnica valorilor limită la determinarea soluției numerice a acestei ecuații. Dacă se consideră o ecuație de tip hiperbolic al cărei soluție analitică este cunoscută și se aplică metoda tehnicilor valorilor limită, se obține o soluție numerică, care diferă de soluția analitică printr-o eroare, dependentă de mărimea parametrilor rețelei construite pe conturul închis. Alegerea parametrilor rețelei se face prin testarea erorii și diminuarea ei.

În cele ce urmează se va prezenta o serie de aplicații ale metodei asupra unor exemple fizice întâlnite în mod frecvent în problemele ingineresti, care au ca model matematic ecuația cu derivate parțiale de tip hiperbolic cu condiții inițiale și la limită.

5.2. Problema cu condiții inițiale și la limită

În general problemele care se vor trata cu această metodă au următoarea formă: pentru un număr real pozitiv dat a , fie domeniile

$$I = \{x \mid 0 \leq x \leq a\} \text{ și } R = \{(x, t) \mid 0 < x < a, t > 0\}. \quad (5.1)$$

Fie date patru funcții

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad x \in I; \quad g_1(t), \quad g_2(t), \quad t \geq 0.$$

Pe R se consideră ecuația cu derivate parțiale de tip hiperbolic

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi(x, y, u, u_x, u_t). \quad (5.2)$$

Cu aceste elemente introduse, problema cu condiții inițiale și la limită constă în a găsi pe R o soluție $u(x, t)$ a ecuației (5.2) care este de clasa $C^2(R) \cap C(\bar{R})$ și care satisface următoarele condiții:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &\equiv f_1(x), & x &\in I \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &\equiv f_2(x), & x &\in I \end{aligned} \right\} \text{ condițiile inițiale,} \quad (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &\equiv g_1(t), & t &> 0 \\ u(a, t) &\equiv g_2(t), & t &> 0 \end{aligned} \right\} \text{ condițiile la limită.} \quad (5.4)$$

În [31, 43, 8, 44, 36] se dau o serie de teoreme privind existența și unicitatea soluției pentru o diversitate destul de mare de probleme (5.2)–(5.6), în ceea ce privește natura și comportarea funcțiilor f_1, f_2, g_1, g_2 . Din păcate, foarte puține din aceste teoreme stabilesc rezultate pentru o clasă mai largă de probleme, ele în general tratează cazul liniar [36, 46] și pentru situații foarte speciale cazul neliniar [36, 45] al ecuațiilor de tipul (5.2).

Datorită faptului că metodele analitice nu pot să găsească o soluție analitică pentru probleme de tipul (5.2)–(5.6), singura cale de determinare a unei soluții numerice este aproximare cu diferențe și prin utilizarea calculatorului.

5.1. Aproximarea cu diferențe

Aproximarea numerică revine la înlocuirea datelor continue prin date discrete și ecuației cu derivate parțiale printr-o ecuație cu diferențe.

Se va construi o schemă de aproximație cu diferențe care dă în mod sigur o matrice ușor dominantă * diagonal. Această dominanță diagonală a matricei va fi foarte utilă la rezolvarea sistemului algebric obținut în urma discretizării, influențând procesul de convergență al metodei iterative, utilizate pentru rezolvarea numerică a sistemului.

Se consideră operatorul undă

$$L[u] = u_{xx} - u_{tt}. \quad (5.7)$$

Pentru $h > 0$, se consideră următoarea mulțime de puncte : (x, t) , $(x, t + h)$, $(x, t - h)$, $(x, t - 2h)$, $(x - h, t)$, $(x + h, t)$, care vor fi notate cu numerile 0, 1, 2, 3, 4, 5, iar în cadrul unei rețele vor avea o dispunere ca în fig. 5.1.

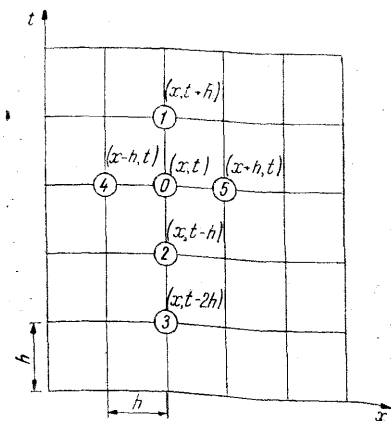


Fig. 5.1.

Pentru simplificarea notației se utilizează simbolul U_i , care reprezintă valoarea funcției $u(x, t)$ în punctul i pentru $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

În continuare se caută coeficienții $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ și un operator cu diferențe

$$L_h[u] = \sum_{i=0}^5 \beta_i U_i,$$

astfel ca în punctul (x, t) să aibă loc pentru orice $u \in C^2(R)$ următoarea relație :

$$\lim_{h \geq 0} |L[u] - L_h[u]| = 0. \quad (5.8)$$

* $a_{ii} - a_{ij} < \varepsilon$, pentru orice $i, j \in N$ și $\varepsilon > 0$.

De aici rezultă că operatorul cu diferențe trebuie astfel construit, adică coeficienții β_i trebuie astfel determinați, ca să aibă loc relația (5.8). Pentru acest scop presupunem că funcția $u(x, t)$ poate fi dezvoltată în serie Taylor pentru fiecare punct numerotat cu 1, 2, 3, 4, 5, în vecinătatea punctului numerotat cu 0 (v. fig. 5.1)

Dacă se introduce dezvoltările funcțiilor U_1, U_2, U_3, U_4 și U_5 în relația (5.8), scrisă astfel :

$$(u_{xx} - u_{tt})|_0 \equiv \sum_{i=0}^5 \beta_i U_i, \quad (5.9)$$

rezultă un sistem de cinci ecuații cu șase necunoscute, care sînt coeficienții β_i . Dacă se scrie (5.9) sub formă dezvoltată, rezultă

$$(u_{xx} - u_{tt})|_0 \equiv \beta_0 U(x, t) + \beta_1 U_1(x, t+h) + \beta_2 U_2(x_2, t-h) + \beta_3 U_3(x, t-2h) + \beta_4 U_4(x-h, t) + \beta_5 U_5(x+h, t). \quad (5.10)$$

Dacă în partea dreaptă în locul funcțiilor U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 se introduc dezvoltările în serie Taylor în vecinătatea punctului (x, t) , din această dezvoltare luînd numai termenii pînă la ordinul doi inclusiv, rezultă

$$\begin{aligned} (u_{xx} - u_{tt})|_0 &\equiv \beta_0 u(x, t) + \\ &+ \beta_1 u(x, t) + \beta_1 \frac{u'_i(x, t)h}{1!} + \beta_1 \frac{u''_{ii}(x, t)h^2}{2!} + \dots \\ &\dots + \beta_2 u(x, t) - \beta_2 \frac{u'_i(x, t)h}{1!} + \beta_2 \frac{u''_{ii}(x, t)h^2}{2!} + \dots \\ &\dots + \beta_3 u(x, t) - \beta_3 \frac{u'_i(x, t)2h}{1!} + \beta_3 \frac{u'_i(x, t)4h}{2!} + \dots \\ &\dots + \beta_4 u(x, t) - \beta_4 \frac{u'_x(x, t)h}{1!} + \beta_4 \frac{u''_{xx}(x, t)h^2}{2!} + \dots \\ &\dots + \beta_5 u(x, t) - \beta_5 \frac{u'_x(x, t)h}{1!} + \beta_5 \frac{u''_{xx}(x, t)h^2}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (5.11)$$

În continuare expresia (5.11) devine

$$\begin{aligned}
 (u_{xx} - u_{tt})|_{(x,y)} = & (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5)u(x, t) + \\
 & + (\qquad \qquad \qquad -\beta_4 + \beta_5)hu_x(x, t) + \\
 & + (\qquad \beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3 \qquad \qquad \qquad)hu'_t(x, t) + \\
 & + (\qquad \qquad \qquad + \beta_4 + \beta_5) \frac{h^2}{2} u'_{xx}(x, t) + \\
 & + (\qquad \beta_1 + \beta_2 + 4\beta_3 \qquad \qquad \qquad) \frac{h^2}{2} u''_{xx}(x, t),
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

După identificarea termenilor din relația (5.12) rezultă următorul sistem :

$$\begin{aligned}
 \beta_0 + \beta_1 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 &= 0, \\
 \qquad \qquad \qquad -\beta_4 + \beta_5 &= 0, \\
 \beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3 &= 0, \\
 \qquad \qquad \qquad \beta_4 + \beta_5 &= \frac{2}{h^2}, \\
 \beta_1 + \beta_2 + 4\beta_3 &= \frac{-2}{h^2}.
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

Acesta este un sistem de cinci ecuații cu șase necunoscute. Se explicitează toate celelalte necunoscute în funcție de β_0 , obținându-se următoarele relații :

$$\beta_1 = -\frac{1}{h^2} - \frac{\beta_0}{3}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{h^2} - \beta_0, \quad \beta_3 = \frac{\beta_0}{3}, \quad \beta_4 = \beta_5 = \frac{1}{h^2}.
 \tag{5.14}$$

Cu aceste relații operatorul $L_h[u]$ devine

$$\begin{aligned}
 L_h[u] = & \beta_0 U_0 + \left(-\frac{1}{h^2} - \frac{\beta_0}{3} \right) U_1 + \left(-\frac{1}{h^2} - \beta_0 \right) U_2 + \\
 & + \frac{\beta_0}{3} U_3 + \frac{1}{h^2} U_4 + \frac{1}{h^2} U_5.
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

Dacă se alege $\beta_0 = o(1/h^2)$, operatorul (5.15) satisface relația (5.8). În acest caz ecuația cu diferențe

$$L_h[u] = 0 \quad (5.16)$$

se va numi aproximația ecuației diferențiale

$$L[u] = 0. \quad (5.17)$$

De asemenea dacă se dau trei puncte (x, t) , $(x, t + h)$, $(x, t + 2h)$ care sînt notate respectiv cu 0, 1 și 2, atunci aproximarea cu diferențe la dreapta pentru $\partial u / \partial t$ în punctul numerotat cu 0 este determinată în felul următor. Operatorul de derivare se poate exprima cu ajutorul diferențelor la dreapta prin expresia

$$hD = \Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 - \dots \quad (5.18)$$

Dacă se iau în considerare din această dezvoltare numai primii doi termeni, rezultă

$$\begin{aligned} D_t u(x, t) &= \frac{\left(\Delta - \frac{1}{2} \Delta^2\right) u(x, t)}{h} = \frac{2\Delta u(x, t) - \Delta^2 u(x, t)}{2h} = \\ &= \frac{2u(x, t+h) - u(x, t) - u(x, t+2h) + 2u(x, t+h) - u(x, t)}{2h} = \\ &= \frac{-3u(x, t) + 4u(x, t+h) - u(x, t+2h)}{2h} = \\ &= \frac{-3U_0 + 4U_1 - U_2}{2h}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Deci

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(x,t)} \equiv \frac{1}{2h} (-3U_0 + 4U_1 - U_2). \quad (5.20)$$

În mod analog se poate deduce și expresia lui $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x,t)}$.

O altă metodă de a obține expresii pentru (5.15) și (5.20) poate fi construită prin utilizarea unor puncte de alte argumente decât cele date anterior.

5.4. Metoda numerică

O metodă numerică directă pentru aproximarea soluției problemei (5.2)–(5.6) cu condiții inițiale și la limită se poate prezenta în felul următor: pentru un număr întreg pozitiv N se alege pasul rețelei $h = a/N$, construindu-se pe R o rețea de puncte [44, 45]. Fie $(0, 0)$ un punct al rețelei. Se aproximează u pe dreapta $t = Nh$ prin intermediul unei evaluări asimptotice sau printr-o proprietate de periodicitate a funcției u căutată. Apoi se numerează punctele rețelei din \bar{R} care se găsesc deasupra axei Ox și sub dreapta $t = Nh$. Fie aceste puncte numerotate cu $1, 2, \dots, k$. Atunci metoda comportă două etape:

1° pentru fiecare punct al rețelei, ale cărui coordonate sînt de forma (x, h) , se scrie aproximația derivatei normale (5.20) în punctul $(x, 0)$;

2° pentru fiecare punct al rețelei, ale cărui coordonate sînt de forma (x, rh) cu $1 \leq ir \leq N$, se selectează un β_0 , respectiv o aproximare cu diferențe $U_{x,i}$ și $U_{t,t}$ pentru u_x și u_t și se scrie ecuația cu diferențe asociată ecuației diferențiale

$$L_h [U] = \Phi(x, y, u, u_x, u_t). \quad (5.21)$$

După parcurgerea etapelor 1° și 2° pentru toate punctele numerotate ale rețelei $1, 2, \dots, k$ și după înlocuirea valorilor lui U determinate prin relațiile (5.3) – (5.6) va rezulta un sistem de k ecuații cu k necunoscute U_1, U_2, \dots, U_k , soluția acestui sistem reprezentînd soluția numerică a problemei date.

Pentru alegerea lui β_0 trebuie să avem în vedere îndeplinirea condiției

$$|\beta_0| > |\beta_i|, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (5.22)$$

Condiția (5.22) se impune în scopul obținerii unei diagonale dominante pentru matricea coeficienților.

În cazul unor probleme liniare se aleg expresii de aproximare la dreapta pentru derivatele parțiale U_x și U_t astfel încît β_0 să poată satisface condiția dată în (5.22).

5.5. Algoritmul de calcul al metodei

Se consideră următoarea problemă de tip hiperbolic neomogenă cu condiții inițiale și la limită :

$$u_{xx} - u_{tt} = u_t, \quad (5.23)$$

$$u(x, 0) = x, \quad (5.24)$$

$$u_t(x, 0) = -x, \quad (5.25)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (5.26)$$

$$u(1, t) = e^{-t}. \quad (5.27)$$

Se consideră $a = 1$ în (5.1). Se cere a se rezolva problema (5.23)–(5.27), care pentru orice $x \in (0, 1)$ să satisfacă relația

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0. \quad (5.28)$$

Se alege $h = \frac{1}{2}$, $t=3$. Atunci rezultă o rețea de puncte în

R numerotate ca în fig. 5.2 cu 1, 2, ..., 56. Din relațiile (5.24), (5.26) și (5.27) se obțin primele valori ale soluției U în punctele de forma $(x, 0)$, $(0, t)$ și $(1, t)$. Pentru ca să fie îndeplinită condiția (5.28) se aproximează $u(x, t)$ pe $t = 3$ prin expresia

$$u(x, 3) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (5.29)$$

Etapa 1° asociază punctelor de forma (x, h) câte o ecuație care reprezintă pur și simplu aproximarea derivatei (5.20) în punctele $(x, 0)$. Deoarece puncte de forma (x, h) sînt patru, numerotate prin 1, 2, 3, 4, rezultă patru ecuații la sfîrșitul etapei 1° :

$$\left. \begin{aligned} -3 \cdot \frac{1}{2} + 4U_1 - U_5 &= -\frac{1}{2} \\ -3 \cdot \frac{1}{4} + 4U_2 - U_6 &= -\frac{1}{2} \\ -3 \cdot \frac{1}{6} + 4U_3 - U_7 &= -\frac{1}{2} \\ -3 \cdot \frac{1}{8} + 4U_4 - U_8 &= -\frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Dacă se consideră

$$\beta_0 = -\frac{4}{h^2} \quad \text{și} \quad U_i = \frac{U_0 - U_2}{h}, \quad (5.31)$$

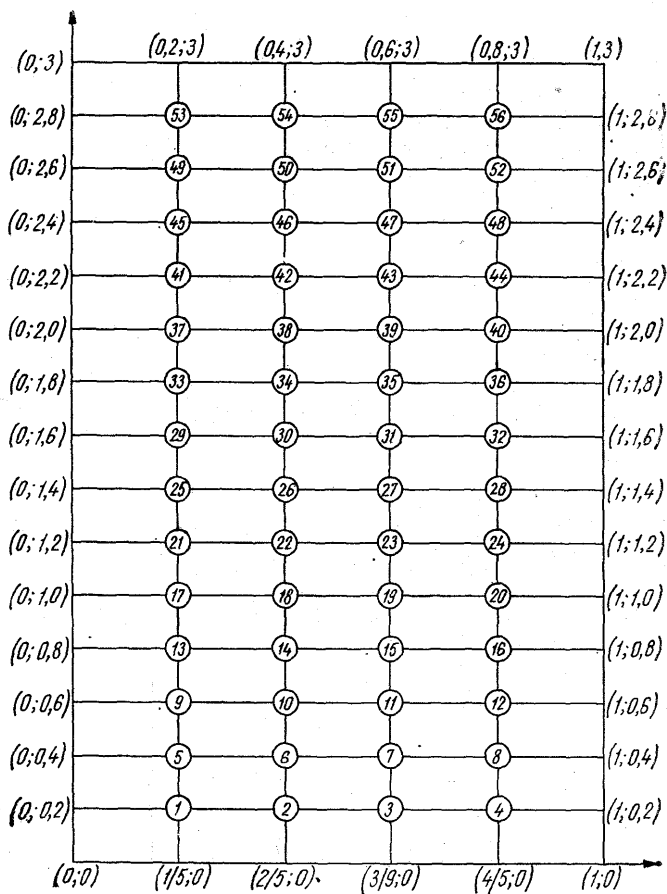


Fig. 5.2.

în acest caz (5.16) și (5.17) implică faptul că ecuația diferențială (5.23) poate fi aproximată prin ecuația cu diferențe

$$-\frac{4}{h^2} U_0 + \left(-\frac{1}{h_2} + \frac{4}{3h^2} \right) U_1 + \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{4}{h^2} \right) U_2 - \\ - \frac{4}{3h^2} U_3 + \frac{1}{h^2} U_4 + \frac{1}{h^2} U_5 - \frac{U_0 - U_2}{h} = 0. \quad (5.32)$$

Pentru $h = \frac{1}{5}$ această ecuație este echivalentă cu

$$-105 U_0 + \frac{25}{3} U_1 + 80 U_2 - \frac{100}{3} U_3 + 25 U_4 + 25 U_5 = 0, \quad (5.33)$$

care după simplificarea cu 5 și aducerea la același numitor devine

$$-63 U_0 + 5 U_1 + 48 U_2 - 20 U_3 + 15 U_4 + 15 U_5 = 0. \quad (5.34)$$

Se vede că în urma alegerii făcute β_0 îndeplinește condiția (5.22), adică $|\beta_0| > |\beta_i|$ pentru $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Dacă se aplică ecuația (5.33) la toate punctele din rețea numerotate prin 5, 6, 7, ..., 56, rezultă 52 ecuații, care asociate cu cele patru ecuații date prin (5.30) formează un sistem de 56 ecuații cu 56 necunoscute U_i , $i = 1, \dots, 56$. Ecuația (5.34) se scrie cu ajutorul șablonului dat în fig. 5.3. Acest șablon va fi deplasat pe rețeaua din fig. 5.2 în poziția dată din fig. 5.3, astfel ca i să se suprapună în cele 52 de posibilități cu punctele numerotate prin 5, 6, 7, ..., 56. Astfel rezultă 52 ecuații, iar cu aceasta etapa a doua a metodei a luat sfârșit. În (5.35) se găsesc câteva din aceste ecuații scrise cu ajutorul șablonului dat în fig. 5.3 :

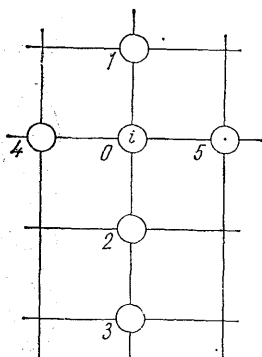


Fig. 5.3.

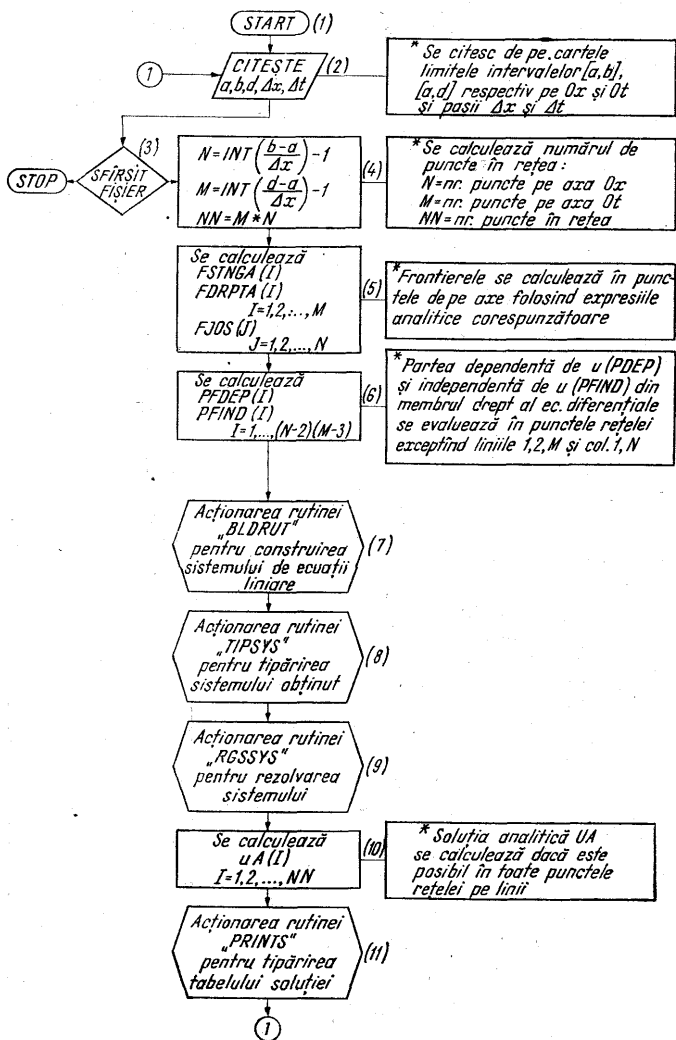


Fig. 5.4.

$$\begin{aligned}
& -63U_5 + 5U_9 + 48U_1 - 20 \cdot \frac{1}{2} + 15,0 + 15U_6 = 0, \\
& -63U_6 + 5U_{10} + 48U_2 - 20 \cdot \frac{1}{4} + 15U_5 + 15U_7 = 0, \\
& -63U_7 + 5U_{11} + 48U_3 - 20 \cdot \frac{1}{6} + 15U_6 + 15U_8 = 0, \\
& -63U_8 + 5U_{12} + 48U_4 - 20 \cdot \frac{1}{8} + 15U_7 + 15e^{-\frac{2}{5}} = 0, \\
& -63U_9 + 5U_{13} + 48U_5 - 20U_1 + 15 \cdot 0 + 15U_{10} = 0, \\
& \dots \dots \dots (5.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -63U_{52} + 5U_{56} + 48U_{48} - 20U_{44} + 15U_{51} + 15e^{-\frac{13}{5}} = 0, \\
& -63U_{53} + 5 \cdot 0 + 48U_{49} - 20U_{45} + 15 \cdot 0 + 15U_{54} = 0, \\
& -63U_{54} + 5 \cdot 0 + 48U_{50} - 20U_{46} + 15U_{53} + 15U_{55} = 0, \\
& -63U_{55} + 5 \cdot 0 + 48U_{51} - 20U_{47} + 15U_{54} + 15U_{56} = 0, \\
& -63U_{56} + 5 \cdot 0 + 48U_{52} - 20U_{48} + 15U_{55} + 15e^{-\frac{14}{5}} = 0.
\end{aligned}$$

Așadar, pentru problema dată (5.23)–(5.27) cu

$$t=3, h=0,2 \text{ și } U(x, 3)=0, \beta_0 = -\frac{4}{h^2} \text{ și } u_t \Big|_{(0,0)} = \frac{U_0 - U_2}{h},$$

a rezultat un sistem de 56 ecuații cu 56 necunoscute care s-a rezolvat prin metoda lui Newton generalizată cu un vector inițial nul, după diagrama logică (v. fig. 5.4) și programul a cărui descriere urmează.

5.6. Descrierea diagramei logice de calcul

Blocul 1. Start.

Blocul 2. Se citesc parametrii rețelei Δx și Δt , precum și limitele domeniului considerat $x \in [a, b]$, $t \in [a, d]$.

Blocul 3. Este un bloc de decizie, care permite reluarea programului pentru diverși parametri ($N, \Delta x, \Delta t$) ai rețelei.

Blocul 4. Se determină punctele pe Ox și Ot și se creează numărul de puncte din rețea (numărul de ecuații) :

$$N = \left[\frac{b-a}{\Delta x} \right] - 1 \text{ și } M = \left[\frac{d-c}{\Delta t} \right] - 1, \quad NN = M \times N,$$

unde N este numărul punctelor de pe Ox , M — numărul punctelor de pe Ot , NN — numărul punctelor rețelei.

Blocul 5. Se calculează funcția $U(x, t)$ pe cele trei segmente, frontieră jos (FJ), frontieră stînga (FS), frontieră dreapta (FD), care se depun în memorie sub forma unor vectori FS, FD cu M componente, iar vectorul FJ cu N componente. Pentru acești vectori trebuie rezervată în mod corespunzător memoria.

Blocul 6. În acest bloc se calculează termenii dependenți de u din partea dreaptă a ecuației diferențiale în toate punctele rețelei pe linii, exceptînd liniile 1, 2 și M și coloanele 1 și N . Aceste valori intervin în calculul elementelor de pe diagonala principală a matricei sistemului de ecuații liniare. La fel se procedează pentru partea independentă de u din termenul liber al ecuației diferențiale. Aceste ultime valori intervin în calculul elementelor matricei care formează termenul liber al sistemului de ecuații algebrice ce se obține.

Valorile termenilor dependenți de u și independenți de u calculate ca mai înainte se depun în memorie sub forma unor vectori de dimensiune $(N - 2) \times (M - 3)$. Pentru acești vectori trebuie rezervată memoria corespunzătoare.

Blocul 7. Bloc pentru activare, de construire a sistemului de ecuații. Apelul acestei subroutine presupune transferul următorilor parametri de la programul principal în ordinea indicată mai jos :

- un vector de dimensiune NN necesar pentru construirea coeficienților sistemului, căruia i se rezervă memoria corespunzătoare (C);
- vectorul frontieră stîngă (FS);
- vectorul frontieră dreaptă (FD);
- vectorul frontieră jos (FJ);
- vectorul parte funcție dependentă de u ;
- vectorul parte funcție independentă de u ;
- $M, N, \Delta x$.

Blocul 8. Activarea rutinei pentru tipărirea sistemului (opțională). Apelul acestei rutine presupune transferul următorilor parametri de la programul principal în ordinea indicată mai jos :

— vectorul C (egal cu numărul de ecuații), definit în blocul 7, care servește ca zonă de lucru și pentru acest subprogram ;

— M, N .

Blocul 9. Se activează procedura de rezolvare a sistemului de ecuații. Activarea ei pentru început se face prin punctul normal de intrare, furnizându-se următorii parametri :

— vectorul C ca zonă de lucru ;

— un vector de dimensiunea identică lui C pentru soluția numerică (UN), căruia i se rezervă de asemenea memorie în programul principal ;

— M și N ;

— EPS precizia impusă calculului numeric ;

— IT numărul de iterații în care se consideră că metoda este convergentă ;

— IND este o variabilă întreagă, care ia valoare zero dacă s-a atins precizia în numărul de iterații fixat sau valoarea 1 în caz contrar. Această variabilă logică poate fi testată de programator pentru a decide modul de continuare sau nu a procesului iterativ. Dacă $IND = 0$ rezultă că precizia a fost atinsă, pentru IT fixat și se poate trece la blocul 10. Dacă $IND = 1$ programatorul poate alege una din următoarele variante : a) se mărește IT și se reapelează procedura RCSSYS prin punctul de intrare numit RSYSE1, care cere ca parametru doar pe IT ; b) se mărește EPS și se reapelează procedura prin punctul de intrare numit RSYSE2 care propune ca parametru noul ESP. Acest proces poate fi continuat la dorința programatorului.

— NIT este o variabilă în care procedura de calcul fixează numărul efectiv de iterații atunci când controlul revine programului principal.

Blocul 10. În acest bloc se calculează soluția analitică în punctele rețelei, dacă este cunoscută, pentru testarea preciziei metodei utilizate. Calculul soluției analitice se face în punctele rețelei pe linii și rezultatele se depun în-

tr-un vector de dimensiune $NN(UA)$, explorînd linie cu linie după valorile crescînde ale lui M . Pentru acest vector trebuie rezervată în mod corespunzător memoria respectivă.

Blocul 11. Activarea procedurii de tipărire a soluției numerice, deoarece procedura lucrează în două moduri; primul mod fiind condiționat de calculul soluției analitice UA , iar apelarea ei cere următorii parametri:

- UN, UA, M, N ;
- MT care este variabilă întreagă și ia valorile 1 și 2;
- pentru $MT = 1$ procedura tipărește numai soluția numerică;
- pentru $MT = 2$ procedura tipărește UN, UA și EPS ;
- NIT, EPS, IND ,

după care procesul se reia de la blocul 2, pentru eventualelitate că se dau și alți parametri ai rețelei.

Descrierea programului. Acest program a fost scris în limbaj FORTRAN și executat pe un calculator IBM-360, dar poate fi executat pe orice calculator care dispune în sistemul de operare de un compilator FORTRAN și are cel puțin configurația următoare: cititor de cartele, imprimantă rapidă cu 120 de caractere utile și o unitate de discuri sau o unitate de bandă. Programul este un program modular, compus din patru rutine, care sînt asamblate după necesități de un program general. Indiferent de natura problemei, rutinele rămîn aceleași, dar în funcție de specificul problemei se scrie programul general de asamblare. Programul conține următoarele rutine:

— $BLDERUT$ care are rolul de a construi sistemul de ecuații liniare asociat rețelei considerate, după metoda șablon, prezentat în cadrul algoritmului de calcul. Această rutină creează sistemul asociat pe discuri sau pe bandă magnetică, de unde îl extrage rutina $RGSSYS$ care îl rezolvă. Datorită acestei metode de lucru este posibilă tratarea unor sisteme de dimensiuni foarte mari.

— $TIPSYS$ care are rolul de a tipări respectiv matricea coeficient și matricea termen liber ale sistemului.

— $RGSSYS$ are rolul de a rezolva sistemul prin metoda Gauss-Seidel într-un număr de iterații dat și

pentru o precizie impusă. Această rutină are două puncte de intrare suplimentare care permit schimbarea numărului de iterații și schimbarea preciziei, reluând rezolvarea din punctul în care a rămas (cînd soluția aceasta joacă rol de soluție de start pentru o nouă etapă). Această rutină are două puncte suplimentare de intrare prin care programatorul poate să revină asupra numărului de iterații, în care procesul nu respectă precizia impusă sau asupra preciziei impuse în cazul numărului de iterații dat. Aceste decizii le poate lua programatorul, programul general testînd o variabilă asociată și apelînd punctul de intrare corespunzător. În acest fel rezolvarea se reia din punctul de unde a rămas, iar soluția obținută devine soluție de start în noua etapă.

— PRINTS este destinată pentru a tipări și poate să lucreze în două moduri: 1) tipărește un tabel cu soluția numerică și soluția analitică calculată în punctele respective, precum și eroarea între cele două metode, dacă soluția analitică este cunoscută, 2) tipărește un tabel numai cu soluția numerică în punctele rețelei, dacă soluția analitică nu este cunoscută. Opțiunea pentru una din cele două moduri de lucru ale subrutinei o face programatorul în programul general.

Deci din cele patru rutine sînt obligatorii următoarele: BLDERUT, RGSSYS, PRINTS, care trebuie apelate în această ordine. A patra rutină este necesară, numai dacă programatorul dorește să vadă forma sistemului. Cele patru subrutine folosesc o memorie operativă de cca 17 K (1K = 1024 biți). Ținînd seama de necesarul de memorie pentru rutine, precum și de comenzile din programul general se poate afirma că la un sistem cu o memorie de 32 K se pot rezolva sisteme cu cca 300 de ecuații cu 300 necunoscute. La o memorie de 64 K se pot trata rețele ce conduc la circa 900 de ecuații cu 900 necunoscute. Din calculele efectuate s-a tras concluzia că la o suplimentare a memoriei cu cîte 16 K se pot adăuga cîte 300 de ecuații la cuantumul existent.

REDUCEREA ECUAȚILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP HIPERBOLIC LA ECUAȚII DIFERENȚIALE ORDINARE

6.1. Introducere

Pentru a pune în evidență principiul metodei, vom utiliza un exemplu din cele mai simple. Fie ecuația

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (6.1)$$

unde cu t s-a notat timpul, cu x distanța, cu U funcția căutată (de x și t), iar c este o constantă. La o astfel de ecuație se ajunge dacă se consideră o coardă care vibrează în plan, fără pierderi, iar U reprezintă amplitudinea vibrației în punctul x , la timpul t . Dacă coarda este fixată la ambele capete și notăm cu l lungimea coardei, atunci condițiile la limită devin

$$U(0, t) = 0, \quad U(l, t) = 0,$$

întrucât amplitudinea coardei la capete este permanent nulă. Drept condiție inițială se poate lua

$$U(x, 0) = U_0(x),$$

adică, la timpul $t = 0$ coarda are, în fiecare punct x , amplitudinea dată prin U_0 .

De la ecuația (6.1) se poate trece la un sistem de ecuații diferențiale ordinare, dacă se păstrează timpul continuu, dar se discretizează variabila x , utilizând o schemă cu diferențe. De exemplu, se împarte distanța l

cu N puncte echidistante, notînd pasul cu h , și se utilizează operatorul șablon

$$\frac{\delta^2 U_n}{\delta t^2} = \frac{1}{h^2} \boxed{1 \mid -2 \mid 1} U_n; n = 1, 2, \dots, N.$$

Acesta este un sistem de ecuații diferențiale ordinare, care împreună cu condițiile la limită și inițiale poate fi rezolvat printr-o metodă numerică.

Deoarece întotdeauna se poate trece de la o ecuație de ordinul al doilea la un sistem de două ecuații de ordinul întâi, sistemul de mai sus poate fi adus la forma unui sistem în care în membrul întâi să apară numai derivata de ordinul întâi.

În consecință, vom începe prin a expune metode mai importante de rezolvare a unei singure ecuații diferențiale ordinare, de ordinul întâi, după care vom trece la sisteme de ecuații diferențiale.

6.2. Metoda lui Euler

Fie ecuația

$$y' = f(x, y) \quad (6.2)$$

cu condițiile inițiale

$$y(x_0) = y_0. \quad (6.3)$$

Integrarea numerică pornește deci din punctul (x_0, y_0) ; din (6.2) se află imediat panta curbei căutate în punctul (x_0, y_0) și anume:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0). \quad (6.4)$$

Metoda lui Euler [52—53] constă în alegerea unui pas h și în determinarea pas cu pas a punctelor de pe curba care reprezintă soluția, cu următorul algoritm:

$$y'_n = f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = y_n + h y'_n. \quad (6.5)$$

Acest procedeu iterativ rezultă imediat din considerarea în (5.2) a diferenței la dreapta pentru aproximarea derivatei :

$$y'_n \approx \frac{1}{h} \Delta y_n = \frac{1}{h} (y_{n+1} - y_n) = \frac{1}{h} f(x_n, y_n), \quad (6.6)$$

de unde rezultă formulele (6.5).

Interpretarea geometrică a metodei Euler este reprezentată în fig. 6.1. Din punctul (x_0, y_0) se trasează tan-

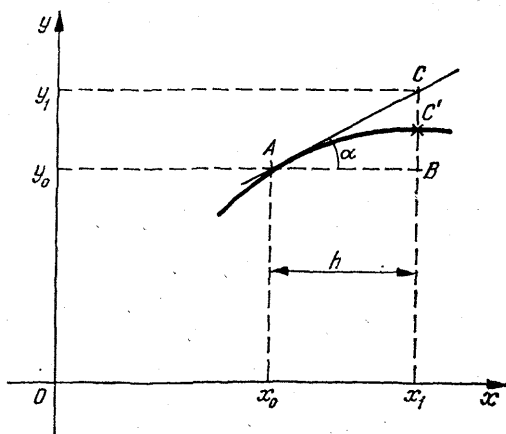


Fig. 6.1.

genta la curba căutată și rezultă y'_0 . Alegînd un pas h se obține punctul (x_1, y_1) . Din triunghiul ABC rezultă

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \operatorname{tg} \alpha = y'_0,$$

de unde

$$y_1 = y_0 + h y'_0,$$

adică formula (6.5). Este ușor de intuit că un astfel de procedeu poate conduce la erori mari de calcul, după un număr de pași prin care eroarea (reprezentată de $\overline{CC'}$) se

cumulează. Din acest motiv, metoda Euler nu se utilizează practic la programarea pe calculator. Se poate însă îmbunătăți metoda lui Euler, printr-un procedeu de predicție-corecție, descris mai întâi geometric, în fig. 6.2.

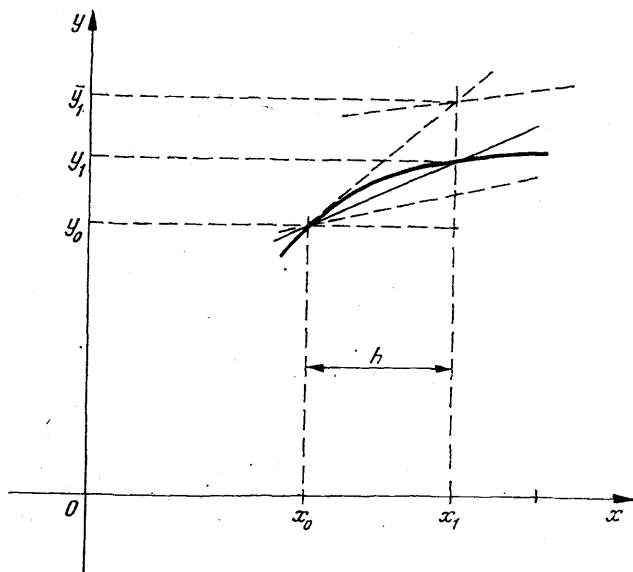


Fig. 6.2.

Algoritmul constă din următoarele :

— se calculează panta provizorie

$$\bar{y}'_0 = f(x_0, y_0);$$

— se calculează mai departe cu formula lui Euler

$$\bar{y}_1 = y_0 + h\bar{y}'_0,$$

găsindu-se punctul (x_1, \bar{y}_1) ;

— în acest punct se calculează panta provizorie

$$\bar{y}'_1 = f(x_1, \bar{y}_1),$$

cea ce reprezintă o *predicție* asupra evoluției curbei căutate;

— se revine în punctul (x_0, y_0) și se calculează y_1 cu panta *corectată* :

$$y_1 = y_0 + h \frac{\bar{y}'_0 + \bar{y}'_1}{2}.$$

În acest mod, punctul găsit (x_1, y_1) este mai aproape de curba căutată, ceea ce face ca acest procedeu să fie util la programare.

Justificarea acestui procedeu este următoarea : se aproximează derivata considerînd și diferența de ordinul doi :

$$D = \frac{1}{h} \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} \right).$$

De aici se deduce

$$y'_n = \frac{1}{h} \left[y_{n+1} - y_n - \frac{1}{2} (y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n) \right],$$

de unde rezultă

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{1}{2} (y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n). \quad (6.8)$$

Dar, pe de altă parte, avem

$$y'_{n+1} = \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{h} \text{ și } y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h},$$

Înlocuind aceste expresii în paranteza din (6.8), se obține

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (y'_{n+1} + y'_n),$$

cea ce reprezintă formula corectată (6.7), cu eroarea $o(h^2)$.

Algoritmul predictor-corrector, cu formula lui Euler este deci :

$$\begin{aligned} \bar{y}'_n &= f(x_n, y_n), \\ \bar{y}_{n+1} &= y_n + h\bar{y}'_n, \\ \bar{y}'_{n+1} &= f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} (\bar{y}'_n + \bar{y}'_{n+1}). \end{aligned} \quad (6.9)$$

În timp ce metoda Euler introduce erori de ordinul lui h , metoda Euler cu predicție și corecție asigură un ordin al erorii $o(h^2)$.

Exemplu. Pentru a pune în evidență metodele de mai sus, să integrăm numeric ecuația

$$y' = y$$

cu condiția inițială

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

și să comparăm rezultatele. Evident, $y = e^x$.

1) Metoda lui Euler pentru $h = 0,2$ conduce la următorul rezultat :

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|-----|------|-------|--------|--------|
| x_n | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
| y_n | 1 | 1,2 | 1,44 | 1,728 | 2,0736 | 2,4883 |

2) Metoda lui Euler cu predicție și corecție conduce la următorul rezultat, pentru $h = 0,2$:

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|------|--------|--------|--------|--------|
| x_n | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
| y_n | 1 | 1,22 | 1,4884 | 1,8134 | 2,2123 | 2,6990 |

Pentru $x_5 = 1$, din soluția analitică se obține $y_5 = 2,71828$; se observă că diferența este mai mare în cazul metodei Euler simple, decât la cea cu corecție. În ambele cazuri însă are mare însemnătate alegerea pasului la integrare, care, în exemplul dat, este prea mare, dacă urmărim un rezultat cu câteva zecimale exacte.

Dacă repetăm calculul cu pasul $h = 0,1$, cu metoda Euler cu predicție și corecție, se obține :

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|---|-------|------|------|------|------|------|------|-------|------|------|
| x_n | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
| y_n | 1 | 1,105 | 1,22 | 1,34 | 1,49 | 1,64 | 1,82 | 2,01 | 2,224 | 2,45 | 2,71 |

Au rezultat deci trei cifre exacte. Calculul a fost efectuat cu trunchierea celei de-a șaptea zecimală și cu rotunjirea celei de-a șasea zecimală, iar rezultatul este reprezentat cu patru cifre. La un pas mai mic, se corectează și următoarele zecimale. Rezultă deci că alegerea pasului are un rol important la rezolvarea ecuațiilor diferențiale. De aceea, prin program, pasul se alege din ce în ce mai mic, pînă cînd micșorarea pasului nu mai corectează numărul de cifre stabilit inițial ca precizie.

Din definiția derivatei

$$y'_n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

rezultă că dacă pasul se micșorează oricît de mult, soluția numerică se apropie de soluția analitică. Aceasta nu este adevărat cînd lucrăm cu calculatorul, deoarece în calculator se operează cu numere care au un anumit număr de cifre, din cauza lungimii finite a registrelor; deci în calculator se operează numai cu numere raționale. Pe de altă parte, apar erori de conversie din zecimal în binar și invers, precum și erorile inerente trunchierilor și rotunșirilor. În plus, dacă pasul este foarte mult micșorat, apar operații cu numere mici, la care eroarea relativă de trunchiere și rotunjire este mare. Rezultatul este că, prin micșorarea pasului, cu calculatorul se obține o apropiere a soluției numerice față de cea analitică, după care, la o micșorare exagerată a pasului, erorile încep să crească. Se poate introduce deci ideea găsirii unui pas optim, în cazul în care rezultatul este dorit cu un număr suficient de mare de cifre exacte.

O altă metodă cu predicție și corecție este metoda Adams-Bashforth, care utilizează formulele cu diferențe la stînga :

$$y_{n+1} = y_n + h \left(1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \frac{3}{8} \nabla^3 + \frac{251}{720} \nabla^4 + \dots \right) y'_n$$

(predicție), (6.10)

$$y_{n+1} = y_n + h \left(1 - \frac{1}{2} \nabla - \frac{1}{12} \nabla^2 - \frac{1}{24} \nabla^3 - \frac{19}{720} \nabla^4 - \dots \right) y'_{n+1}$$

(corecție).

Se observă că dacă nu se reține nici un termen în ∇ , din prima expresie rezultă formula lui Euler. Dacă în cea de-a doua expresie se reține numai diferența de ordinul întâi, rezultă formulele cu predicție și corecție (6.9). Procedul de calcul cu formulele (6.10) este următorul :

- se calculează y_{n+1} din prima formulă;
- cunoscînd pe y_{n+1} aproximativ, din ecuația diferențială dată se calculează y_{n+1} ;

— se corectează y_{n+1} utilizînd cea de-a doua formulă.

Pentru îmbunătățirea soluției, cea de-a doua formulă din (6.10) și ecuația diferențială dată pot fi utilizate iterativ (ca ecuații algebrice) pînă cînd y_{n+1} le satisface, după care se trece la pasul următor.

6.3. Metode de tipul Runge-Kutta

Aceste metode utilizează dezvoltări în serie Taylor [30, 52]. Pentru expunerea principiului, să luăm ca exemplu ecuația

$$y'' = xy \quad (6.11)$$

cu condițiile inițiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Condițiile inițiale dau primii doi termeni din seria Taylor, pentru $x = 0$, iar din ecuația diferențială dată rezultă și cel de-al treilea termen. Prin derivare repetată a ecuației diferențiale pot fi obținuți și următorii termeni ai seriei Taylor. Derivând de k ori, se obține

$$y^{(k+2)} = xy^{(k)} + ky^{(k-1)}, \quad k \in N_0,$$

deci, pentru punctul $x = 0$, pot fi calculați termenii succesivi ai seriei Taylor. Notînd pasul cu h , în calcule numerice cu pas egal este convenabilă scrierea seriei în forma

$$y(x_n + h) = y_n + \tau_n^{(1)} + \tau_n^{(2)} + \dots,$$

unde $\tau_n^{(i)} = \frac{h^i y^{(i)}}{i!}$. La începerea fiecărui pas, se cunoaște

y_n și $\tau_n^{(1)}$; din ecuația diferențială (6.11) se determină

$$\tau_n^{(2)} = \frac{1}{2} h^2 x_n y_n$$

și relația de recurență devine

$$k(k-1)\tau_n^{(k+2)} = h^2 x_n \tau_n^{(k)} + h^3 \tau_n^{(k-1)}.$$

Se calculează un număr suficient de termeni, pînă cînd se obține precizia dorită; este recomandabil să se calculeze cîțiva termeni în plus, pentru a evita acumularea unor erori de rotunjire. Metoda aceasta permite o verificare a soluției, prin schimbarea semnului lui h , ceea ce schimbă semnul termenilor de ordinul impar.

Deoarece seria Taylor converge mai rapid decît formulele cu diferențe, pasul poate fi luat mai mare, cu un număr mai mare de termeni. Pentru ecuații neliniare,

la care relațiile de recurență și derivatele de ordin superior implică calcule mai complicate, este recomandabil să se ia un pas mic, fiind suficient un număr mic de termeni ai seriei.

Exemple. 1. Fie ecuația diferențială

$$y' = f(x, y), \text{ cu } y(x_n) = y_n.$$

Se caută o soluție y_{n+1} , presupunând că există numărul necesar de derivate ale lui $f(x, y)$. Se definesc termenii :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \alpha_0 h, y + \beta_0 h), \\ k_3 &= hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 k_1 + \gamma_1 k_2) \end{aligned} \quad (6.12)$$

și o formă liniară

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3, \quad (6.13)$$

care se alege astfel încît dezvoltarea în serie cu pasul h să reprezinte soluția ecuației diferențiale date, pînă la un anumit număr de termeni ai seriei. Dezvoltînd în serie expresiile lui k_1 , k_2 și k_3 , rezultă

$$\begin{aligned} k_1 &= hf, \\ k_2 &= hf + h^2 (\alpha_0 f_x + \beta_0 f f_y) + h^3 \left(\frac{1}{2} \alpha_0^2 f_{xx} + \alpha_0 \beta_0 f f_{xy} + \frac{1}{2} \beta_0^2 f^2 f_{yy} \right), \\ k_3 &= hf + h^2 (\alpha_1 f_x + \beta_1 f f_y + \gamma_1 f f_y) + h^3 \left[\frac{1}{2} \alpha_1^2 f_{xx} + \alpha_1 (\beta_1 + \gamma_1) f f_{xy} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\beta_1 + \gamma_1)^2 f^2 f_{yy} + \gamma_1 (\alpha_0 f_x + \beta_0 f f_y) f_y \right]. \end{aligned}$$

Dezvoltînd pe y_{n+1} în serie, se obține

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf_n + \frac{1}{2} (f_{x,n} + f_n f_{y,n}) + \frac{1}{6} h_3 (f_{xx,n} + 2f_n f_{xy,n} + \\ &\quad + f_n^2 f_{yy,n} + f_{x,n} f_{y,n} + f_n f_{y,n}^2). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Înlocuind (6.12) în (6.13) și identificînd coeficienții cu cei din (6.14), se obține sistemul :

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1, \quad \alpha_0 w_2 + \alpha_1 w_3 = \frac{1}{2},$$

$$\beta_0 w_2 + (\beta_1 + \gamma_1) w_3 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \alpha_0^2 w_2 + \frac{1}{2} \alpha_1^2 w_3 = \frac{1}{6},$$

$$\alpha_0 \beta_0 w_2 + \alpha_1 (\beta_1 + \gamma_1) w_3 = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2} \beta_0^2 w_2 + \frac{1}{2} (\beta_1 + \gamma_1)^2 w_3 = \frac{1}{6},$$

$$\alpha_0 \gamma_1 w_3 = \frac{1}{6}, \quad \beta_0 \gamma_1 w_3 = \frac{1}{6},$$

de unde $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1$ și mai rămân patru relații independente cu șase necunoscute; se iau două valori arbitrare, de exemplu pentru α_0 și α_1 , rezultând în mod unic valori pentru ceilalți parametri.

Pentru formulele de ordinul patru se mai introduce un termen în (6.12) și (6.13), care conține pe k^4 , iar din dezvoltarea în serie se reține și termenul în h^4 , procedeul deci fiind similar cu cel descris mai înainte.

Evaluarea erorii de trunchiere, care rezultă prin eliminarea termenilor în h^4 , respectiv în h^5 , conduce la expresii complicate, rareori recomandabile pentru uz practic.

Iată una din formulele cele mai răspândite în practică, de ordinul patru (Kutta-Simpson):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + o(h^5),$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \quad (6.15)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3).$$

Exemplu. Se dau rezultatele calculului, cu algoritmul (5.15) pentru rezolvarea ecuației

$$y' = 2xy \quad (6.16)$$

cu condiția inițială $y(0) = 1$.

Eroarea este calculată în raport cu soluția analitică $y = e^{x^2}$. În legătură cu metodele Runge-Kutta, au fost făcute diferite sugestii.

Dintre acestea, menționăm formulele algoritmului Kutta-Merson, care permite alegerea automată a pasului, pentru o clasă largă de ecuații diferențiale :

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + \frac{1}{3} hf(x_0, y_0), \\
 y_2 &= y_0 + \frac{1}{6} hf(x_0, y_0) + \frac{1}{6} hf\left(x_0 + \frac{1}{3}h, y_1\right), \\
 y_3 &= y_0 + \frac{1}{8} hf(x_0, y_0) + \frac{3}{8} hf\left(x_0 + \frac{1}{3}h, y_2\right), \\
 y_4 &= y_0 + \frac{1}{2} hf(x_0, y_0) - \frac{3}{2} hf\left(x_0 + \frac{1}{3}h, y_2\right) + \\
 &\quad + 2hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_3\right), \quad (6.17) \\
 y_5 &= y_0 + \frac{1}{6} hf(x_0, y_0) + \frac{2}{3} hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_3\right) + \\
 &\quad + \frac{1}{6} hf(x_0 + h, y_4).
 \end{aligned}$$

Merson a arătat că valoarea $y = \frac{1}{5}(y_4 - y_5)$ poate fi utilizată pentru ajustarea pasului, de obicei prin înjumătățirea acestui pas, pînă cînd eroarea devine acceptabilă.

6.4. Alte metode uzuale

Dintre metodele cu predicție și corecție [22], algoritmul dat de Milne constă în următoarele : se dă ecuația

$$y' = f(x, y)$$

și se utilizează următoarele formule :

$$p_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3} (2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2});$$

$$o(h^5) = \frac{28}{90} h^5 y^{(5)};$$

$$p'_{n+1} = f(x_{n+1}, p_{n+1});$$

$$c_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} (p'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}),$$

unde cu p s-a notat predicția, iar cu c s-a notat valoarea corectată a lui y .

Metoda lui Milne este uneori instabilă, în sensul că soluția poate oscila cu amplitudine crescătoare, independent de micșorarea pasului h . O modificare a acestui algoritm a adus-o Hamming, care utilizează același predictor, dar un corector modificat $c_{n+1(mod)}$

$$p_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3} h (2y'_n - 2y'_{n-2}) + \frac{28}{90} h^5 y^5 (\zeta_1),$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{8} (9y_n - y_{n-2}) + \frac{3}{8} y'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1} - \frac{1}{40} h^5 y^5 (\zeta_2),$$

$$c_{n+1(mod)} = c_{n+1} - \frac{9}{121} (c_{n+1} - p_{n+1}).$$

Cu acest algoritm se obține o mai bună stabilitate. Se observă că metoda lui Milne nu poate fi aplicată de la primul pas de integrare, deoarece necesită valoarea lui y pentru pași anteriori; de aceea, integrarea începe cu o altă metodă (de exemplu metoda lui Euler cu predicție și corecție sau metoda Runge-Kutta), iar după obținerea valorilor necesare, se continuă cu metoda lui Milne.

Cînd dezvoltarea în serie Taylor este inaplicabilă, poate, fi utilizată metoda iterativă a lui Picard. Ecuația dată se pune în forma

$$\int_{x_0}^y dy = \int_{y_0}^x f(x, y) dx.$$

Se introduce în partea dreaptă o valoare inițială de test, după care se iterează pentru îmbunătățirea soluției.

Exemplu. Fie

$$y' = xy + 1; \quad y(0) = 1; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Rezultă formula iterativă :

$$y^{(i+1)} = 1 + \int_0^x (xy + 1)^{(i)} dx.$$

Pornind cu valoarea inițială dată, se găsește

$$y^{(1)} = 1 + \int_0^x (0 + 1) dx = 1 + x$$

și, continuînd iterația, se găsește

$$y^{(2)} = 1 + \int_0^x [(1 + x)x + 1] dx = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x.$$

Mai departe :

$$y^{(3)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15},$$

ceea ce reprezintă același rezultat ca la aplicarea dezvoltării în serie Taylor.

În general, metodele bazate pe dezvoltarea în serie Taylor conduc la o bună precizie la începutul intervalului, eroarea crescînd pe măsură ce calculul se depărtează de condițiile inițiale. Există metode care aproximează soluția pe tot intervalul de integrare, în genul metodelor bazate pe trasarea unor curbe prin metoda celor mai mici pătrate.

Pentru ilustrare, să reluăm exemplul de mai sus și să căutăm soluția sub forma unui polinom de gradul al doilea

$$y_t = c_0 + c_1x + c_2x^2.$$

Din condiția inițială rezultă imediat $c_0 = 1$. Pentru determinarea coeficienților c_1 și c_2 să considerăm restul:

$$R - y'_t - f(x, y_t) = y'_t - xy_t - 1.$$

Introducând expresia lui y_t , se obține

$$R - c_1(1 - x^2) + c_2(2x - x^3) - x - 1.$$

Orice metodă care minimizează acest rest poate fi utilizată pentru determinarea lui c_1 și c_2 ; de exemplu, în metoda lui Galiorkin, se definește media ponderată

$$\frac{\int_a^b w(x)R(x)dx}{\int_a^b w(x)dx},$$

unde $w(x)$ este o funcție pondere, iar a și b sînt limitele de integrare. Dacă se iau ca funcții puterile lui x din soluția căutată, se obține sistemul

$$\int_0^1 xR dx \equiv 0,25 c_1 + 0,4667 c_2 - 0,8333 = 0,$$

$$\int_0^1 x^2R dx \equiv 0,1333 c_1 + 0,3333 c_2 - 0,5833 = 0,$$

de unde rezultă

$$y = 1 + 0,24x + 1,656x^2.$$

Pentru același exemplu, să utilizăm acum metoda celor mai mici pătrate:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_1} \int_0^1 R^2 dx = \int_0^1 R \frac{\partial R}{\partial c_1} dx = 0,5333 c_1 + 0,4167 c_2 - 0,9167 = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_2} \int_0^1 R^2 dx = \int_0^1 R \frac{\partial R}{\partial c_2} dx = 0,4167 c_1 + 0,6762 c_2 - 1,2167 = 0.$$

Rezolvînd sistemul, se găsește

$$y_t = 1 + 0,6036x + 1,4273x^2.$$

Soluția analitică a ecuației date este

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf} \frac{x}{2} \right).$$

Compararea arată că, pentru acest exemplu, cea mai bună aproximație o dă metoda celor mai mici pătrate.

6.5. Sisteme de ecuații diferențiale ordinare

Cele arătate la rezolvarea numerică a unei ecuații diferențiale ordinare pot fi extinse fără dificultate la sisteme de ecuații [30, 23]. Fie sistemul de două ecuații

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y, z) \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned} \right\}$$

Să-i aplicăm algoritmul Runge-Kutta

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) + o(h^5),$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6} (m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3) + o(h^5),$$

unde

$$k_0 = hf(x_n, y_n, z_n), \quad m_0 = hg(x_n, y_n, z_n),$$

$$k_1 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}, z_n + \frac{m_0}{2}\right),$$

$$m_1 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}, z_n + \frac{m_0}{2}\right),$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2}\right),$$

$$m_2 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf(x_n + h, y_n + k_2, z_n + m_2),$$

$$m_3 = hg(x_n + h, y_n + k_2, z_n + m_2).$$

Pentru ecuații diferențiale de ordin superior, se obișnuiește trecerea la sistemul echivalent de ordinul întâi, transformare care este întotdeauna posibilă. Prin urmare, rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordin superior revine la rezolvarea unui sistem de ecuații de ordinul întâi.

Pentru minimizarea memoriei necesare și pentru o mai bună precizie, Gill [30, 52] a adus unele modificări formulelor Runge-Kutta. Formula de bază utilizată este

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} k_1 + \frac{1}{3} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) k_2 + \\ + \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) k_3 + \frac{1}{6} k_4,$$

unde

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_1 + \right. \\ \left. + \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(x_i + h, y_i + \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_2 + \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_3\right).$$

Pentru îmbunătățirea calculului, se introduc următoarele formule :

$$l_1 = y_i + \frac{1}{2} (k_1 - 2q_0),$$

$$q_1 = q_0 + 3 \cdot \frac{1}{3} (k_1 - 2q_0) - \frac{1}{2} k_1,$$

$$l_2 = l_1 + \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) (k_2 - q_1),$$

$$q_2 = q_1 + 3 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) (k_2 - q_1),$$

$$l_3 = l_2 + \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) (k_3 - q_2),$$

$$q_3 = q_2 + 3 \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) (k_3 - q_2),$$

$$l_4 = l_3 + \frac{1}{6} (k_4 - 2q_3),$$

$$q_4 = q_3 + 3 \cdot \frac{1}{6} (k_4 - 2q_3) - \frac{1}{2} k_4.$$

Dacă se fac toate înlocuirile în expresia lui l_4 , se obține y_{i+1} , deci l_4 reprezintă soluția pentru pasul $i + 1$. Valorile lui q sînt introduse pentru compensarea erorilor de rotunjire acumulate la fiecare pas al calculului; inițial, $q_0 = 0$; dacă la primul pas nu apar erori, atunci $q_4 = 0$. Dacă la primul pas apar erori, q_4 este utilizat în locul lui q_0 la pasul următor.

Exemplu. Să considerăm sistemul

$$y'_m = f(y_0, y_1, \dots, y_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, M,$$

la care se adaugă ecuația

$$y'_0 = f_0 = 1.$$

Se notează cu indicele i pasul de calcul și cu j indicii din formulele anterioare ($j = 1, 2, 3, 4$). Calculul se desfășoară în modul următor: se inițializează h , M și limitele de integrare (X_L); se pune $i = 0$, pentru a obține $x = x_0 + h$; se calculează k_1 , pentru toți m din sistemul de ecuații; se calculează l_1 și q_1 , cu $q_0 = 0$, după care se ia $q_0 = q_4$; se repetă calculul pentru $j = 2, 3, 4$. Valorile lui l_4 sînt soluțiile care se tipăresc.

În fig. 6.3 se reprezintă o organigramă pentru această parte a calculului,

6.6. Probleme bilocale

Pentru aplicații în tehnică și în economie, este necesară o prezentare a modului de rezolvare numerică a ecuațiilor diferențiale ordinare, cînd în loc de condiții inițiale complete se dă un număr echivalent de condiții inițiale și finale. Astfel de probleme apar, de exemplu, în calcule de optimizare, navigație etc.

În cele ce urmează, se presupune că problema dată asigură existența soluției și că soluția este unică; în general, pentru problemele multilocale, existența și unicitatea soluției trebuie aprioric asigurate, înainte de a

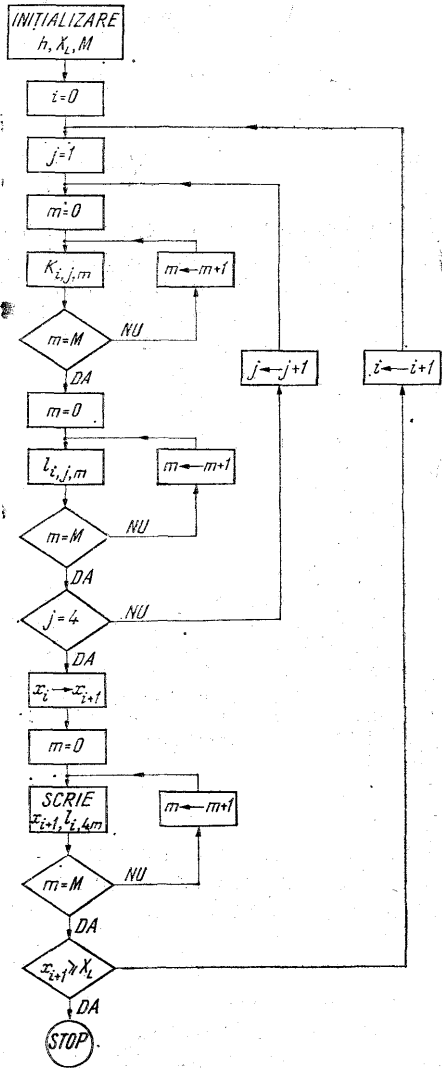


Fig. 6.3.

trece la calculul numeric, deoarece nu se poate presupune tacit.

Un exemplu de problemă bilocală este următorul: se dă o ecuație de ordinul al doilea, cu condițiile $y(a) = y_a$ și $y(b) = y_b$. La calculul numeric, dificultățile provin din faptul că y_b nu poate fi practic utilizat, în nici una din metodele aplicate la rezolvarea problemelor cu condiții inițiale.

Metodele mai uzuale, pentru rezolvarea problemelor bilocale, sînt :

- 1° trecerea la diferențe finite ;
- 2° iterarea unei metode cu condiții inițiale ;
- 3° trecerea la două probleme echivalente, cu condiții inițiale ;

4° evaluarea aproximativă a soluției prin metoda Monte Carlo.

Trecerea la diferențe finite necesită divizarea intervalului de integrare cu punctele x_0, x_1, \dots, x_n . Pentru fiecare punct se scrie o ecuație cu diferențe în y , rezultînd un sistem algebric. În funcție de compatibilitatea sistemului algebric, pot fi rezolvate numeroase clase de probleme bilocale.

La iterarea unei metode cu condiții inițiale se încearcă o soluție cu condiții inițiale fictive (pentru cele care nu se dau), iar în funcție de condițiile finale rezultate se corectează condițiile inițiale luate arbitrar.

Convergența iterației constituie o problemă dificilă, mai ales la problemele neliniare, la care, schimbarea condițiilor inițiale, în funcție de condițiile finale obținute, nu rezultă prin raționamente simple.

Trecerea la două probleme echivalente, cu condiții inițiale, nu este posibilă decît la ecuații liniare (deoarece suma a două soluții particulare este și ea o soluție).

Fie, de exemplu, ecuația

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x)$$

cu condițiile bilocale $y(a) = A$, $y(b) = B$. Se introduc două ecuații în variabilele independente u și v :

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = F(x),$$

$$v'' + P(x)v' + Q(x)v = F(x),$$

cu condițiile inițiale

$$u(a) = A, \quad u'(a) = C,$$

$$v(a) = A, \quad v'(a) = D,$$

unde C și D sînt alese arbitrar, dar inegale, pentru ca soluțiile să difere în punctul $x = b : u(b) \neq v(b)$. După aflarea soluțiilor $u(x)$ și $v(x)$ avem evident :

$$y(x) = \alpha u(x) + \beta v(x),$$

unde α și β se determină din condițiile bilocale :

$$A = \alpha A + \beta A,$$

care, pentru $A = 0$ nu are sens, iar pentru $A \neq 0$ se obține $\alpha + \beta = 1$; de asemenea

$$B = \alpha u(b) + \beta v(b),$$

de unde

$$\alpha = \frac{B - v(b)}{u(b) - v(b)}, \quad \beta = - \frac{B - u(b)}{u(b) - v(b)}.$$

Metoda poate fi aplicată și la ecuații diferențiale de ordin superior [55]

Metoda Monte Carlo furnizează o soluție aproximativă, care este foarte utilă pentru îmbunătățirea soluției prin unul din procedeele iterative. Procedeele este elaborat pentru ecuații de tipul [56]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \equiv \frac{dV(x)}{dx}$$

cu condițiile bilocale $x(t_0) = x_0$, $x(t'_0) = x'_0$. Problema constă în aflarea soluției pe intervalul $[t_0, t'_0]$. Se introduc următoarele două ecuații auxiliare :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - V(x)p,$$

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} - V(x)\bar{p}.$$

Cu ajutorul funcțiilor $p(x, t)$ și $\bar{p}(x, t)$ se definește valoarea medie a lui $x(t)$ la timpul t :

$$Ex = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}(x, t) x p(x, t) dx. \quad (6.18)$$

Punind condiția ca p și \bar{p} să tindă la zero cind $|x| \rightarrow \infty$ și punind $D = \frac{1}{2}$, se obține

$$\frac{d^2}{dt^2} Ex = E \frac{dV}{dx} \quad (6.19)$$

Dacă variația funcției pondere $\bar{p}(x, t)$ $p(x, t)$ cu x este bine localizată, atunci

$$E \frac{dV}{dx} \approx \frac{dV(Ex)}{d(Ex)},$$

astfel încît valoarea medie Ex obținută din ecuația (6.19) poate fi interpretată ca o primă aproximație a soluției căutate. Procedul de calcul este următorul: se alege condiția inițială pentru $p(x, t)$ după cum urmează:

$$\bar{p}(x, t_0) = \delta(x - x_0),$$

unde $\delta(x - x_0)$ este măsura lui Dirac cu suportul în x_0 . Notind cu $p_0(x, t)$ soluția ecuației diferențiale pentru cazul $V(x) = 0$, se obține

$$p_0(x, t) = [4\pi D(t - t_0)]^{-\frac{1}{2}} \exp\{- (x - x_0)^2 / [4D(t - t_0)]\},$$

unde $t \geq t_0$. Soluția pentru $p(x, t)$ poate fi pusă atunci sub forma

$$p(x, t) = p_0(x, t) - \int_{t_0}^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' p_0(x - x', t - t') V(x') p(x', t').$$

În forma aproximațiilor succesive, soluția poate fi rescrisă astfel:

$$\begin{aligned} p(x, t) = & p_0(x, t) - \int_{t_0}^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' p_0(x - x', t - t') V(x') p_0(x', t') + \\ & + \int_{t_0}^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{t_0}^t dt'' \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' p_0(x - x', t - t') V(x') p_0(x' - x'', \\ & t' - t'') V(x'') p_0(x'', t'') - \dots \end{aligned}$$

Intervalul $[t_0, t]$ este acum divizat în n subintervale egale $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Deoarece p_0 poate fi interpretat ca probabilitatea de tranziție într-un proces Markov, ecuația poate conduce la următoarea expresie :

$$\begin{aligned}
 p(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \sum_{k=1}^n \frac{t-t_0}{n} V(x_k) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{(t-t_0)^2}{n^2} V(x_k) V(x_l) - \dots \right] \times \\
 &\times p_0(x - x_{n-1}, t - t_{n-1}) \dots p_0(x_1 - x_0, t_1 - t_0) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -(t-t_0) \left[n \sum_{k=1}^n V(x_k) \right] \right\} p_0(x - x_{n-1}, t - \\
 &- t_{n-1}) p_0(x_{n-1} - x_{n-2}, t_{n-1} - t_{n-2}) \dots p_0(x_1 - x_0, t_1 - t_0) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Această trecere la limită a fost studiată în legătură cu o clasă de integrale Wiener; limita există, dacă $V(x)$ este continuă și mărginită inferior. Reciproc, pentru p se impune condiția finală

$$\bar{p}(x, t'_0) = \delta(x - x'_0).$$

Se notează cu \bar{p}_0 soluția pentru $V(x) = 0$ și rezultă

$$\bar{p}_0(x, t) = 4\pi(t'_0 - t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -(x - x'_0)^2 / [4D(t'_0 - t)] \right\},$$

unde $t \leq t'_0$. Printr-o diviziune cu pas egal a intervalului $[t, t'_0]$ prin m puncte $t < t'_1 < t'_2 < \dots < t'_m$ obținem

$$\begin{aligned}
 \bar{p}(x, t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ (-t'_0 - t) \left[m \sum_{k=1}^m V(x'_k) \right] \right\} \bar{p}_0(x'_0 - \\
 &- x'_{m-1}, t'_0 - t'_{m-1}) \bar{p}_0(x'_{m-1} - x'_{m-2}, t'_{m-1} - t'_{m-2}) \dots \\
 &\dots \bar{p}_0(x'_1 - x_1, t'_1 - t) dx'_1 dx'_2 \dots dx'_{m-1},
 \end{aligned}$$

cu aceleași observații ca în cazul anterior; cu aceste considerente, s-a dovedit (6.18).

Calculul decurge în modul următor: se divide intervalul de integrare în N subintervale egale, prin punctele t_0, t_1, \dots, t_N ($t_N = t'_0$). Traectoria care leagă punctul (t_0, x_0) cu punctul (t'_0, x'_0) este un poligon deschis cu vîrfurile în punctele $(t_1, x_1), (t_2, x_2), \dots, (t_{N-1}, x_{N-1})$, similar cu traseul unei mișcări browniene a unei particule. Luînd p_0 și \bar{p}_0 ca probabilități cu aceeași repartiție (normală) și ținînd seama de faptul că

$$\frac{t'_0 - t}{m} = \frac{t - t_0}{n} = \frac{t'_0 - t_0}{N} = \Delta t; \quad t = t_i; \quad i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

din ecuațiile precedente rezultă

$$Ex_i \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \exp \left[-\Delta t \sum_{k=1}^N V(x_k) \right] p_0(x_1 - x_0, \Delta t) \dots \\ \dots p_0(x_i - x_{i-1}, \Delta t) p_0(x_{i+1} - x_i, \Delta t) \dots p_0(x'_0 - \\ - x_{N-1}, \Delta t) dx_1 \dots dx_{N-1},$$

unde $N \geq 1$ și

$$p_0(\Delta x, \Delta t) = (2\Delta t)^{-1/2} \exp [-(\Delta x)^2 / (2\Delta t)].$$

Pentru alegerea traseului brownian se recurge de asemenea la o variabilă aleatoare gaussiană ξ , cu o formulă de interpolare pentru o mișcare browniană condiționată; dacă x_0, x_1, \dots, x_{j-1} sînt fixați, atunci

$$x_j = [x_{j-1}(t_N - t_j) + x_N(t_j - t_{j-1})] / (t_N - t_{j-1}) + \xi [(t_j - t_{j-1})(t_N - \\ - t_j) / (t_N - t_{j-1})]^{1/2} = [(N-j)x_{j-1} + x'_0] / (N-j+1) + \xi [(t'_0 - \\ - t_0) / N] (N-j) / (N-j+1)^{1/2}.$$

Pe scurt, în decursul calculului se extrage informația referitoare la traseul brownian, notînd cu v cantitățile care corespund celui de-al v -lea pas, după expresia

$$Ex(t_i) = \frac{\sum_v x_i^{(v)} \exp \left[-(t'_0 - t_0) / N \sum_{k=1}^N V(x_k^{(v)}) \right]}{\sum_v \exp \left[-(t'_0 - t_0) / N \sum_{k=1}^N V(x_k^{(v)}) \right]}.$$

$V(x)$ poate fi determinat prin integrarea numerică a lui $f(x)$. Numărul de pași N se alege nu prea mare (10–20) pentru a nu crește prea mult numărul de pași al traseului brownian; se asigură astfel o soluție în primă aproximație, dar cu o convergență rapidă. Evaluarea erorii este o problemă dificilă; se presupune că eroarea este de forma $o(n^{-2})$, $o(m^{-2})$ sau $o(N^{-2})$, dacă $\sum V(x)$ este înlocuită cu integrala corespunzătoare. Este esențial ca $V(x)$ să fie continuă și mărginită inferior, deci metoda se referă numai la această clasă de ecuații diferențiale.

În încheierea acestui paragraf, vom lua un exemplu la care se utilizează o metodă de discretizare, pentru o ecuație liniară, de ordinul doi, cu coeficienți variabili [52]:

$$y'' + f(x)y = g(x); \quad 0 < x < l,$$

$$y(0) = y_0, \quad y(l) = y_n.$$

Pentru punctele interioare ale intervalului, folosim diferența simetrică pentru discretizarea derivatei și avem

$$\boxed{1 \quad h^2 f_i - 2 \quad 1} \quad y_i = h^2 g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

unde $f_i = f(x_i)$ și $g_i = g(x_i)$.

Cu notațiile

$$a_{00} = 1, \quad a_{0,n+1} = y_0,$$

$$a_{i,i-1} = a_{i,i+1} = 1, \quad a_{ii} = h^2 f_i - 2; \quad a_{i,n+1} = h^2 g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$a_{nn} = 1, \quad a_{n,n+1} = y_n,$$

se obține sistemul algebric

$$\sum_{j=0}^n a_{ij} y_j = a_{i,n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Celelalte elemente, nespecificate, ale matricei sînt nule. Pentru $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$, $l = 1$ și $n = 5$ rezultatele calculului sînt date în tabelul următor:

| | | | | | | |
|-----|-----|----------|---------|----------|---------|-----|
| x | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 0,0 |
| y | 0,0 | -0,04975 | -0,0671 | -0,05938 | -0,0342 | 0,0 |

Eroarea este $o(h^2)$; prin micșorarea pasului, precizia se îmbunătățește.

Pentru ca sistemul algebric să fie compatibil, este necesar ca $\det(a_{ij}) \neq 0$; această condiție depinde însă de f_i și este necesar a fi verificată. În cazul cînd $\det(a_{ij}) = 0$ se recurge la alte metode (de exemplu aflarea valorilor proprii).

6.7. Stabilitate și consistență

Una din cele mai bune căi de tratare a problemei stabilității soluțiilor ecuațiilor diferențiale este cea bazată pe definirea stabilității în sensul lui Leapunov [54, 57]. Fie $f: R^n \times R^1 \rightarrow R^n$. O soluție y a ecuației diferențiale

$$y' = f(y, t) \quad (6.20)$$

este stabilă, în sensul lui Leapunov, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît orice altă soluție \hat{y} a ecuației diferențiale date pentru care

$$\|y(0) - \hat{y}(0)\| < \delta(\varepsilon)$$

satisface condiția

$$\|y(t) - \hat{y}(t)\| < \varepsilon, t \in (0, \infty). \quad (6.21)$$

Dacă soluția y este stabilă și, în plus, satisface condiția

$$\|y(t) - \hat{y}(t)\| \rightarrow 0 \text{ pentru } t \rightarrow \infty, \quad (6.22)$$

atunci y este asimptotic stabilă. În fine, y este relativ stabilă, dacă condiția (6.21) este înlocuită cu

$$\|y(t) - \hat{y}(t)\| \leq \varepsilon \|y(t)\|. \quad (6.23)$$

Conceptul de stabilitate relativă prezintă o mare însemnătate pentru calcul numeric. Stabilitatea, în sensul lui Leapunov, are următoarea semnificație intuitivă: o mică schimbare a condițiilor inițiale păstrează soluțiile suficient de apropiate. În caz contrar, sistemul este instabil.

Exemplu. Fie

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

cu condițiile inițiale

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1.$$

Soluția este

$$y_1(t) = e^{-t}, \quad y_2(t) = -e^{-t}.$$

Să introducem acum o ușoară schimbare a condițiilor inițiale

$$\hat{y}_1(0) = 1 + \varepsilon, \quad \hat{y}_2(0) = -1.$$

Soluția devine

$$\hat{y}_1(t) = \frac{1}{2}(2 + \varepsilon)e^{-t} + \frac{1}{2}\varepsilon e^t; \quad \hat{y}_2(t) = -\frac{1}{2}(2 + \varepsilon)e^{-t} + \frac{1}{2}\varepsilon e^t$$

și se observă că

$$|y_i(t) - \hat{y}_i(t)| \rightarrow +\infty \text{ pentru } t \rightarrow \infty; \quad i = 1, 2.$$

Deci acest sistem este instabil la variații mici ale unor condiții inițiale.

Teorema de stabilitate pentru sistemele liniare se formulează în modul următor: soluția ecuației

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0,$$

unde A este o matrice constantă reală de ordinul n și este stabilă (în sensul lui Leapunov), dacă toate valorile proprii ale matricei A au partea reală nepozitivă și dacă orice valoare proprie cu partea reală egală cu zero aparține unui bloc Jordan de ordinul 1. Dacă toate valorile proprii ale matricei A au partea reală negativă, atunci sistemul este asimptotic stabil. Demonstrația teoremei se face considerând soluția de forma

$$y(t) = e^{At}y_0.$$

Punind matricea e^{At} sub forma canonică Jordan

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1},$$

se constată că elementele lui e^{Jt} tind la zero, când $t \rightarrow \infty$, numai dacă valorile proprii au parte reală negativă, și rămân mărginite numai dacă blocurile Jordan au dimensiunea 1×1 . În concluzie, sistemul este stabil, dacă și numai dacă valorile proprii ale matricei A au parte reală nepozitivă și orice valoare proprie cu partea reală egală cu zero este simplă.

Pentru calcul numeric prezintă o însemnătate mai mare conceptul de stabilitate relativă. Expunerea teoremei asupra stabilității relative necesită introducerea prealabilă a unor noțiuni; dacă într-o transformare canonică $P^{-1}AP$, matricea A are mai puțin decât n vectori proprii independenți, atunci celelalte coloane ale lui P sint denumite vectori proprii generalizați sau vectori principali. Dacă avem

$$(A - \lambda I)^k x = 0 \text{ și } (A - \lambda I)^{k-1} x \neq 0,$$

atunci x este un vector principal de grad k al matricei A . Dacă x este un vector principal de grad m , unde m este dimensiunea celui mai mare bloc Jordan al matricei A (asociat cu valoarea proprie corespunzătoare), atunci x este un vector principal de grad maximal. Acum se poate formula teorema referitoare la stabilitate relativă, valabilă pentru ecuații liniare cu coeficienți constanți; pentru matricea A notăm cu Λ mulțimea valorilor proprii ale lui A , cu parte reală maximală. Atunci, o soluție y a sistemului liniar $y' = Ay$, $y(0) = y^0$ este relativ stabilă, dacă și numai dacă există un $\lambda \in \Lambda$ astfel încât $y(0)$ să aibă o componentă pe direcția unui vector principal de grad maximal asociat cu λ .

Să reluăm exemplul dat anterior, scriind soluția generală sub forma

$$y_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t, \quad y_2(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t.$$

Aceste soluții pot fi ușor calculate numeric dacă $c_2 \neq 0$; pentru t mare eroarea absolută poate ajunge mare, dar eroarea relativă poate fi menținută mică. Am văzut însă că dacă $c_2 = 0$, este extrem de dificil de calculat o soluție cu eroare relativă mică, deoarece apare contribuția lui e^t . De aceea, soluția pentru $c_2 = 0$ este relativ instabilă, în timp ce soluția pentru $c_2 \neq 0$ este relativ stabilă. Acest exemplu pune în evidență faptul că $y(0)$ trebuie ales după direcții anumite, pentru ca soluția să fie relativ stabilă.

Deoarece, prin discretizare, se trece la ecuații cu diferențe, extindem definițiile referitoare la stabilitate prin simplă analogie. Astfel, fie ecuația cu diferențe

$$y^{k+1} = G(y^k, k), \quad k \in N,$$

unde $G: R^n \times R^1 \rightarrow R^n$ este o aplicație dată, iar y^0 este cunoscut. Atunci:

1° dacă se dă $\varepsilon > 0$ pentru care există un $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît $\{\hat{y}^k\}$ este și ea o soluție pentru care

$$\|y^0 - \hat{y}^0\| < \delta(\varepsilon), \quad \|y^k - \hat{y}^k\| \leq \varepsilon, \quad k \in N_0,$$

atunci soluția y^k este stabilă;

2° dacă, în plus, avem

$$\|y^k - \hat{y}^k\| \rightarrow 0 \quad \text{cînd} \quad k \rightarrow \infty,$$

atunci soluția este asimptotic stabilă;

3° dacă cea de-a doua condiție din 1° este înlocuită cu

$$\|y^k - \hat{y}^k\| \leq \varepsilon \|y^k\|, \quad k \in N_0,$$

atunci soluția $\{y^k\}$ este relativ stabilă.

Pentru ecuații liniare cu coeficienți constanți

$$y^{k+1} = By^k + d, \quad \text{cu } y^0 \text{ dat, } k \in N,$$

cu $d \in R^n$ și B de dimensiune $n \times n$, o soluție $\{y^k\}$ este stabilă dacă și numai dacă

$$\rho(B) \leq 1,$$

iar dacă $\rho(B) = 1$, atunci B are valori proprii λ , cu $|\lambda| = \rho(B)$ astfel încît fiecare bloc Jordan asociat cu λ este de tip 1×1 . Reamintim că $\rho(B)$ este raza spectrală a lui B , adică

$$\rho(B) = \max |\lambda_i|.$$

Dacă $\rho(B) < 1$, atunci soluția este asimptotic stabilă.

Pentru a pune în evidență legătura dintre ecuația diferențială și ecuația cu diferențe, să luăm ca exemplu metoda Euler.

Fie ecuația

$$y' = Ay.$$

Integrarea numerică se obține prin schema

$$y^{k+1} = y^k + hAy^k = By^k, \quad \text{unde } B = I + hA.$$

Pentru h mic, proprietățile de stabilitate ale celor două ecuații sînt aceleași (pentru stabilitatea asimptotică). Într-adevăr, dacă $\rho(I + hA) < 1$,

atunci toate valorile proprii ale lui hA sînt situate într-un disc cu centrul în -1 și cu raza mai mică decît 1. Deci valorile proprii ale lui hA au partea reală negativă și, deoarece $h > 0$, rezultă că și A are toate valorile proprii cu parte reală negativă.

Reciproc, să presupunem că toate valorile proprii ale lui A au parte reală negativă și deci sînt situate într-un pătrat delimitat de $-a \pm ib$ și $-(a+b) \pm ib$. Valorile proprii ale lui $I + hA$ sînt situate într-un pătrat delimitat de $1 + h(a \pm ib)$ și $1 + h(-a - b \pm ib)$. Atunci, pentru a avea $\rho(I + hA) < 1$ este suficient ca

$$(1 - ah)^2 + h^2b^2 < 1 \text{ și } [1 - (a+b)h]^2 + h^2b^2 < 1.$$

Aceste inegalități sînt verificate pentru h suficient de mic.

Pentru a prezenta conceptul de consistență, vom lua ca exemplu ecuația scalară

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = y_0,$$

și ca metodă de integrare ecuația cu diferențe

$$y_{k+n} = \alpha_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + \alpha_0 y_k + \\ + h\Phi(x_{k+n}, \dots, x_k; y_{k+n}, \dots, y_k; h).$$

Avem

$$x_i = a + ih, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad h = (b - a)/N;$$

$\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ sînt constante date; Φ este o funcție dată, care depinde de f ; condițiile inițiale y_0, \dots, y_{n-1} sînt cunoscute.

Dacă $n = 1$, metoda este „pas cu pas”. Dacă Φ nu depinde de y_{k+1} , atunci metoda este explicită și y_{k+1} se determină direct, calculîndu-se membrul al doilea. În cazul metodei implicite, y_{k+n} se calculează rezolvînd ecuația (de obicei neliniară). Formula dată acoperă toate cazurile anterioare din acest capitol, astfel încît cea mai mare parte din metodele uzuale sînt reprezentabile în această formă. De exemplu:

$$y_{k+1} = y_k + hf_k; \quad k \in N, \text{ (Euler)}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} h [f_k + f(x_{k+1}, y_k + hf_k)]$$

(Heun sau Runge-Kutta de ordinul doi).

Metoda Runge-Kutta de ordinul patru este dată de schema

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} (\Gamma_1 + 2\Gamma_2 + 2\Gamma_3 + \Gamma_4),$$

unde cu Γ s-au scris termenii notați cu k , deoarece k este acum utilizat la indice. Avem deci

$$\Gamma_1 = hf_k, \quad \Gamma_2 = hf \left(x_k + \frac{1}{2}h, \quad y_k + \frac{1}{2}\Gamma_1 \right),$$

$$\Gamma_3 = hf \left(x_k + \frac{1}{2}h, \quad y_k + \frac{1}{2}\Gamma_2 \right), \quad \Gamma_4 = hf(x_k + h, y_k + \Gamma_3).$$

Toate aceste metode sînt metode explicite. Un exemplu de metodă implicită este formula trapezelor (Simpson):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h [f_k + f(x_{k+1}, y_{k+1})].$$

Un alt caz al aplicării formulei generale date este metoda liniară cu mai mulți pași:

$$y_{k+n} = \alpha_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + \alpha_0 y_k + h [\beta_n f_{k+n} + \dots + \beta_0 f_k],$$

unde $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ și β_0, \dots, β_n sînt constante date. Dacă $\beta_n = 0$, atunci metoda este explicită, iar dacă $\beta_n \neq 0$, metoda este implicită. Din această categorie face parte metoda Adams-Bashforth

$$y_{k+4} = y_{k+3} + (h/24)(55f_{k+3} - 59f_{k+2} + 37f_{k+1} - 9f_k),$$

care este o metodă explicită. De asemenea, o metodă implicită este metoda Adams-Moulton:

$$y_{k+3} = y_{k+2} + (h/24)(9f_{k+3} + 19f_{k+2} - 5f_{k+1} + f_k).$$

Metoda lui Milne, ca și alte metode, face parte din aceeași categorie; de exemplu:

$$y_{k+3} = y_{k-1} + (4h/3)(2f_{k+2} - f_{k+1} + 2f_k)$$

și

$$y_{k+2} = y_k + (h/3)(f_{k+2} + 4f_{k+1} + f_k).$$

În legătură cu paragraful 1.14, introducem următoarele concepte particularizate la exemplul ecuațiilor diferențiale: dacă y este soluția ecuației diferențiale pe intervalul $[a, b]$ și y_0, \dots, y_N , cu $Nh = b - a$, este soluția aproximativă dată de ecuația cu diferențe, atunci

$$\max_{0 \leq i \leq N} |y(x_i) - y_i|$$

se numește eroarea globală de discretizare. Eroarea locală de discretizare, pentru $x \in [a, b - nh]$ este dată de

$$\tau(x, h) = h^{-1} [y(x + nh) - \alpha_{n-1}y(x + (n-1)h) - \dots - \alpha_0 y(x)] - \Phi(x + nh, x + (n-1)h, \dots, x; y(x + nh), \dots, y(x); h).$$

Se observă că $\tau(x, h)$ este restul împărțit la h , cînd soluția exactă este înlocuită în ecuația cu diferențe. Notăm

$$\tau(h) = \max_{x \in [a, b - nh]} |\tau(x, h)|$$

și definim consistența în modul următor: metoda de discretizare aleasă este consistentă cu ecuația diferențială dată, dacă

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0.$$

Dacă ecuația diferențială dată are o soluție y continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$ și dacă funcția Φ este continuă, în toate argumentele, atunci se formează polinomul

$$p(\lambda) = \lambda^n - \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - \alpha_0$$

și se presupune că $p(1) = 0$. Atunci dacă

$$\Phi(x, \dots, x; y(x), \dots, y(x); 0) = p'(1) f(x, y(x))$$

pentru orice $x \in [a, b]$, metoda de discretizare este consistentă cu ecuația diferențială dată [54]. Aplicînd aceasta la metoda pas cu pas, rezultă

$$p(\lambda) = \lambda - \alpha_0;$$

prin urmare,

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_{k+1}, x_k; y_{k+1}, y_k; h).$$

Deoarece $p'(1) = 1$, avem mai departe

$$\Phi(x, x; y(x), y(x); 0) = f(x, y(x)).$$

În același mod poate fi verificată condiția de consistență pentru celelalte metode.

Condiția de stabilitate [54] a metodei se poate enunța astfel: metoda este stabilă, dacă și numai dacă rădăcinile polinomului $p(\lambda)$ îndeplinesc condiția $|\lambda_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, iar orice rădăcină de modul unu este simplă. De exemplu, metoda

$$y_{k+2} = 4y_{k+1} - (3 + 2h)y_k, \quad y_0 = 1,$$

cu y_1 dat nu este stabilă, deoarece

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

și rădăcinile sînt $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 3$.

Dacă $|\lambda_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, și inegalitatea este strictă pentru $n - 1$ rădăcini, atunci metoda are o stabilitate tare; în caz contrar stabilitatea este slabă.

Metoda de discretizare este cel puțin de ordin p , dacă $\tau(h) = o(h^p)$ și este exact de ordin p dacă $\tau(h) \neq o(h^{p+1})$.

Pentru cazul analizat aici, problema convergenței se reduce la propoziția: consistență plus stabilitate implică convergență.

APLICAȚII

7.1. Prezentarea exemplelor considerate

Ca aplicații pentru algoritmi de calcul și programele prezentate în capitolele precedente s-a considerat următoarele exemple.

1. Variația unor parametri ai mișcării unui fluid în conducte drepte și de secțiune uniformă, determinată de reducerea secțiunii conductei în punctul final al acesteia cu ajutorul unui dispozitiv de reglare.

2. Variația unor parametri ai mișcării unui fluid într-o conductă de secțiune constantă cu acces central și consum la capete, după închiderea sistemului.

3. Variația unor parametri ai mișcării unui fluid într-o conductă convergent-divergentă cu acces central și consum la capete, după închiderea sistemului.

4. Variația unor parametri ai mișcării unui fluid într-o conductă dreaptă și de secțiune uniformă în cazul închiderii totale a acesteia la capete.

5. Variația unor parametri ai mișcării unui gaz într-o conductă de secțiune uniformă în cazul închiderii conductei în punctul inițial.

6. Variația unor parametri ai mișcării unui gaz într-o conductă dreaptă și de secțiune uniformă în cazul închiderii totale a conductei la capătul inițial și al reducerii treptate a secțiunii în punctul final.

Exemplele 1, 2, 3 și 4 se referă la mișcarea nestaționară a fluidelor compresibile în conducte, generată de variația debitului la extremitățile conductei. Fenomenele care apar în aceste probleme sînt descrise de ecuația diferențială a șocului hidraulic [90, 91, 87, 94].

Variația secțiunii la o conductă cu fluid în mișcare atrage după sine apariția unei suprapresiuni sau depresiuni care se propagă, sub formă de undă, cu viteză mare în întreaga conductă, revenind la secțiunea perturbatoare ca undă reflectată, purtătoare de depresiune, respectiv de supra-presiune. Acest fenomen este însoțit de valori mari ale suprapresiunii sau depresiunii, în special în cazul închiderii sau deschiderii bruscă a vanei de la capătul final al conductelor de lungime mare și poate determina ruperea acestora. Datorită faptului că la închiderea sau deschiderea bruscă a vanei ia naștere o undă de șoc, fenomenul a fost numit *șoc hidraulic*. Deplasarea perturbațiilor cu viteză mare permite ca pentru durate mici de timp disiparea de energie să se admită neglijabilă. Mișcarea oscilatorie în conductă [94] este o mișcare oscilatorie amortizată tocmai datorită disipării de energie, astfel că în studiul șocului hidraulic relativ la o durată mai mare este absolut necesar să se țină seama de viscozitatea fluidului.

La o închidere bruscă a vanei, energia cinetică a fluidului urmează să se transforme într-un lucru mecanic de deplasare nulă, dând naștere la o presiune infinită dacă sistemul nu este elastic. Datorită acestui fapt în tratarea problemei șocului hidraulic se va ține seama de compresibilitatea fluidului și de elasticitatea conductei.

Presupunând că închiderea vanei se face în mod continuu, perturbațiile care iau naștere determină ca presi-

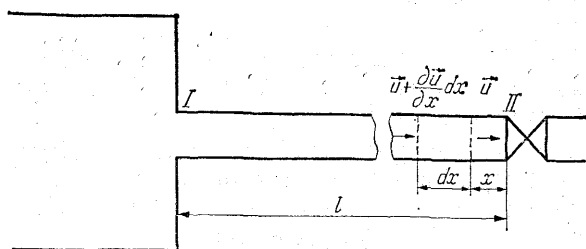


Fig. 7.1.

unea și viteza să fie funcții continue de spațiu și timp. Ecuațiile de continuitate și a energiei, prin soluționare, dau funcțiile $p(x, t)$ și $v(x, t)$.

Se consideră o conductă circulară orizontală racordată la un rezervor în secțiunea *I* și prevăzută cu o vană în secțiunea finală *II*. Ecuația de continuitate se va stabili egalând diferența dintre volumul de fluid care intră printr-o secțiune situată la distanța $x + dx$ de secțiunea *II* și volumul de fluid care iese din secțiunea aleasă la distanța x de vană, în timpul dt , cu suma volumelor rezultate din comprimarea fluidului din deformarea elastică a conductei de lungime dx .

Diferența volumelor de fluid care străbat suprafața de control este dată de relația

$$dv = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \frac{\pi D^2}{4} dt - u \frac{\pi D^2}{4} dt = \frac{\pi D^2}{4} \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx \right] dt. \quad (7.1)$$

Apelînd la formula

$$\beta = - \frac{1}{v} \frac{dv}{dp} \quad (7.2)$$

de definiție a coeficientului de compresibilitate a fluidului și notînd cu dv_1 volumul rezultat din comprimarea fluidului aflat în volumul de control, rezultă

$$|dv_1| = \frac{\pi D^2}{4} \beta dp dx. \quad (7.3)$$

Volumul dat de deformarea elastică a conductei este dat de relația

$$dv_2 = \frac{\pi (D + 2dr)^2}{4} dx - \frac{\pi D^2}{4} dx \approx \pi D dr dx, \quad (7.4)$$

unde dr reprezintă creșterea razei conductei sub acțiunea presiunii.

Din definiția lungimii specifice se poate scrie

$$d\varepsilon = \frac{\pi (D + 2dr) - \pi D}{D} = 2 \frac{dr}{D},$$

de unde rezultă

$$dr = \frac{D}{2} d\varepsilon. \quad (7.5)$$

Din legea lui Hooke $d\varepsilon = d\sigma/E$ și din ecuația lui Laplace referitoare la tensiunile care se dezvoltă într-o placă subțire de grosime δ sub acțiunea presiunii rezultă egalitatea

$$\frac{d\sigma}{D/2} = \frac{dp}{\delta}.$$

În acest caz relația (7.5) devine

$$dr = \frac{D^2}{4} \frac{dp}{E\delta}$$

și

$$dv_2 = \frac{\pi D^2}{4} \frac{D}{E\delta} dx dp. \quad (7.6)$$

Conform principiului conservării materiei se poate scrie relația

$$dv = |dv_1| + |dv_2|,$$

care după înlocuire ia forma

$$\frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx dt = \frac{\pi D^2}{4} \beta dx dp + \frac{\pi D^2}{4} \frac{D}{E\delta} dx dp.$$

După simplificările respective, relația se transcrie astfel :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\beta + \frac{D}{E\delta} \right) \frac{dp}{dt}, \quad (7.7)$$

care este ecuația de continuitate. În diferențiala presiunii

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

termenul $\frac{\partial p}{\partial x} dx$ fiind neglijabil, se poate scrie $\frac{dp}{dt} \approx \frac{\partial p}{\partial t}$.

Dacă se ține seama de această aproximare și de relația

$C = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}$ a vitezei sunetului într-un fluid, atunci ecuația

(7.7) se transcrie sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (7.8)$$

unde c este viteza de propagare a perturbațiilor de presiune, exprimată de relația

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \beta'}} = \frac{1}{\sqrt{\rho \beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{D}{\beta E \delta}}}. \quad (7.9)$$

Dacă în relația (7.9) termenul $\frac{D}{\beta E \delta}$ este neglijabil,

viteza de propagare a perturbațiilor este egală cu viteza sunetului în fluid.

Ecuția energiei pentru mișcarea nestaționară are forma.

$$\frac{\beta}{g} \int \frac{\partial u_m}{\partial t} ds + z + \frac{P}{\gamma} + \frac{\alpha \gamma_m^2}{2g} = c.$$

Dacă $\alpha = 1$ și $\beta = 1$, iar această ecuație se scrie sub forma diferențială, rezultă următoarea ecuație :

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0, \quad (7.10)$$

în care u este viteza medie, iar semnul minus a fost introdus pentru a se putea considera ca pozitiv termenul $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Ecuția (7.10) se reduce la

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (7.11)$$

unde s-a ținut seama că $Z = 0$ și $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2g} \right)$ este neglijabil

în raport cu termenul $\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$. Într-adevăr, știind că viteza

de propagare a perturbațiilor este $c = \frac{dx}{dt}$, rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2g} \right) = \frac{1}{g} u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{g} u \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{u}{c},$$

adică

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2g} \right) : \left(\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{u}{c},$$

Datorită faptului că viteza c este foarte mare în comparație cu viteza fluidului, rezultă că neglijarea termenului energiei cinetice este justificată.

Ecuatiile (7.8) și (7.11) formează un sistem, prin a cărui soluționare se obțin legile de variație ale presiunii și vitezei în funcție de spațiu și timp :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7.12)$$

Sistemul de ecuații (7.12) însoțit de condiții inițiale și la limită poate fi tratat numeric cu ajutorul schemei cu diferențe (3.11) și (3.22), unde este prezentat algoritmul de calcul.

Pentru sistemul (7.12) și condiții inițiale și la limită a fost rulat un program în FORTRAN. Programul a fost rulat pentru un caz concret având ca obiectiv determinarea numerică a funcțiilor $p(x, t)$, $u(x, t)$, precum și determinarea optimă a pasului de discretizare, după criteriul minimizării erorii de la o iterație la alta. Derivând prima ecuație din (7.12) în raport cu timpul și a doua ecuație în raport cu spațiul și admitând că variația masei spe-

cifice este neglijabilă, se elimină funcția $u(x, t)$ și se obține ecuația echivalentă sistemului (7.8) și (7.11):

$$c_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (7.13)$$

Sistemul de ecuații (7.12) scris sub forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.14)$$

se poate transforma prin derivarea primei ecuații în raport cu x și a celei de-a doua ecuații în raport cu t în ecuația echivalentă

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (7.15)$$

identică cu ecuația (7.13), dacă se înlocuiește $p(x, t)$ cu funcția $u(x, t)$.

Exemplul 5 se referă la mișcarea nestaționară a gazelor în conducte drepte și de secțiune uniformă. Pentru exemplul 5 s-a considerat mișcarea adiabatică sau izotermă, corespunzătoare legilor de stare a gazelor perfecte. Ecuațiile mișcării în acest caz sînt constituite din ecuația de continuitate care are forma

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (7.16)$$

și din ecuația energiei exprimate astfel:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7.17)$$

Ținînd seama de faptul că

$$\rho = \rho(p) \quad \text{și} \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho}, \quad (7.18)$$

se poate scrie

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7.19)$$

sau

$$\frac{\partial p}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (7.20)$$

și în acest fel ecuația (7.17) devine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (7.21)$$

Pentru procesul adiabatic relația de stare are forma

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.22)$$

din care prin derivare în raport cu ρ rezultă

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}}. \quad (7.23)$$

Eliminând între relațiile (7.22) și (7.23) presiunea p , se obține expresia

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{c^2 \rho_0}{p_0 \gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (7.24)$$

Din derivarea relației (7.24) în raport cu x și t rezultă

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{2}{c(\gamma-1)} \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (7.25)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{2}{c(\gamma-1)} \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Introducând relațiile (7.25) în ecuațiile (7.16) și (7.21), acestea din urmă devin

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2c}{\gamma-1} \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (7.26)$$

$$c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0.$$

Pentru facilitatea calculului numerice cu ajutorul calculatorului, variabilele dependente și independente din sistemul de ecuații cu derivate parțiale (7.26) se scriu sub formă adimensională astfel :

$$\bar{u} = \frac{u}{u_0}; \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0}; \quad \bar{x} = \frac{x}{l}; \quad \bar{t} = \frac{c_0^2}{u_0 l} t, \quad (7.27)$$

unde u_0 și c_0 sînt valori constante a vitezei gazului, respectiv a sunetului.

În cazul utilizării relațiilor (7.27) sistemul (7.26) devine

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \left(\frac{u_0}{c_0} \right) \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{2}{\gamma - 1} \bar{c} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} &= 0, \\ \bar{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{2}{\gamma - 1} \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{c_0}{u_0} \right)^2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

În exemplul 6 se ține seama de legea de stare a gazelor reale, considerîndu-se procesul izoterm și admițîndu-se termenul $\frac{\lambda u^2 \rho}{2d}$ constant, dat de relația

$$\frac{\lambda u^2 \rho}{2d} = 2a = \frac{\lambda}{3d} (u_1 + u_2), \quad (7.29)$$

unde u_1 și u_2 sînt vitezele la capetele inițial și final ale conductei.

Relația de stare a gazelor reale are forma

$$\frac{p}{\rho} = gZRT, \quad (7.30)$$

unde Z este factorul de abatere de la legea gazelor perfecte R — constanta gazului și T — temperatura absolută.

Ținând seama de aceste considerente și eliminând ρ între ecuațiile (7.16), (7.17) (la care în membrul al doilea se adaugă termenul $\frac{u^2}{2a}$) și (7.29), se obține următoarea ecuație :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{gRTZ} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4a}{gRTZ} \frac{\partial u}{\partial t}; \quad (7.31)$$

din considerentul prezentat anterior se folosesc variabile adimensionale

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l} \quad \text{și} \quad \bar{t} = \frac{\sqrt{gRTZ}}{l} t, \quad (7.32)$$

în care $u_1 = u(-l, 0)$, iar în acest caz ecuația (7.31) devine

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{4al}{\sqrt{gRTZ}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}. \quad (7.33)$$

7.2. Exemplul 1

Conducta analizată este schematizată în fig.7.2. În acest caz presiunea este determinată de ecuația cu derivate

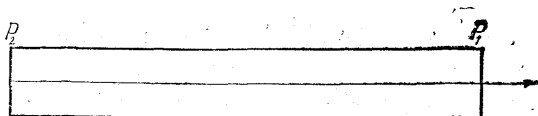


Fig. 7.2.

parțiale (7.13), care scrisă în variabile adimensionale capătă forma

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{t}^2}, \quad (7.34)$$

unde

$$\bar{p} = \frac{p}{p_1}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{c}{l} t, \quad (7.35)$$

p_1 fiind presiunea în secțiunea de intrare a fluidului în conductă. Condițiile inițiale și la limită sînt următoarele :

$$\bar{p}(\bar{x}, 0) = 1, \quad \frac{\bar{p}(\bar{x}, 0)}{\bar{t}} = 0, \quad (7.36)$$

$$\bar{p}(1, \bar{t}) = 1, \quad (7.37)$$

$$\bar{p}(0, \bar{t}) = 4 \cdot 10^{-3} t^{-2} + 1 + 0,1 \sin \pi \bar{t}.$$

Condițiile acestea au la bază existența în momentul inițial a unei mișcări staționare a fluidului considerat ca fluid perfect.

Începînd de la $t = 0$ secțiunea de ieșire a fluidului din conductă este redusă printr-un dispozitiv de reglare în conformitate cu cea de-a doua condiție la limită, în care s-a inclus și termenul de variație a presiunii datorat mișcării nestaționare a fluidului. Conducta s-a considerat de lungime $l = 100$ km, viteza sunetului s-a admis $c = 1200$ m/s, iar fenomenul s-a preconizat să se studieze pe durata $t = 600$ s. În acest mod a rezultat pentru variabilele independente următoarele domenii de variație :

$$0 < \bar{t} < 7,2 \quad \text{și} \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1.$$

În scopul tratării numerice, cu ajutorul calculatorului electronic se discretizează ecuația (7.34), (7.36) și (7.37), care reprezintă modelul matematic al exemplului 1. Pentru simplificarea notațiilor variabilele dependente \bar{p} și independente \bar{x} și \bar{t} se vor utiliza fără bară deasupra, dar se va ține cont la interpretarea rezultatelor de relațiile (7.35).

Pentru discretizare se folosește notația

$$P_{i,j} = P(ih, jk), \quad (7.38)$$

unde h este pasul pe care Ox și k este pasul pe axa Ot . În urma discretizării ecuația (7.34) devine

$$\frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{h^2} = \frac{P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1}}{k^2}, \quad (7.39)$$

Din ecuația (7.39) se explicitază $P_{i,j+1}$:

$$P_{i,j+1} = 2 \left(1 - \frac{k^2}{h^2} \right) P_{i,j} + \frac{k^2}{h^2} (P_{i+1,j} + P_{i-1,j}) - P_{i,j-1}. \quad (7.40)$$

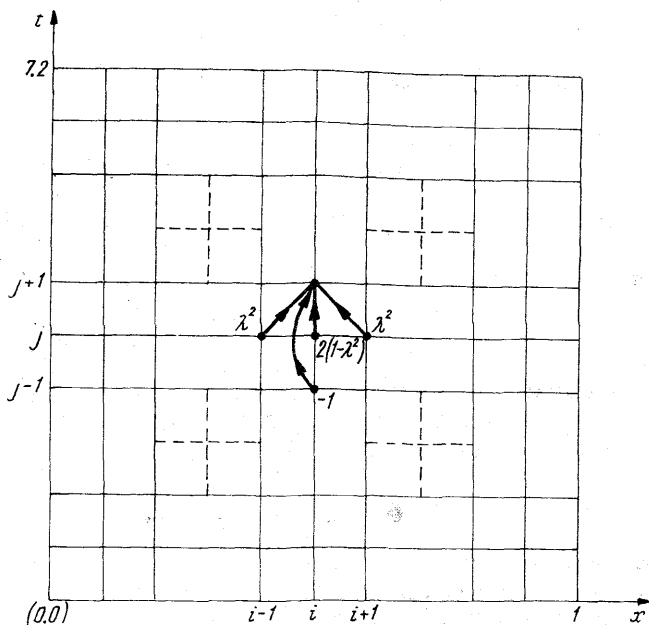


Fig. 7.3.

Dacă se face notația $\lambda = k/h$, ecuația (7.40) devine

$$P_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)P_{i,j} + \lambda^2(P_{i+1,j} + P_{i-1,j}) - P_{i,j-1}, \quad (7.41)$$

unde $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, $n = 1/h$, $m = 7,2/h$.

În acest caz concret rețeaua arată ca în fig. 7.3.

Discretizarea condițiilor la limită duce la

$$\left. \begin{aligned} P_{0,j} &= 4 \cdot 10^{-3} (jk)^2 + 1 + 0,1 \sin \pi jk, \\ p_{n,j} &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

Discretizarea condițiilor inițiale ne dă

$$\left. \begin{aligned} P(i, 0) &= 1, \quad \frac{P_{i,1} - P_{i,0}}{k} = 0 \\ \text{sau} \\ P(i, 0) &= 1, \quad P_{i,1} = P_{i,0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

Ținând cont de criteriile de stabilitate și convergență prezentate în capitolele anterioare, se alege $\lambda = 0,5$, deoarece pentru ca schema cu diferențe să fie stabilă este necesar ca $\lambda < 1$. Pentru $\lambda = 0,5$ se alege $h = 0,1$ și $k = 0,05$; în acest caz

$$n = \frac{1}{h} = \frac{1}{0,1} = 10, \quad \text{deci } i = 1, 2, 3, \dots, 9, 10,$$

$$m = \frac{7,2}{k} = \frac{7,2}{0,05} = 144, \quad \text{deci } j = 1, 2, 3, \dots, 144.$$

Calcululele au fost executate cu un program scris în FORTRAN.

Pentru parametrii h și k ai rețelei date a fost calculată valoarea lui $P(x, t)$ în 1440 de puncte în 180 s. Valoarea presiunii a fost calculată în zece secțiuni echidistante pentru 144 intervale de timp.

Din rezultatele numerice obținute în urma executării programului se observă că presiunea are o variație oscilatorie în fiecare secțiune pentru domeniul de timp considerat.

Diagrama logică de calcul pentru exemplul 1 este dată în fig. 7.4.

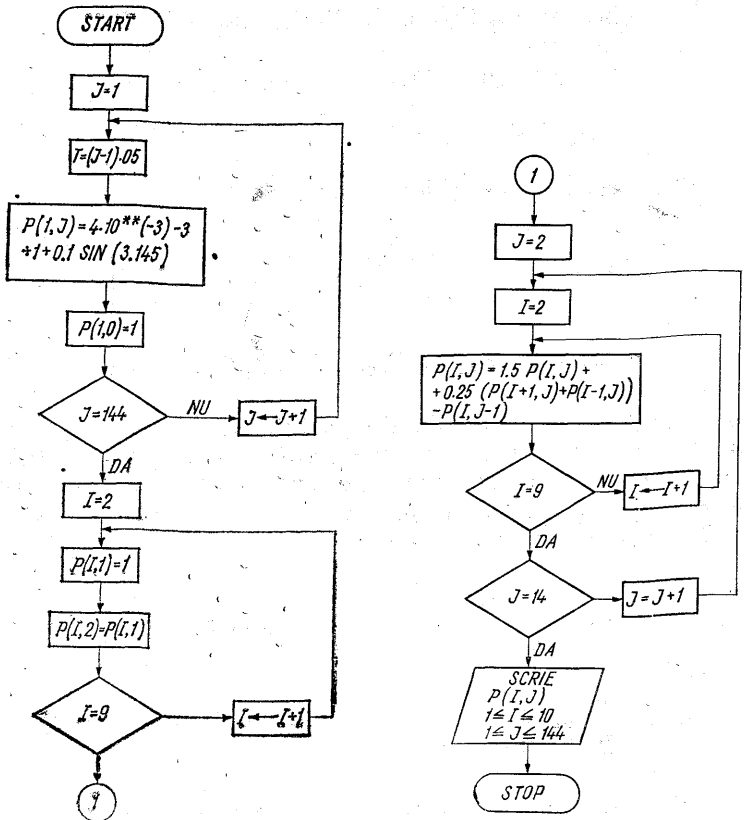


Fig. 7.4.

7.3. Exemplul 2

Conducta considerată este schematizată în fig. 6.5. Inițial mișcarea fluidului în sistem este staționară, iar vitezele determinate de presiunile din secțiunile de ieșire a fluidului din sistem sînt $u_1 = \frac{2}{3} u_0$ în prima jumătate a conductei și $u_2 = \frac{1}{3} u_0$ în a doua jumătate a conductei.

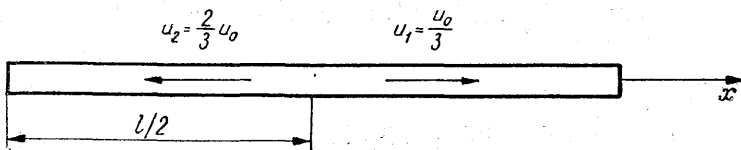


Fig. 7.5.

La $t = 0$ se închid simultan intrarea și ambele ieșiri ale conductei, mișcarea devenind nestaționară.

Ecuția diferențială a vitezei este dată de relația (7.15) care în variabilele adimensionale are forma

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{u}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2}, \quad (7.44)$$

unde $\bar{u} = \frac{u}{u_1}$, iar \bar{x} și \bar{t} sînt definite prin (7.35).

Condițiile inițiale și la limită ale problemei se prezintă în acest caz astfel :

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } 1 < \bar{x} < \frac{1}{2} \\ 0,5 & \text{pentru } \frac{1}{2} < \bar{x} < 1 \end{cases} \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial \bar{u}(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{t}} = 0$$

$$\bar{u}(0, \bar{t}) = 0, \quad \bar{u}(1, \bar{t}) = 0. \quad (7.46)$$

Pentru constantele sistemului s-au considerat valorile $l = 100$ km, $c = 1\,200$ m/s și a rezultat timpul adimensional maxim $\bar{t} = 7,2$ corespunzător unei durate de cercetare $t = 600$ s.

Algoritmul de calcul al exemplului 2. Se discretizează ecuația (7.44) și pentru simplificarea scrierii se consideră variabilele u , x și t fără bară, obținîndu-se expresia

$$\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2}, \quad (7.47)$$

de unde rezultă

$$U_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)U_{i,j} + \lambda^2(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - U_{i,j-1}, \quad (7.48)$$

unde $\lambda^2 = \frac{k^2}{h^2}$, iar k este pasul pe axa Ot și h este pasul

pe axa Ox ; $i = 1, 2, \dots, 21$, $j = 1, 2, \dots, 350$. În urma discretizării condițiilor inițiale și la limită se obține

$$\left. \begin{aligned} U(i, 0) &= 1, & \text{pentru } i &= 2, 3, \dots, 11 \\ U(i, 0) &= 0,5, & \text{pentru } i &= 12, \dots, 20 \\ \frac{U_{i,1} - U_{i,0}}{k} &= 0 \text{ rezultă } U_{i,1} = U_{i,0}, & i &= 2, \dots, 20 \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

$$\left. \begin{aligned} U(0, j) &= 0, \\ U(1, j) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad j = 1, \dots, 350 \quad (7.50)$$

Pentru exemplul 2 s-a ales $h = 0,05$ și $k = 0,02$, de unde rezultă $\lambda = \frac{k}{h} = 0,4$.

Acest algoritm de calcul a fost codificat în limbajul FORTRAN, iar în urma rulării acestui program a fost obținută valoarea numerică a vitezei în 21 de secțiuni ale conductei, pentru 350 de intervale de timp, rezultând pentru $u(x, t)$ o matrice de dimensiune 350×21 . Aceste valori au fost obținute într-un timp de calcul de 4 min 29 s.

Diagrama logică de calcul pentru programul 2 este dată în fig. 7.6.

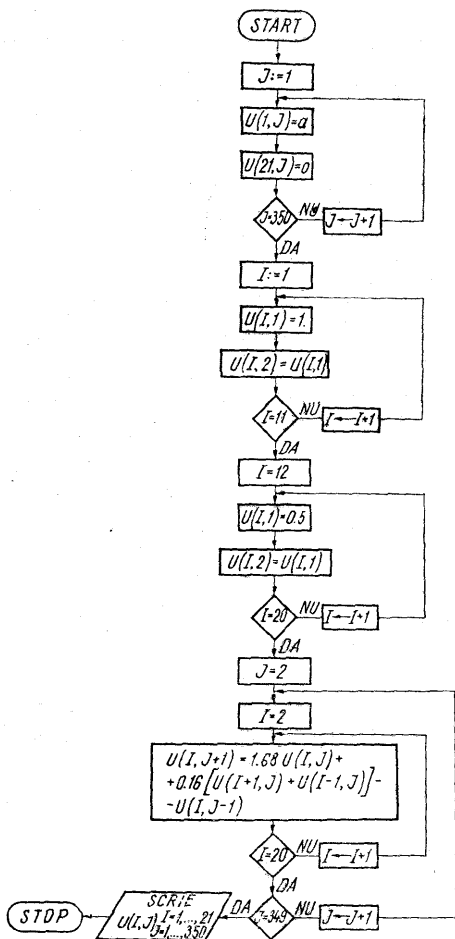


Fig. 7.6.

7.4. Exemplul 3

Sistemul de conducte este schematizat în fig. 7.7. Porțiunile convergentă și divergentă ale conductei sînt identice, iar raportul diametrelor maxim și minim este $\frac{d_2}{d_1} = 2$.

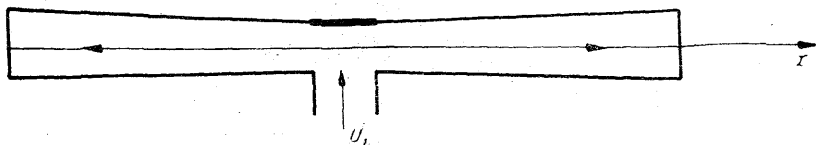


Fig. 7.7.

Presiunile la ambele ieșiri din sistem sînt identice. Acest exemplu este similar exemplului 2 cu deosebirea că

$$\bar{u} = \frac{4u}{u_1}, \quad (7.51)$$

unde u_1 este viteza în conducte de intrare, al cărui diametru este d_1 .

Condițiile inițiale și la limită au forma :

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, 0) &= \begin{cases} 3\bar{x} + 0,5 & \text{pentru } 0 \leq \bar{x} \leq 0,5 \\ -3\bar{x} + 3,5 & \text{pentru } 0,5 \leq \bar{x} \leq 1 \end{cases} \\ \frac{\partial \bar{u}(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{t}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.52)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(0, \bar{t}) &= 0,5 \\ \bar{u}(1, \bar{t}) &= 0,5 \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

Algoritmul de calcul este analog cu cel de la problema 2, dar pentru această problemă s-a luat $\lambda = 0,2$ pentru $h = 0,05$ și $k = 0,01$. Valorile vitezei $U_{i,j}$ în punctele rețelei au fost determinate cu ajutorul relației (7.48).

Condițiile inițiale și la limită în urma discretizării arată astfel :

$$U(i, 0) = \left\{ \begin{array}{l} 0,15(I-1)h + 0,5 \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, 12 \\ -0,15(21-I)h + 3,5 \text{ pentru } j = 12, \dots, 20 \end{array} \right\}$$

$$\frac{U_{i,1} - U_{i,0}}{k} \text{ sau } U_{i,1} = U_{i,0} \quad \text{pentru } i = 2, \dots, 20 \quad \left. \vphantom{\frac{U_{i,1} - U_{i,0}}{k}} \right\} \quad (7.54)$$

și

$$\left. \begin{array}{l} U(0, j) = 0,5, \\ U(1, j) = 0,5, \end{array} \right\} \quad j = 1, \dots, 350 \quad (7.55)$$

Diagrama logică de calcul a programului 3 este dată în fig. 7.8.

7.5. Exemplul 4

Dacă în conductă are loc mișcarea staționară a unui fluid, la închiderea simultană a intrării și ieșirii conductei, în conductă apar oscilații atât relative la presiune cât și la viteze. În cadrul acestei probleme se stabilește legea de variație a vitezei după închiderea conductei la capete.

Viteza este soluția ecuației (7.15) care satisface următoarele condiții inițiale și la limite :

$$u(\bar{x}, 0) = 1, \quad \frac{\partial \bar{u}(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{t}} = 0, \quad (7.56)$$

$$u(1, \bar{t}) = 0, \quad u(0, \bar{t}) = 0, \quad (7.57)$$

în care variabilele adimensionale \bar{x} și \bar{t} sînt definite de relațiile (7.35), iar $\bar{u} = \frac{u}{u_0}$, unde u_0 este valoarea vitezei

în mișcarea staționară.

Timpul adimensional \bar{t} este definit pe intervalul $[0; 7,2]$ corespunzător duratei $t = 600$ s, lungimea conductei $l = 100$ km, iar viteza sunetului $c = 1200$ m/s.

Algoritm de calcul. S-a considerat o rețea de parametrii $j = 1, 2, \dots, n$ și $i = 1, 2, \dots, n$ pe axa Ot , res-

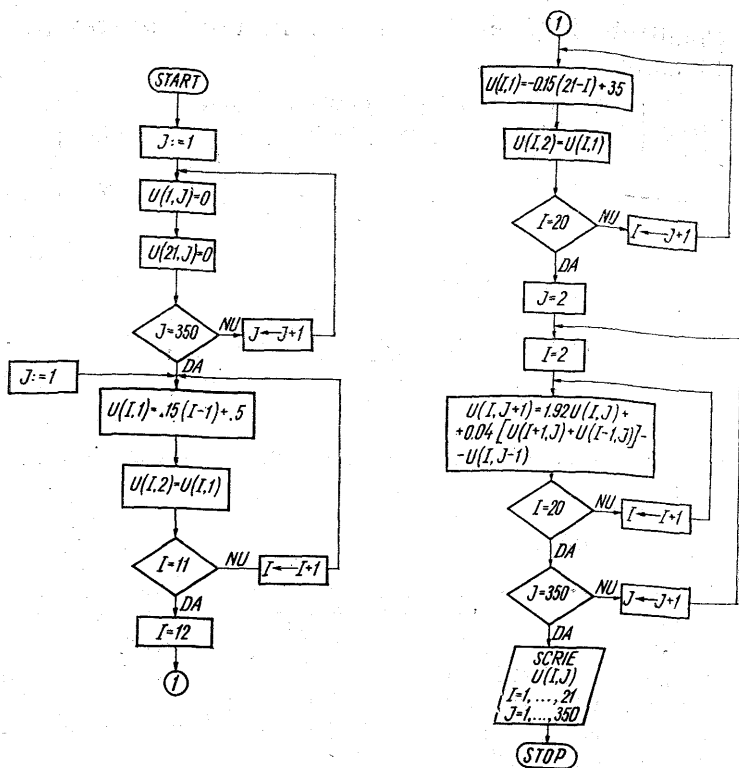


Fig. 7.8.

pectiv Ox . Ecuația diferențială (7.15) după discretizare conduce la următoarea expresie :

$$U_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)U_{i,j} + \lambda^2(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - U_{i,j-1}, \quad (7.58)$$

$$m = \frac{7,2}{k} = \frac{7,2}{0,05} = 144;$$

$$n = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ și } \lambda = 0,5.$$

Relația (7.58) se va aplica în toate nodurile rețelei pentru $j = 3, \dots, 144$ și $i = 2, \dots, 9$.

Determinându-se $U_{i,j}$ pentru $j = 3, \dots, 144$ și $i = 2, \dots, 9$, condițiile inițiale și la limită după discretizare servesc la determinarea lui $U_{i,j}$ pe conturul rețelei. Într-un timp de 2 min 2 s.

După discretizarea condițiilor inițiale și la limite rezultă

$$\left. \begin{aligned} U(i, 0) &= 1 && \text{pentru } i=2, \dots, 9 \\ \frac{U_{i,1} - U_{i,0}}{k} &= 0 \text{ sau } U_{i,1} = U_{i,0} && \text{pentru } i=2, \dots, 9 \end{aligned} \right\} (7.59).$$

$$\left. \begin{aligned} U(10, j) &= 0 \\ U(1, j) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \\ & \text{pentru } j=1, \dots, 144 \end{aligned} (7.60)$$

Acest algoritm a fost codificat în limbaj FORTRAN, obținându-se un program care a fost rulat pe calculator, determinându-se U_{ij} în 10×144 noduri ale rețelei într-un timp de 2 min 2 s.

Diagrama logică a programului 4 este dată în fig. 7.9

7.6. Exemplul 5

Într-o conductă dreaptă și de secțiune uniformă are loc mișcarea staționară a unui gaz. Din punct de vedere practic este important de stabilit variația debitului de gaz și a presiunii în cazul închiderii alimentării conductei.

Stabilirea legii de variație a vitezei în cazul acestei mișcări staționare este în măsură să furnizeze legea de variație a debitului și presiunii. Admițând procesul adiabatic (sau izoterm dacă $\gamma = 1$), vitezele gazului și sunețului în gaze sînt soluțiile sistemului (7.28), care satisfac următoarele condiții inițiale și la limită :

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(0, 0) &= 0, \quad \bar{u}(0, \bar{t}) = 0, \\ \bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) &= \frac{13,2}{(1 - 0,5389\bar{x})^{\frac{1}{\gamma+1}} 10,758 \cdot 981 \cdot 0,1256} \\ \bar{c}^2(\bar{x}, 0) &= \frac{\gamma p_1}{\rho c_0^1} (1 - 0,5384\bar{x})^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}, \text{ pentru } \bar{x} \geq 0 \end{aligned} \right\} (7.61)$$

în care variabilele u, c, x, t sînt definite prin relațiile (7.27). Ultimele două condiții (7.61) au la bază legea de

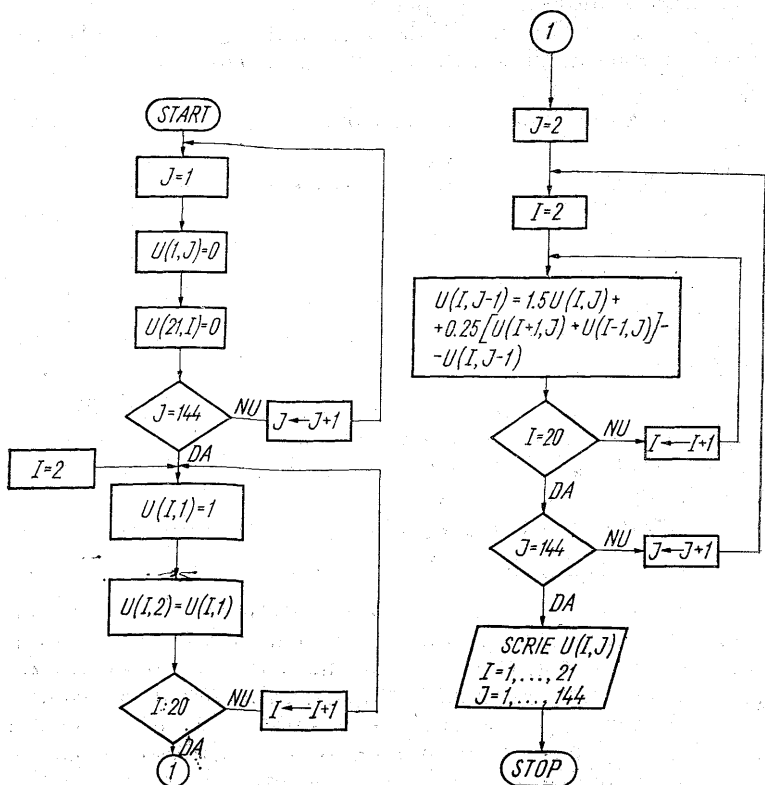


Fig. 7.9.

variație a presiunii în mișcarea unui gaz într-o conductă de lungime mare, exprimată sub forma

$$\frac{\gamma g^2 \Omega \rho_1 p_1}{(\gamma + 1) G^2} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] = \frac{\gamma \lambda l}{2d} \bar{a}, \quad (7.62)$$

unde $\Omega = \frac{\pi d^2}{4}$; G este debitul de gaz în mișcarea staționară, l lungimea conductei, $\lambda = \frac{0,009407}{d}$, cu d

în metri, $\gamma = 1,4$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (indicele 1 se referă la mărimile masa specifică și presiunea p în secțiunea inițială a conductei, corespunzătoare mișcării staționare).

Pentru $\bar{x} = 1$ și $p = p_2$ relația (7.62) devine

$$\frac{\gamma g^2 \Omega \rho_1 p_1}{(\gamma + 1) G^2} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] = \frac{\lambda \gamma l}{2d}, \quad (7.63)$$

din care rezultă valorile debitului pentru mărimile presiunii la capetele conductei cunoscute. Viteza u în mișcarea staționară are, conform ecuației de continuitate, forma

$$\bar{u} = \frac{G}{\rho g u_0 \Omega}, \quad (7.64)$$

în care G este dat de relația (7.63), iar u_0 este o viteză constantă. Folosind relația (7.63), ecuația (7.61) a distribuției de presiune capătă forma

$$\left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} = 1 - \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] \bar{x}. \quad (7.65)$$

Relația (7.23) se poate scrie

$$c^2 = \frac{p_1 \gamma}{\rho_1} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}}, \quad (7.66)$$

iar după adimensionarea lui c și substituirea lui $\frac{p}{p_1}$ dat de relația (7.65) expresia devine

$$\bar{c}^2 = \frac{p_1 \gamma}{\rho_1 c_0^2} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] \bar{x} \right\}^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}. \quad (7.67)$$

Pentru următoarele valori $p_1 = 510^2 \text{ N/m}^2$, $p_2 = 310^5 \text{ N/m}^2$, $t = 100 \text{ s}$; $l = 10^5 \text{ m}$, $d = 0,4 \text{ m}$, rezultă $\rho_1 = 1,097 \text{ N s}^2/\text{m}^2$; $\Omega = 0,156 \text{ m}^2$, $\lambda = 0,013$ și $G = 13,21 \text{ N/s}$. S-a efectuat calculul lui G cu ajutorul relației (7.62), luându-se $u_0 = 100 \text{ m/s}$ și $c_0 = 300 \text{ m/s}$. Din relația (7.64), înlocuindu-se mărimile cunoscute,

rezultă penultima relație (7.61), iar din relația (7.67) se obține ultima relație (7.61).

Algoritmul de calcul. Această problemă a fost tratată numeric cu ajutorul metodei caracteristicilor, a cărei prezentare matematică face obiectul capitolului 4. Procesul prezentat în problema 5 este descris de sistemul de ecuații cu derivate parțiale (7.28) cu condițiile inițiale și la limită (7.61). Pentru simplificarea scrierii se vor utiliza variabilele dependente și independente fără bară, dar se va ține cont la interpretarea rezultatelor că sînt adimensionale.

Folosind valorile date pentru c_0 , u_0 și γ , sistemul (7.28) devine

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{9} uu_x + u_t + 5 cc_x &= 0 \\ cu_x + 5 uc_x + 45 c_t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.68)$$

Pentru acest caz concret ecuațiile direcțiilor caracteristice se calculează cu ajutorul relației (4.84), obținîndu-se două soluții reale și distincte ζ_+ și ζ_- , care au următoarea formă:

$$\frac{dt}{dx} = \zeta_+ = \frac{9}{u + 3c}, \quad \frac{dt}{dx} = \zeta_- = \frac{9}{u - 3c}. \quad (7.69)$$

În cazul sistemului (7.68) formulele (4.56) devin

$$F = -c, \quad G = 5u, \quad k = 0, \quad H = 0, \quad (7.70)$$

iar ecuațiile (4.58) și (4.60) iau forma

$$\begin{aligned} -cdu + \left[\left(\frac{u^2}{9} - c^2 \right) \zeta_+ - 5u \right] dc &= 0, \\ -cdu + \left[\left(\frac{u^2}{9} - c^2 \right) \zeta_- - 5u \right] dc &= 0. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Deci sînt patru ecuații caracteristice de-a lungul curbelor C_+ și C_- :

$$\left. \begin{aligned} dt - \zeta_+ dx &= 0 \\ -cdu + \left[\left(\frac{u^2}{9} - c^2 \right) \zeta_+ - 5u \right] dc &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{de-a lungul} \\ \text{lui } C_+, \end{array} \quad (7.72)$$

$$\begin{aligned}
 dt - \zeta_- dx = 0 \\
 -c du + \left[\left(\frac{u^2}{9} - c^2 \right) \zeta_+ - 5u \right] dc = 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} dt - \zeta_- dx = 0 \\ -c du + \left[\left(\frac{u^2}{9} - c^2 \right) \zeta_+ - 5u \right] dc = 0 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{de-a lungul} \\ \text{lui } C_- \end{array}$$

(7.73)

Dacă se consideră un punct P determinat de intersecția caracteristicilor C_+ care trece prin A și C_- care trece prin B (fig. 7.10), atunci se poate determina soluția în punctul

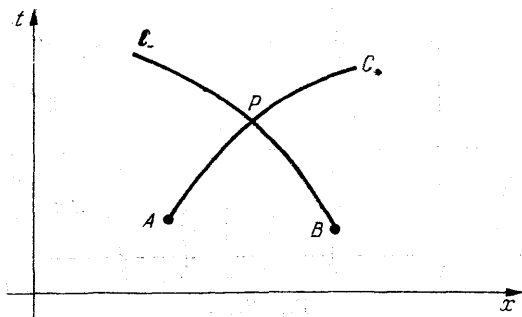


Fig. 7.10.

$P(x_p, t_p, U_p, C_p)$, cunoscînd soluțiile în punctele $A(x_A, t_A, U_A, C_A)$ și $B(x_B, t_B, U_B, C_B)$. Determinarea soluției în punctul P se poate găsi dacă se aplică aproximația cu diferențe finite de ordinul întâi ecuațiilor (7.72) și (7.73) rezultînd :

$$t_p - t_A (\zeta_+)_A (x_p - x_A) = 0,$$

$$-C_A(U_p - U_A) + \left[\left(\frac{u^2}{9} - c^2 \right) \zeta_A - 5u \right]_A (C_p - C_A) = 0,$$

(7.74)

$$t_p - t_B - (\zeta_-)_B (x_p - x_B) = 0,$$

$$-C_B(U_p - U_B) - \left[\left(\frac{u^2}{9} - c^2 \right) \zeta_- - 5u \right]_B (C_p - C_B) = 0.$$

Din prima și a treia ecuație se pot determina t_p și x_p , iar din a doua și a patra se poate determina U_p și C_p .

Indicele de jos reprezintă evaluarea expresiei în punctul respectiv. Pentru rezolvarea problemei 6 se consideră rețeaua din fig. 7.11. În cadrul algoritmului de calcul apar două situații: cînd P este interior rețelei și cînd P este

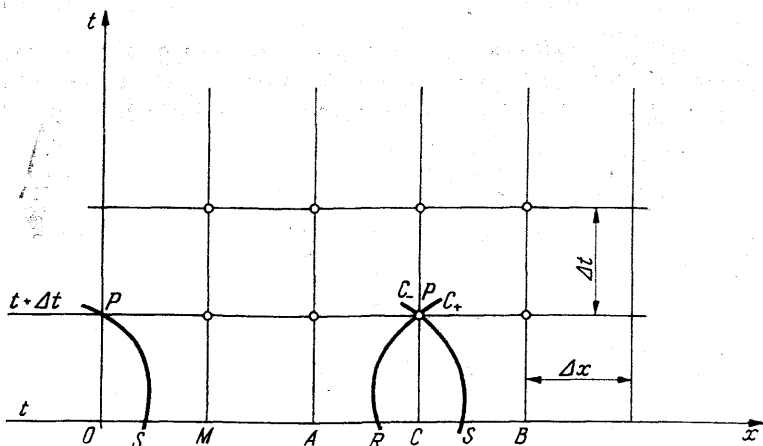


Fig. 7.11.

pe frontiera Ot . Pentru determinarea lui P interior rețelei se procedează în felul următor. Se duc cele două caracteristici C_+ și C_- prin nodul rețelei P care intersectează frontiera Ox (cunoscută) în punctele R și S . Cele două puncte R și S , care nu sînt noduri ale rețelei, se determină cu ajutorul următoarelor ecuații:

$$x_R = x_P - (\zeta_+)^{-1} \bar{c} \Delta t, \quad x_S = x_P - (\zeta_-)^{-1} \bar{c} \Delta t. \quad (7.75)$$

Utilizînd formulele pentru interpolarea liniară, se pot determina valorile U_R , U_S , C_R , C_S cu ajutorul următoarelor relații:

$$\begin{aligned} U_R &= U_C [1 - (\zeta_+)^{-1} \theta] + U_A \theta (\zeta_+)^{-1}, \\ C_R &= C_C [1 - (\zeta_+)^{-1} \theta] + C_A \theta (\zeta_+)^{-1}, \\ U_S &= U_B [1 - (\zeta_-)^{-1} \theta] + U_C \theta (\zeta_-)^{-1}, \\ C_S &= C_C [1 - (\zeta_-)^{-1} \theta] + C_B \theta (\zeta_-)^{-1}, \end{aligned} \quad (7.76)$$

unde $\theta = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Aceste relații au fost scrise considerîndu-se că intervalul Δt este suficient de mic, astfel încît porțiunea caracteristicii între P și R și între P și S să fie segmente de dreaptă cu panta în P egală cu $(\zeta_+)_C$ și $(\zeta_-)_C$ respectiv. Coordonatele x și t ale punctului P sînt cunoscute (deoarece este un punct al rețelei); urmează a se determina valorile U_P și C_P care se pot obține din ecuațiile a doua și a patra date în (7.73), care după înlocuirea lui ζ_+ și ζ_- cu expresiile date în (7.69) devin

$$\begin{aligned} -C_C(U_P - U_R) - (3c + 4u)_C(C_P - C_R) &= 0, \\ -C_C(U_P - U_S) + (3c - 4u)_C(C_P - C_S) &= 0. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Din aceste relații rezultă valorile U_P și C_P sub forma

$$\begin{aligned} U_P &= \\ &= \frac{C_C U_R (3c - 4u)_C + C_C U_S (3c + 4u)_C + (9c^2 - 16u^2)_C (C_R - C_S)}{6C_C^2}, \end{aligned} \quad (7.78)$$

$$C_P = \frac{C_C (U_R - U_S) + (3c + 4u)_C + C_S (3c - 4u)_C}{6C_C}.$$

Dacă punctul P aparține frontierei Ot , determinarea lui se face în felul următor: se duce caracteristica C_- care trece prin P și intersectează axa Ox în S , considerînd porțiunea de caracteristică PS ca un segment de dreaptă. Se poate determina x_S , U_S , C_S cu ajutorul formulelor (4.93) - (4.95), care în cazul de față devin

$$\begin{aligned} x_S &= x_P - (\zeta_-)_N^{-1} \Delta t, \\ U_S &= U_N + \frac{U_M - U_N}{\Delta x} (x_S - x_N), \\ C_S &= C_N + \frac{C_M - C_N}{\Delta x} (x_S - x_N) \end{aligned} \quad (7.79)$$

Punctul P situat pe frontiera Ot are coordonatele t_P și x_P , cunoscute datorită parametrilor rețelei și $U(0, t) = 0$. Valoarea lui C_P se calculează din formula (4.96), care în cazul de față devine

$$-C_N(U_P - U_S) + (3c - 4u)_N(C_P - C_S) = 0, \quad (7.80)$$

de unde rezultă

$$C_P = \frac{C_S(3c - 4u)_N - C_N U_S}{(3c - 4u)_N}. \quad (7.81)$$

Cu ajutorul relațiilor (7.74), (7.75), (7.77) se pot determina soluțiile în toate punctele P interioare rețelei de la nivelul $t + \Delta t$, utilizându-se valorile din nodurile rețelei ce aparțin frontierei Ox , iar cu ajutorul relațiilor (7.78) și (7.81) se poate determina soluția în P ce aparține frontierei Ot , la nivelul $t + \Delta t$. În urma acestui proces de calcul s-au obținut valorile pentru U și C în toate nodurile rețelei la nivelul $t + \Delta t$. Pentru a trece la nivelul $t + 2\Delta t$ se aplică aceleași relații ca și pentru nivelul $t + \Delta t$, care în acest caz are rolul pe care l-a avut frontiera Ox dată prin condițiile problemei.

După determinarea procesului de calcul se obțin valorile numerice pentru funcțiile $U(x, t)$ și $C(x, t)$ în nodurile unei rețele de formă triunghiulară, date în fig. 7.10. Dispunând de valorile numerice pentru U și C în nodurile rețelei, se poate determina ρ din relația (7.22), $C^2 = k\rho^{\gamma-1}$, unde

$$k = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \cdot \gamma; \quad \rho_0 = 0,0731; \quad p_0 = 1,033 \cdot 10^4; \quad \gamma = 1,4;$$

$$\rho = \left(\frac{c^2}{k} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (7.82)$$

Cunoscând pe ρ , se poate determina presiunea și debitul cu ajutorul relațiilor

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \cdot \rho^\gamma, \quad G = \frac{\pi d^2}{4} U \rho g. \quad (7.83)$$

Acest algoritm de calcul a fost codificat în limbaj FORTRAN, obținându-se un program, a cărui diagramă logică este dată în fig. 4.16.

7.7. Exemplul 6

În acest exemplu viteza este soluția ecuației (7.33) care satisface următoarele condiții inițiale și la limită :

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, 0) &= \\ &= \frac{1}{a_1} \sqrt{\frac{10^4 \cdot 0,4 (40^2 - 5^2)}{0,544 \cdot 0,123 \cdot 1,3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5} [5^2 - (40^2 - 5^2)\bar{x}]^{-1/2}} \\ \frac{\partial \bar{u}(\bar{x}, 0)}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (7.84)$$

$$\bar{u}(0, \bar{t}) = 0, \quad \bar{u}(-1, t) = e^{-\bar{t}}, \quad (7.85)$$

în care variabilele \bar{u} , \bar{x} și \bar{t} sînt date de relațiile (7.32). Pentru următoarele valori :

$d = 0,4$ m; $p_1 = 4 \cdot 10^2$ N/m², $p_2 = 5 \cdot 10^4$ N/m²,
 $l = 10^5$ m; $g = 9,81$ m/s²; $R = 52,95$; $T = 300^\circ$ K,
 $Z = 0,92$, rezultă $\lambda = 0,013$, $U_2 = 6,667$, $U_1 = 53\,336$,
 $4a = 1,30006$. Durata pentru care se analizează mișcarea este $t = 86\,400$ s. Pentru simplificarea notațiilor, variabilele u , x și t se scriu fără bară.

Algoritmul de calcul. După introducerea constantelor date, ecuația (7.33) devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 343,18 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (7.86)$$

iar condițiile inițiale și la limită devin

$$u(x, 0) = \frac{0,81}{\sqrt{1 - 63x}}, \quad u_t(x, 0) = 0; \quad (7.87)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(-1, t) = e^{-t}. \quad (7.88)$$

Dacă se utilizează relațiile (7.32) pentru adimensionare, rezultă pentru x și t următorul domeniu :

$$-1 \leq x \leq 0 \quad \text{și} \quad 0 < t < 294.$$

Modelul matematic al exemplului 6 este asemănător cu modelul matematic prezentat prin relațiile (5.2)—(5.6). Algoritmul de calcul este dat prin relațiile (5.24)—(5.28). În cap. 5 se prezintă diagrama logică de calcul și descrierea ei, precum și descrierea programului care este același cu programul utilizat la exemplul 6. În construcția programului de calcul s-a avut în vedere ca partea dreaptă a ecuației cu derivate parțiale (7.86) să poată conține o expresie în x , t , u_x și u_t , dar sub formă liniară.

B I B L I O G R A F I E

1. Francis, B. H. *Finite-difference equations and simulation*. New York, Prentice Hall, 1968.
2. Klahr, N. C. *A Monte Carlo method for the solution of elliptic partial differential equation*. Mathematical Methods for Digital Computers. New York, Wiley, 1960.
3. Edwards, K. H. și Khanna, R. R. *Feasibility study of Monte Carlo modelling techniques for distributed parameter systems*. În: Proc. IEE, vol. 117, nr. 12, dec., 1970.
4. Curtiss, J. H. *Sampling methods applied to differential and equations*. În: Proc. Seminar on scientific computation IBM Corporation, New-York, 1949.
5. Florence, J. O. *Matrix inversion by Monte Carlo methods Mathematical methods for Digital computers*. New York, Wiley, 1960.
6. Sobol, I. M. *Metod Monte-Karlo*, Moscova, Nauka, 1968.
7. Hammersley, J. M., Handscomb, D. C. *Monte Carlo methods*. London, Methuen et Co. Ltd., 1964.
8. Forsythe, F. G. și Wasow, W. R. *Finite difference Methods for Partial Differential equations*. New York, Wiley, 1960.
9. Richtmeyer, R. D. și Morton, K. W. *Difference Methods for Initial value Problems*. New York, Wiley, 1966.
10. Mitchell, A. R. *Computational Methods in Partial Differential Equations*. New York, Wiley, 1971.
11. Richard, S. V. *Matrix Iterative Analysis*. Eglewood Cliffs, N. I., Prentice Hall, 1962.
12. Ames, W. F., *Numerical methods for partial differential equations*. New York, Academic-Press, 1969.
13. Douglas, J. *On the relation between stability and convergence in the numerical solution of linear parabolic and hyperbolic differential equations*. În: J. SIAM, vol. 3, 1956.
14. Strang, G. *Accurate partial difference methods*. În: Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 12, 1963.
15. Gourlay, A. R. și Morris, J. L. *A multistep formulation of the optimized Lax Wendroff method for non linear hyperbolic systems in two space variables*. În: Maths. of Comp., vol. 22, 1968.
16. Lax, D. P. *Differential equations difference equation and matrix theory*. În: Comm. Pure. Appl. Math. vol. 11, 1958.
17. Weinberger, H. G. *A first course of partial differential equations with complex variables and transform methods*. New York, Academic Press, 1965.
18. Jeffrey, A. și Tniuti, T. *Nonlinear Wave Propagation with Application to Physics and Magnetohydrodynamics*. New York, Academic Press, 1964.

19. Ames, W. F. *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*. New York, Academic Press, 1965.
20. Dale, V von Rosenberg. *Methods for the numerical solution of partial differential equation*. New-York, American Elsevier Publishing Company, 1969.
21. Herbert, B. K. *The numerical solution of parabolic partial differential equations*. Mathematical methods for digital computers, New York, Wiley, 1960.
22. Bruce, A. *Numerical algorithms origins and applications*. Mass, Addison Wesley, 1970.
23. Isaacson, E. și Keller, B. H. *Analysis of numerical methods*. Courant Institute of Mathematical Department Science New-York University, New York, Wiley, 1966.
24. Strang, G. Fix G. *An analysis of the finit element methods*, New York, Prentice-Hall, 1973.
25. Murray, W. *Numerical methods for unconstrained optimization*. New York, Academic Press, 1972.
26. Lister, M. *The numerical solution of hyperbolic partial differential equations by the method of characteristics*. Mathematical methods for digital computers. New York, Wiley, 1960.
27. Dyöisen, I. *Consistency conditions for difference schemes with singular coefficients*. În: Mathematical of computation 22, nr. 102, aprilie, 1968.
28. Smith, D. G. *Numerical solution of partial differential equation*. London, Oxford University Press, 1969.
29. Roberts, L. *On the numerical solution of the equation for spherical waves of finite amplitude*. În: Math. and Phys. vol. 36, nr. 4, ian., 1968.
30. Fox, L. *Numerical solution of two point boundary values problem in ordinary differential equations*. London, Oxford University Press, 1962.
31. Bernstein, D. L. *Existente Theoreme in partial differential equations*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1960.
32. Garabedian, P. R. *Partial Differential Equations*. New York, Wiley, 1964.
33. Legras, J. *Méthodes et techniques de l'analyse numérique*. Paris, Dunod, 1971.
34. Shan, S. K. *Computer application of numerical methods*. Menlo Park, Addison-Wesley, 1972.
35. Morton, K. W. *The design of difference schemes for studying physical instabilities*. New York, Wiley, 1974.
36. Lax, D. P. și Wendroff, B. *Difference schemes for hiperbolic equations with high order of accuracy*. În: Comm. ou Pure and Appl. math. vol. 17, 1964.
37. Hartree, R. D. *Some practical methods of using caracteristife in the calculation of non-steady compressible flows*. California, Las Almos Repart, 1962.
38. Courant, R. și Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 2, New York, Wiley, 1962.
39. Fox, P. și Ralston, A. *On the numerical solution of the equations for spherical waves of finite amplitude*. În: J. Math and Phys. vol. 14, nr. 4, Ian. 1968.

40. Courant, R. și Friedrichs, K. O. *Supersonic flow on shock waves*. New York, Wiley, 1948.
41. Chorin, A. J. *On the convergente of discrete approximations to the Navier-Stoker equations*. A.E.C. Courant Institute of Mathematical Science. New York University, 1968.
41. Rice, J. R. *Approximation des fonctions. Théorie linéarie*. Paris, Dunod, 1969.
43. Courant, R. și Isaacson, E. *On the solution of nonlinear hiperbolic differential equations*. În: Comm. Pure. Appl. mat. 5, 1962.
44. Rabinowitz, P. H. *Periodic solutions of a non-linear non-dissipative wave equation*. New York University, Courant Inst. Math., 1965.
45. Greinspan, D. *Introductory numerical analysis of elliptic boundary value problems*. New York, Wiley, 1965.
46. Weinberger, H. F. *Error bound in finite - difference approximations to solutions of symmetric hyperbolic systems*. În: SIAM J. Appl. Math. nr. 7, 1959.
47. Bellman, R. *Introduction to matrix analysis*. New York, Mc Grow-Hill Book Co, Inc., 1960.
48. Vincenti, W. G. *Introduction to physical gas dynamics*. New York, Wiley, 1967.
49. Cheney, W. E. *Introduction to approximation theory*. New York, Mc Grow-Hill, 1966.
50. Kane, S. Yee *Explicit solutions for the initial boundary value problem of a system of lossless transmission lines*. În: SIAM, J. Appl. Math. vol. 24, nr. 1, ian., 1973.
51. Cannon, J. R. *On the observability and stability of the temperature distribution in a composite heat conductor*. În: SIAM, J. Appl. Math. vol. 24 nr. 4, iunie, 1973.
52. Beckett, R., Hurt, T. *Numerical calculations and Algorithms*. New York, Mc Grow-Hill, 1966.
53. Dodescu, Gh., Racoveanu, N. *Metode de calcul numeric*. București, A.S.E., 1970.
54. Ortega, J. M. *Numerical Analysis*. New York, Academic Press, 1973.
55. Colatz, N. *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen* Berlin, Springer Verlag, 1951.
56. Takao T., Kozo I., Takeski K. *Monte Carlo Path integral Calculations for Two-Point Boundary-Value Problems*. În: Numerische Mathematik, 10, 1967.
57. Krasnov, M. L. și Macarenko, J. G. *Operaționnæ iscisenie. Ustoicivosti doijenita*. Moscova, Nauka, 1964.
58. Buchanan, M. *A necessary and sufficient condition for stability of difference schemes for initial value problems*. În: SIAM J. vol. 4, 1972.
59. Dommel, H. W. *A method for solving transient phenomena in multiphase systems*. În: Rep. Power System Consulation Conference Stockholm, Sweden, iunie, 1966.

60. Cannon, J. R. *Determination of certain parametres in heat conduction problems*. În: J. Math. Anal. Appl. 8, 1964.
61. Klaasen, A. G. *Local uniqueness and existence of solution of a three-point boundary value problem*. În: SIAM J. Appl. Math., vol. 24, nr. 4, iunie, 1973.
62. Sokolov, G. T. *Periodic solutions of discretization*. Ucionie zapiski, seria Mat. 1, 1965.
63. Lax, P. D. *Weak solutions of nonlinear parabolic equations and their numerical computation*. În: Comm. Pure. Appl. Math. vol. 7, 1964.
64. O'Brein, G. G., Hyman, A. M. *A study of the numerical solution of partial differential equations*. În: J. Math. Physics, vol. 29, 1951.
65. William, G. *Numerical initial value problems in ordinar differential equation*. New-Jersey, Prentice-Hall, 1971.
66. Stewart, G. W. *Introduction to Matrix computations*. New York, Academic Press, 1973.
67. Ortega, J., Rheinbaladt, W. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. New York, Academic Press, 1970.
68. Kunzi, P. H., Tzchuch, G. H. *Numerical methods of mathematical Optimization*, New York, Academic Press, 1971.
69. Young, D. *Iterative solution of large linear systems*. New York, Academic Press, 1971.
70. Young, D., Gregory, R. *A survey of numerical mathematics*. Vol. I, Mass, Addison Wesley, 1972.
71. Young, D., Gregory, R. *A survey of numerical mathematics*, Vol. II, Mass, Addison, Wesley, 1973.
72. Young, D. *Generalization of Property A and consistency ordering*. În: SIAM J. of Numer. Anal. 9, 1972.
73. Young, D. *A survey of modern numerical analysis*. În: SIAM Review, 15, 2, 1973.
74. Young, D., Kincaid, R. *The modified succesive overrelaxation method with fixed parameters*. În: Math. of Comp. 26, 1972.
75. Teodorescu, N. *Introducere în fizica matematică*. București, Editura tehnică, 1970.
76. Lees, M. *Discrete methods for nonlinear two-point boundary value problems. Numerical solutions partial differential equations*. New York, Academic Press, 1966.
77. Șchiop, I. A. *Metode aproximative în analiza matematică*. București, Editura Academiei R.S.R., 1972.
78. Schecter, S. *Iteration methods for nonlinear problems*. În: Trans. Amer. Math. Soc., 1962.
79. Teodorescu, N. și Olariu, V. *Ecuatiile fizicii matematice*. Vol. I și II, București, Editura didactică și pedagogică, 1965.
80. Tucker, T. S. *Stability of nonlinear computing schemes*, În: SIAM J. Num. Anal. 6, 1969.
81. Ping-Chun Vang. *Metode numerice și matriceale în mecanica construcțiilor* (trad. din l. engleză). București, Editura tehnică, 1970.
82. Pipes, L. *Matrix Methods for Engineering*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, H. J., 1963.

- Gutterman, G. *On operational method in partial differential equation*. În: SIAM J. Appl. Math., vol. 2, 1969.
- Ablow, M. G. *A characteristic finite difference methods for the wave equation in two dimensions*. În: SIAM T. Numer. Anal. vol. 9, nr. 1, martie 1972.
- Bruce, C., Stepleman, R. *A general theory of convergence for numerical Methods*, În: SIAM J. Numer. Anal. vol. 9, nr. 3 sept., 1972.
- Ionescu, W. D. *Ecuatii diferențiale ordinare și cu derivate parțiale* București, Editura didactică și pedagogică, 1965.
- Babuska, H.P., Vitasek E. *Numerical Processes in Differential Equations*. New York, Wiley, 1966.
- Butler, D. S. *The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations in three independent variables*, London Proc. Roy. Soc. ser. A, 255, 1960.
- Oroveanu, T. *Hidraulica și transportul produselor petroliere*. București, Editura didactică și pedagogică, 1966.
- Oroveanu, T. *Mecanica fluidelor viscoase*. București, Editura Academiei R.S.R., 1967.
- Crețu, I. *Hidraulică generală și subterană*. București, Editura didactică și pedagogică, 1971.
- Dodescu, Gh. *Metode de calcul numeric pentru ecuațiile de tip hiperbolic cu aplicații în industria petrolului*. Teză de doctorat, București, Institutul de Petrol, Gaze și Geologie, 1972.
- Dodescu, Gh., Dumitrescu, I. *Procedee pentru determinarea eforturilor din instalațiile de pompaj al țiteiului în regim dinamic prin utilizarea sistemelor de calcul automat*. În: Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, vol. 23, 1974.
- Sauerwein, H., Sussman, M. *Numerical stability of the three dimensional method of characteristics*. În: AIAA J., 2, 1964.
- Hahn, G. S. *Stability criteria for difference schemes*. În: Comm. Pure Appl. Math., 11, 1958.
- Chuchkin, J. P. *Numerical method of characteristics for three-dimensional supersonic flows*. În: Progress in the Aeronautical Sciences, vol. 9, Oxford, 1968.
- Meyer, E. R. *The method of characteristics, Modern Developments in Fluid Dynamics, High speed flow*. Oxford, Clarendon Press, 1953.
- Golube, H. G. *The direct solution of the discrete Poisson equation on irregular regions*. În: SIAM J. Numer. Anal., 8, 1971.
- Golube, G. *Use of fort direct methods for the efficient numerical solution of nonseparable elliptic equations*. În: Rep. STAN-CS-72-278, Computer Science Department, Stanford University, 1972.
- Widlund, B. O. *On the rate of convergence of an alternating direction implicit method in a noncommunicative case*. În: Math. Comp, 20, 1966.
- Birkhoff, G., Varga, S. R. *Implicit alternating direction methods*. În: Trans. Amer. Math. Soc., 92, 1959.

102. Longman, M. I. *On the generation of rational function approximation for Laplace transform inversion with an application to viscoelasticity*. În: SIAM J. Appl. math. 24, iunie, 1973.
103. Aziz, K. A., Mayers, M. A. *Periodic solution of hyperbolic partial differential equations in a strip*. În: Trans. Amer. Math. Soc. 146, 1969.
104. Yamaguti, M. *Some remarks on the Lax-Wendroff finite-difference scheme for nonsymmetric hyperbolic systems*. În: Math. Comp. 21, 1967.
105. McCracken, D. D., Dorn, W. S. *Numerical methods and FORTRAN Programming with application in engineering and science*. New York, Wiley, 1965.

ÎN SERIA „MATEMATICI MODERNE APLICATE”

au apărut:

1. **STUART R. D.**
„Introducere în analiza Fourier, cu aplicații în tehnică” (1971)
2. **JAGER I. C., NEWSTEAD G. H.**
„Introducere în transformarea Laplace, cu aplicații în tehnică” (1971)
3. **SALVADORI M., BARON M.**
„Metode numerice în tehnică” (1972)
4. **CULLMANN G.**
„Coduri detectoare și corectoare de erori” (1972)
5. **KAUFMANN A., PRÉCIGOUT M.**
„Elemente de teoria mulțimilor algebră modernă”, vol. I (1973)
6. **TEMAM R.**
„Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare” (1973)
7. **MOSZYNSKI K.**
„Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare” (1973)
8. **KAUFMANN A., PRÉCIGOUT M.**
„Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă”, vol. II (1973)
9. **FREUDENTHAL H.**
„Limbajul logicii matematice” (1973)
10. **GHIRCOIAȘIU N., MIRON C.**
„Grafuri de fluentă și aplicații în tehnică” (1974)
11. **NEGOIȚĂ C. V., RALESCU D. A.**
„Mulțimi vagi și aplicațiile lor” (1974)
12. **RUMSISKI L. Z.**
„Prelucrarea matematică a datelor experimentale” (1974)
13. **MARVIN FORRAY**
„Calculul variațional în știință și tehnică” (1975)
14. **VRAGIU G., LEONTE A.**
„Elemente de calcul matriceal cu aplicații” (1975)
15. **TEODORESCU P. P., KECS W.**
„Introducere în teoria distribuțiilor cu aplicații în tehnică” (1975)
16. **CRISTESCU R.**
„Elemente de analiză funcțională” (1975)